Лекція 3. Кут між кривими. Довжина кривої і натуральна параметризація. Щільнодотична площина.

Розглянемо параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором

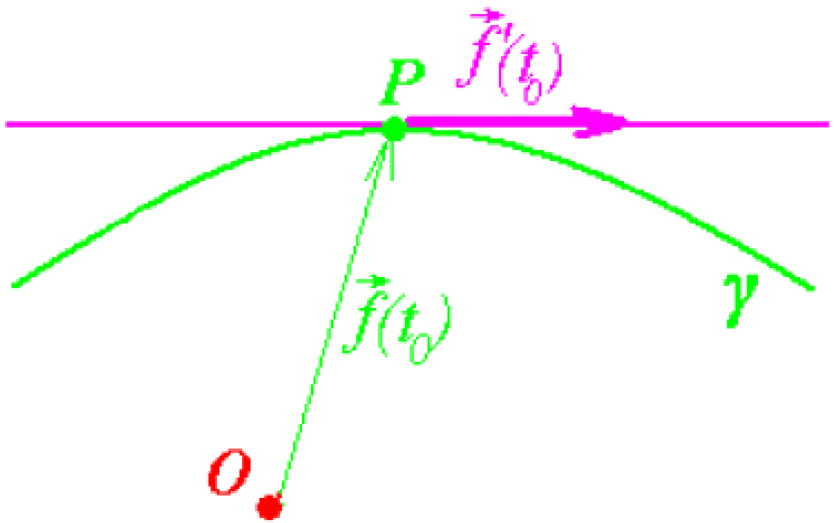
$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

Будемо вважати, що крива γ є регулярною:

$$1) \;\; \vec{f}(t) \in C^m, \quad m \geq 1;$$

$$2) \;\; \frac{d\vec{f}}{dt} \neq 0.$$

В кожній точці *P(t₀)* на кривій γ існує і є єдиною *дотична пряма* – вона проходить через точку $P(t_0)$ в напрямку вектора $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$:



1. Кут між кривими

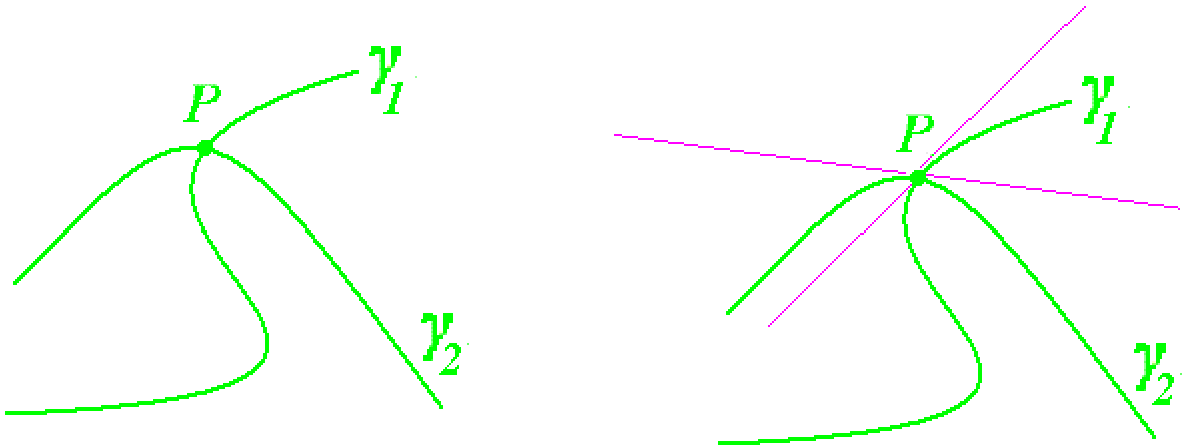
Визначення. Якщо дві регулярні криві γ_1 і γ_2 перетинаються в деякій точці P, то *кутом* між кривими γ_1 і γ_2 в точці P називають кут між дотичними прямими кривих γ_1 і γ_2 в точці P.

Криві

$$\gamma_1 : \vec{x} = \vec{f}(t)\ ,\ \ \gamma_2 : \vec{x} = \vec{w}(\sigma)$$

Точка перетину P:

$$\vec{f}(t_0) = \vec{w}(\sigma_0)$$



Дотичні вектори кривих в точці перетину: $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$, $\dfrac{d\vec{w}}{d\sigma}(\sigma_0)$

Кут визначається формулою

$$\cos\alpha = \frac{<\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0), \dfrac{d\vec{w}}{d\sigma}(\sigma_0)>}{\left|\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0)\right| \cdot \left|\dfrac{d\vec{w}}{d\sigma}(\sigma_0)\right|}$$

2. Довжина кривої. Натуральна параметризація кривої

Будемо розглядати простір $\mathbb{R}^n$ як евклідів простір, де скалярний добуток і довжина векторів $\vec{X} = \left(X^1,\dots,X^n\right)$ і $\vec{Y} = \left(Y^1,\dots,Y^n\right)$ визначається формулами

$$\left\langle \vec{X},\vec{Y} \right\rangle = X^1Y^1 + \dots + X^nY^n \ ,$$

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{\left\langle \vec{X},\vec{X} \right\rangle} = \sqrt{(X^1)^2 + \dots + (X^n)^2}\,.$$

Нехай γ – регулярна (класу C^1) параметрично задана крива в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t) \quad , \qquad a \le t \le b.$$

Визначення. *Довжиною* кривої γ називається величина

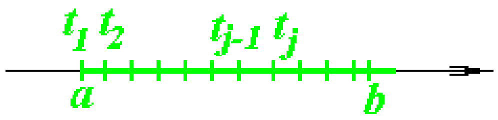
$$l = \int_a^b \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt,$$

