1.1(4). $r = \left(\frac{a}{\operatorname{ch} t}, a(t - \operatorname{th} t)\right)$, $r' = a\left(-\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}, 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\right)$. $1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{\operatorname{ch}^2 t - 1}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}$

Дотична при $t = t_0$: $\dfrac{x - \frac{a}{\operatorname{ch} t_0}}{-\frac{\operatorname{sh} t_0}{\operatorname{ch}^2 t_0}} = \dfrac{y - a(t_0 - \operatorname{th} t_0)}{\frac{\operatorname{sh}^2 t_0}{\operatorname{ch}^2 t_0}}$

1.1(5). $r = (r\cos t, r\sin t, ht)$, $r' = (-r\sin t, r\cos t, h)$

Дотична при $t = t_0$: $\dfrac{x - r\cos t_0}{-r\sin t_0} = \dfrac{y - r\sin t_0}{r\cos t_0} = \dfrac{z - ht_0}{h}$.

1.2. $r = (t, t^4)$, $r' = (1, 4t^3)$.

Дотична при $t = t_0$: $\dfrac{x - t_0}{1} = \dfrac{y - t_0^4}{4t_0^3}$

$$4t_0^3(x - t_0) = y - t_0^4$$

$$4t_0^3 x - y - 3t_0^4 = 0.$$

Проходить через $(-1, 0)$:

$$-4t_0^3 - 3t_0^4 = 0$$

$$t_0^3(-4 - 3t_0) = 0$$

$t_0 = 0$: $y = 0$.

$t_0 = -\frac{4}{3}$: $4 \cdot \left(-\frac{64}{27}\right)x - y - 3 \cdot \frac{256}{81} = 0$

$$256x + 27y + 256 = 0.$$

Паралельно $x' = y$, тобто $x - y = 0$:

$$\frac{4t_0^3}{1} = \frac{-1}{-1}.$$

$$4t_0^3 = 1.$$

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

1.3. $\Phi(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0.$

$$\Phi_x = 4x(x^2 + y^2) - 4x = 4x(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\Phi_y = 4y(x^2 + y^2) + 4y = 4y(x^2 + y^2 + 1)$$

Тому дотична у (x_0, y_0):

$$\cancel{2}x_0(x_0^2+y_0^2-1)(x-x_0)+\cancel{2}y_0(x_0^2+y_0^2+1)(y-y_0)=0.$$

Для $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}, 0)$ (що належить кривій):

$$\sqrt{2}(x-\sqrt{2})=0$$
$$x=\sqrt{2}.$$

Якщо проходить через $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$:

$$\begin{cases} x_0(x_0^2+y_0^2-1)(\sqrt{2}-x_0)+y_0(x_0^2+y_0^2+1)(\sqrt{2}-y_0)=0. \\ (x_0^2+y_0^2)^2-2(x_0^2-y_0^2)=0. \end{cases}$$

Один з розв'язків – $(\sqrt{2}, 0)$.

Якщо паралельна Ox: $y=0$:

$$\begin{cases} x_0(x_0^2+y_0^2-1)=0 \\ (x_0^2+y_0^2)^2-2(x_0^2-y_0^2)=0 \end{cases}$$

$x_0=0 \Rightarrow y_0^4+2y_0^2=0 \Rightarrow y_0=0$. Але це особлива точка.

$x_0^2+y_0^2=1 \Rightarrow x_0^2-y_0^2=\frac{1}{2}$, тобто $x_0^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$, $y_0^2=\frac{1}{4}$.

Це 4 точки $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$. Відповідні дотичні – $y=\frac{1}{2}$ і

$y=-\frac{1}{2}$.

3.1.1 Дотична з 1.1.(4):

$$\frac{x-\frac{a}{\operatorname{ch}t}}{-1} = \frac{y-a(t-\operatorname{th}t)}{\operatorname{sh}t}$$

$-\operatorname{sh}t\,x - y + at$ [illegible] $= 0$.

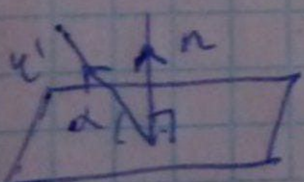
Перетин з Oy: $x=0$, $y = a\,t$ [illegible]

Відстань від $\left(\frac{a}{\operatorname{ch}t}, a(t-\operatorname{th}t)\right)$ до $(0, a\,t$ [illegible]$)$:

$$a\sqrt{\left(\frac{1}{\operatorname{ch}t}-0\right)^2+\left(t-\operatorname{th}t-t\ \ldots\right)^2} = a\sqrt{\frac{1}{\operatorname{ch}^2t}+\operatorname{th}^2t} = a\sqrt{\frac{1+\operatorname{sh}^2t}{\operatorname{ch}^2t}} = a.$$

2. з 1.1.(5), напрямний вектор дотичної $f' = (-4\sin t, 4\cos t, h)$.

Вектор нормалі Oxy — це $n=(0,0,1)$. Для кута α маємо:



$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\langle f', n\rangle}{|f'|\,|n|} = \frac{h}{\sqrt{4^2+h^2}\cdot 1}.$$

$$\alpha = \arcsin\frac{h}{\sqrt{4^2+h^2}}.$$

3. — ан-но 2.

Задача 6.6. Знайдемо довжину дуги плаcкої кривої, що задана загальним рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$ для $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Перейдемо спочатку до декартових координат, записавши вектор-функцію, що відповідає кривій, у вигляді

$$r(\varphi) = (\rho(\varphi)\cos\varphi,\ \rho(\varphi)\sin\varphi).$$

Тобто крива задана параметрично з параметром φ. Далі діємо як раніше:

$$r' = (\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi,\ \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi),$$

$$|r'| = \sqrt{(\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^2 + (\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi)^2} = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2},$$

$$L = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} |r'(\varphi)|\, d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho'(\varphi)^2 + \rho(\varphi)^2}\, d\varphi.$$

Задача 6.8а. Тут потрібно знайти довжину всієї замкненої кривої (кардіоїди), що задана рівнянням у полярних координатах $\rho = a(1 + cos\varphi)$ (де $a > 0$, оскільки радіус повинен бути невід'ємним). Період цієї функції дорівнює 2π, тому, щоб пройти всю криву, можна взяти $\varphi \in [0, 2\pi]$. Далі просто підставимо в готову формулу з попередньої задачі:

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\rho'(\varphi)^2 + \rho(\varphi)^2}\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin\varphi)^2 + (a(1 + cos\varphi))^2}\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2 + 2a^2\cos\varphi + a^2\cos^2\varphi}\, d\varphi = \sqrt{2}a \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos\varphi}\, d\varphi = 2a \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi.$$

Тут $\cos\frac{\varphi}{2} \geqslant 0$ для $\varphi \in [0, \pi]$ і $\cos\frac{\varphi}{2} \leqslant 0$ для $\varphi \in [\pi, 2\pi]$, тому

$$L = 2a \int\limits_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi - 2a \int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} - 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= 4a(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \sin\pi + \sin\frac{\pi}{2}) = 8a.$$

Задача 6.3. Знайдемо довжину дуги гвинтової лінії

$$r = (a\cos t,\, a\sin t,\, bt)$$

від перетину з площиною Oxy до довільної точки. Перетин з площиною $z = 0$ відповідає значенню параметра $t = 0$, тож нам потрібна дуга, що відповідає $t \in [0, t_1]$ для $t_1 \geqslant 0$ або $t \in [t_1, 0]$ $t_1 \leqslant 0$. Обмежимося першим з цих випадків. Згадаємо, що напрямним вектором дотичної в кожній точці кривої є похідний вектор

$$r' = (x', y', z') = (-a\sin t,\, a\cos t,\, b).$$

Він має довжину

$$|r'| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

тому довжина дуги

$$L = \int\limits_0^{t_1} |r'(t)|\, dt = \int\limits_0^{t_1} \sqrt{a^2+b^2}\, dt = \sqrt{a^2+b^2}\, t\Big|_0^{t_1} = \sqrt{a^2+b^2}\, t_1.$$

Задача 6.13. Тепер перепишемо рівняння гвинтової лінії, прийнявши за новий параметр довжину дуги. Такий параметр зветься натуральним. Виразимо його через вихідний параметр, взявши довжину дуги від його значення t_0 до t:

$$s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} |r'(\tau)|\, d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{a^2+b^2}\, d\tau = \sqrt{a^2+b^2}\, \tau\Big|_{t_0}^{t} = \sqrt{a^2+b^2}(t - t_0).$$

Тут при $t < t_0$ значення стає від'ємним: більш точно, натуральний параметр – це "орієнтована" довжина дуги. Зауважимо, що вибір натурального параметра залежить від вибору початкової точки дуги, тобто таких параметрів багато. Нехай для визначеності $t_0 = 0$. Тоді $s = \sqrt{a^2+b^2}\, t$, отже $t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Таким чином, нова параметризація має вигляд:

$$r(s) = (a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}).$$

Зауважимо, що у натуральній параметризації вектор

$$r' = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\, b)$$

має довжину 1.

1. Кут між кривими, що перетинаються

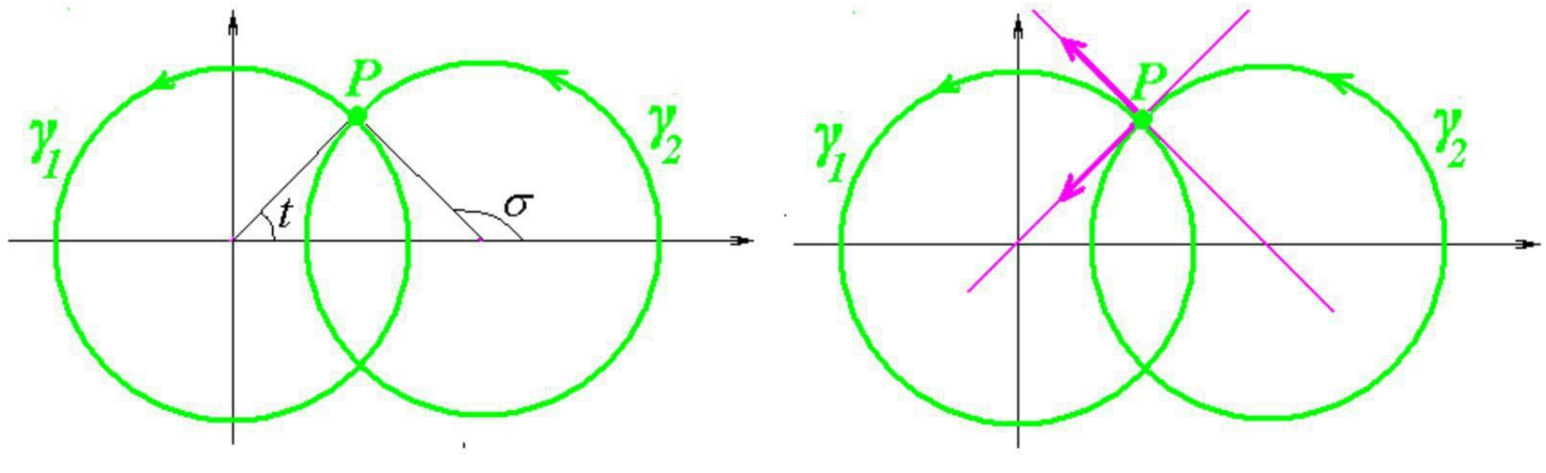
Задача 1.1. Знайдіть точку перетину наступних параметрично заданих кривих та обчисліть кут між кривими:

$$\gamma_1\colon \begin{cases} x^1 = \cos t \\ x^2 = \sin t \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty), \quad \gamma_2\colon \begin{cases} x^1 = \sqrt{2} + \cos\sigma \\ x^2 = \sin\sigma \end{cases}, \ \sigma \in (-\infty, +\infty),$$

Розв'язання. Знаходимо точку перетину: $\begin{cases} \cos t = \sqrt{2} + \cos\sigma \\ \sin t = \sin\sigma \end{cases}$

Розв'язки: $t = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi\, m, \ \sigma = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi\, m$ та $t = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\, m, \ \sigma = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi\, m$

Візьмемо розв'язок $t = \dfrac{\pi}{4}, \ \sigma = \dfrac{3\pi}{4}$, йому відповідає точка перетину P



Обчислимо дотичний вектор кривої γ_1 в довільній її точці:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Дотичний вектор кривої γ_1 в точці P:

$$\frac{d\vec{f}}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Обчислимо дотичний вектор кривої γ_2 в довільній її точці:

$$\vec{w}(\sigma) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + \cos\sigma \\ \sin\sigma \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{w}}{d\sigma} = \begin{pmatrix} -\sin\sigma \\ \cos\sigma \end{pmatrix}$$

Дотичний вектор кривої γ_2 в точці P:

$$\frac{d\vec{w}}{d\sigma}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Обчислимо кут між векторами $\frac{d\vec{f}}{dt}(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ і $\frac{d\vec{w}}{d\sigma}(\frac{3\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

Маємо

$$\cos\alpha = \frac{< \frac{d\vec{f}}{dt}(\frac{\pi}{4}), \frac{d\vec{w}}{d\sigma}(\frac{3\pi}{4}) >}{|\frac{d\vec{f}}{dt}(\frac{\pi}{4})| \cdot |\frac{d\vec{w}}{d\sigma}(\frac{3\pi}{4})|} = \frac{0}{1 \cdot 1} = 0$$

Відповідь: Кут між заданими кривими в точці перетину P дорівнює $\frac{\pi}{2}$

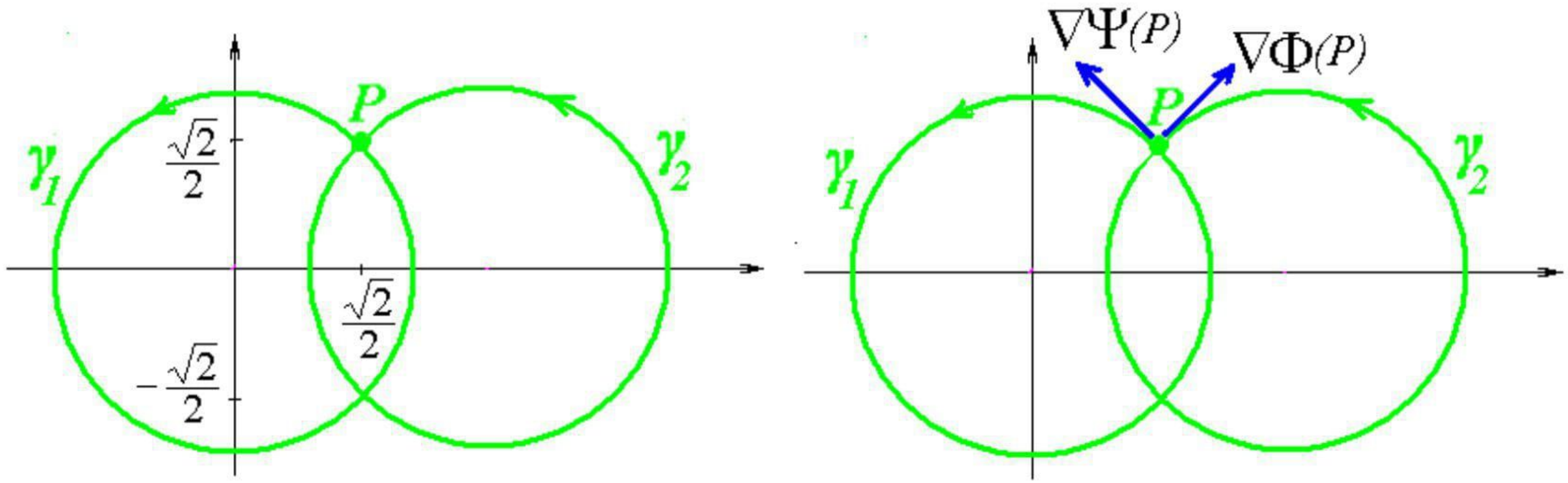
Задача 1.2. Знайдіть точку перетину наступних неявно заданих кривих та обчисліть кут між кривими:

$$\gamma_1: (x^1)^2+(x^2)^2 - 1 = 0, \qquad \gamma_2: (x^1-\sqrt{2})^2+(x^2)^2 - 1 = 0,$$

Розвязання: Знаходимо точку перетину: $\begin{cases} (x^1)^2+(x^2)^2-1=0 \\ (x^1-\sqrt{2})^2+(x^2)^2-1=0 \end{cases}$

Розв'язки: $x^1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ та $x^1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x^2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Візьмемо розв'язок $x^1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, йому відповідає точка перетину P



Кут між кривими дорівнює куту між дотичними прямими. А кут між дотичними прямими визначається кутом між нормалями дотичних прямих.

Обчислимо градієнт функції $\Phi(x,y) = (x^1)^2+(x^2)^2-1$, що задає неявно криву γ_1:

$$\nabla\Phi = (2x^1, 2x^2)$$

В точці $P(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ маємо:

$$\nabla\Phi(P) = (2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \ ,$$

це є нормаль до дотичної прямої кривої γ_1 в точці P.

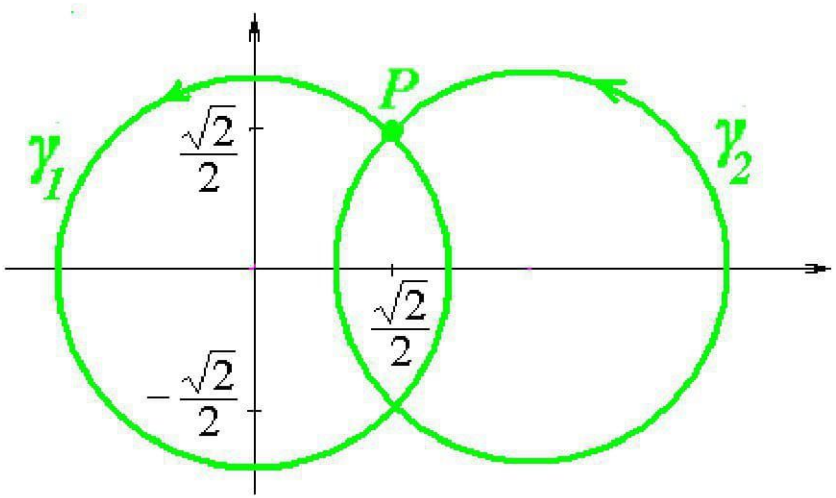
Обчислимо градієнт функції $\Psi(x,y) = (x^1-\sqrt{2})^2+(x^2)^2-1$, що задає неявно криву γ_2:

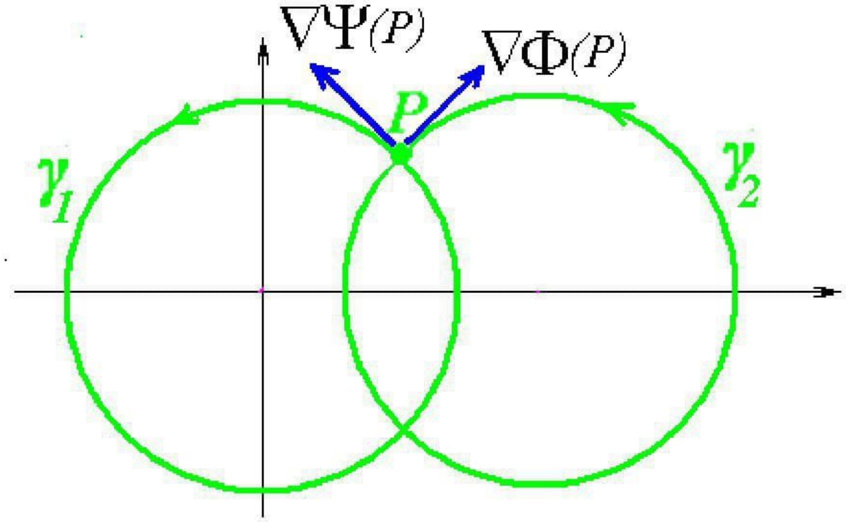
$$\nabla\Psi = (2(x^1-\sqrt{2}), 2x^2)$$

В точці $P(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ маємо:

$$\nabla\Psi(P) = (2\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}), 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \ ,$$

це є нормаль до дотичної прямої кривої γ_2 в точці P.





Обчислюємо кут між знайденими векторами

$$\cos\alpha = \frac{<\nabla\Phi(P), \nabla\Psi(P)>}{|\nabla\Phi(P)|\cdot|\nabla\Psi(P)|} = \frac{0}{2\cdot 2} = 0$$

Відповідь: Кут між заданими кривими в точці перетину *P* дорівнює $\frac{\pi}{2}$

2. Щільнодотична площина

Задача 2.1. Для параметрично заданої кривої γ в $\mathbb{R}^3$ запишіть рівняння щільнодотичної площини в заданій точці P:

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = \cos t \\ x^2 = \sin t \\ x^3 = ht \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty), \qquad P(t=\pi).$$

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор кривої γ:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ ht \end{pmatrix}$$

Обчислимо першу та другу похідну радіус-вектора:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ h \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ h \end{pmatrix} \neq \vec{0} \ ,$$

$$[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] = \begin{pmatrix} h\sin t \\ -h\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad .$$

Отже, крива γ є регулярною і в кожній її точці є однозначно визначена щільнодотична площина. Зокрема, в точці $P(t=\pi)$ маємо:

$$\vec{f}(\pi) = \begin{pmatrix} \cos\pi \\ \sin\pi \\ h\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ h\pi \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{f}}{dt}(\pi) = \begin{pmatrix} -\sin\pi \\ \cos\pi \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(\pi) = \begin{pmatrix} -\cos\pi \\ -\sin\pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Шукана щільно дотична площина проходить через точку P, а вектори $\frac{d\vec{f}}{dt}(\pi)$, $\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(\pi)$ утворюють базис в цій площині.

Параметричне рівняння щільнодотичної площини:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ h\pi \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ h \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u, v \in (-\infty, \infty)$$

Неявне рівняння щільнодотичної площини:

$$\begin{vmatrix} x^1 - (-1) & 0 & 1 \\ x^2 - 0 & -1 & 0 \\ x^3 - h\pi & h & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

тобто

$$h\, x^2 + x^3 - \pi h = 0$$

Задача 5.6. Треба знайти щільнодотичні площини кривої

$$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,$$

що проходять через точку $M(2, -\frac{1}{3}, -6)$. Згадаємо основні кроки знаходження щільнодотичної площини з попередньої задачі:

$$r = (t,\ t^2,\ t^3),$$

$$r' = (1,\ 2t,\ 3t^2),$$

$$r'' = (0,\ 2,\ 6t),$$

$$[r', r''] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = (6t^2,\ -6t,\ 2).$$

Отже, рівняння площини має вигляд (скоротимо відразу на 2)

$$3t^2(x - t) - 3t(y - t^2) + z - t^3 = 0,$$

$$3t^2\,x - 3t\,y + z - t^3 = 0.$$

Підставимо координати M та розкладемо:

$$6t^2 + t - 6 - t^3 = 0,$$

$$6(t^2 - 1) + t(1 - t^2) = 0,$$

$$(t - 1)(t + 1)(t - 6) = 0.$$

Таким чином, потрібні площини відповідають значенням параметра $t = -1, 1, 6$:

$$3x + 3y + z + 1 = 0,$$

$$3x - 3y + z - 1 = 0,$$

$$108x - 18y + z - 216 = 0.$$

Задача 2.4. Доведіть, що якщо регулярна (класу C^2) крива γ в $\mathbb{R}^n$ параметризована натуральним параметром, $\vec{x} = \vec{f}(s)$, то тоді

1) вектори $\frac{d\vec{f}}{ds}$, $\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}$ взаємно ортогональні, тобто, $< \frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{ds^2} > \equiv 0$,

2) вектори $\frac{d\vec{f}}{ds}$, $\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}$ лінійно незалежні $\Leftrightarrow |\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}| \neq 0$.

Доведення. Для параметризації натуральним параметром s маємо

$$|\frac{d\vec{f}}{ds}| \equiv 1 ,$$

тобто,

$$< \frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d\vec{f}}{ds} > \equiv 1$$

Продиференціюємо цю тотожність:

$$\frac{d}{ds} < \frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d\vec{f}}{ds} > \equiv \frac{d}{ds} 1$$

$$< \frac{d^2\vec{f}}{ds^2}, \frac{d\vec{f}}{ds} > + < \frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{ds^2} > \equiv 0$$

З урахуванням симетричності скалярного добутку отримуємо:

$$< \frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{ds^2} > \equiv 0$$

Таким чином, вектори $\frac{d\vec{f}}{ds}$ і $\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}$ при кожному значенні s є взаємно ортогональними.

Як наслідок, $\frac{d\vec{f}}{ds}$ і $\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}$ є лінійно незалежними тоді, і тільки тоді, коли $\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}$ є нульовим, оскільки $\frac{d\vec{f}}{ds}$ є завідомо ненульовим (його довжина $|\frac{d\vec{f}}{ds}| \equiv 1$).