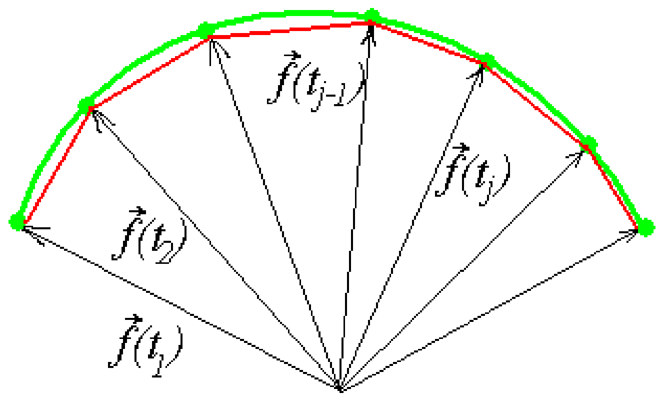
тобто,

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{df^1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{df^n}{dt}\right)^2}\, dt$$

Синтетичне визначення довжини кривої за допомогою вписаних в криву ломаних і відповідного граничного переходу дивись в підручнику О.В. Погорєлова *Диференціальна геометрія*.

Ідея синтетичного підходу до визначення довжини кривої





$$\sum \left| \vec{f}(t_j) - \vec{f}(t_{j-1}) \right| =$$

$$= \sum \sqrt{(f^1(t_j) - f^1(t_{j-1}))^2 + \ldots + (f^n(t_j) - f^n(t_{j-1}))^2} =$$

$$= \sum \sqrt{\left(\frac{df^1}{dt}(\hat{t}_j^1) \cdot \Delta t\right)^2 + \ldots + \left(\frac{df^n}{dt}(\hat{t}_j^n) \cdot \Delta t\right)^2} =$$

$$= \sum \sqrt{\left(\frac{df^1}{dt}(\hat{t}_j^1)\right)^2 + \ldots + \left(\frac{df^n}{dt}(\hat{t}_j^n)\right)^2}\, \Delta t \quad \to \quad \int_a^b \sqrt{\left(\frac{df^1}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{df^n}{dt}\right)^2}\, dt =$$

$$= \int_a^b \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| dt$$

Твердження. *Визначення поняття довжини для регулярної кривої є коректним – довжина кривої не змінюється при регулярних замінах параметру на кривій.*

Доведення. Зробимо на кривій γ регулярну заміну параметра

$$t = \varphi(\tilde{t}), \quad \tilde{a} \le \tilde{t} \le \tilde{b},$$

і запишемо радіус-вектор кривої в новій параметризації

$$\vec{x} = \vec{f}\,(\varphi(\tilde{t})) = \tilde{\vec{f}}\,(\tilde{t}).$$

Тоді маємо:

$$\frac{d\tilde{\vec{f}}}{d\tilde{t}} = \frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tilde{t}}$$

і далі $$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left| \frac{d\tilde{\vec{f}}}{d\tilde{t}} \right| d\tilde{t} = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| \cdot \frac{dt}{d\tilde{t}}\, d\tilde{t} = \int_{a}^{b} \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| dt \text{ при } \frac{dt}{d\tilde{t}} > 0,$$

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left| \frac{d\tilde{\vec{f}}}{d\tilde{t}} \right| d\tilde{t} = -\int_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} \left| \frac{d\tilde{\vec{f}}}{d\tilde{t}} \right| d\tilde{t} = \int_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| \cdot \frac{dt}{d\tilde{t}}\, d\tilde{t} = \int_{a}^{b} \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| dt \text{ при } \frac{dt}{d\tilde{t}} < 0,$$

Таким чином,

$$\int_{a}^{b} \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left| \frac{d\tilde{\vec{f}}}{d\tilde{t}} \right| d\tilde{t} \;,$$

що і вимагалось довести.

Приклад 1. Розглянемо параметрично задану криву γ в $I\!R^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = (1-t)\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \quad t \in (0,1).$$

Крива γ представляє собою відрізок прямої, що сполучає точки $A(a^1,a^2)$ і $B(b^1,b^2)$

Обчислимо довжину кривої γ. Маємо:

$$\vec{f}(t) = (1-t)\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\vec{f}}{dt} = -\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 - a^1 \\ b^2 - a^2 \end{pmatrix}$$

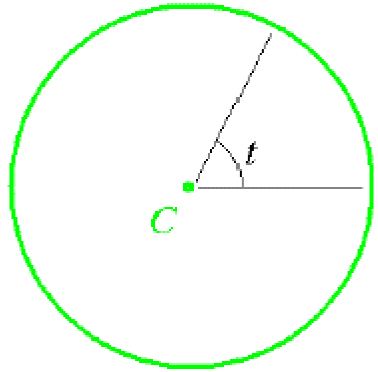
$$\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = \sqrt{(b^1-a^1)^2 + (b^2-a^2)^2}$$

$$l(\gamma) = \int_0^1 \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt = \int_0^1 \sqrt{(b^1-a^1)^2 + (b^2-a^2)^2}\, dt = \sqrt{(b^1-a^1)^2 + (b^2-a^2)^2}\,\Big|_{t=0}^{t=1} =$$

$$= \sqrt{(b^1-a^1)^2 + (b^2-a^2)^2}$$

Відповідь: $l(\gamma) = \sqrt{(b^1-a^1)^2 + (b^2-a^2)^2}$, це звичайна довжина відрізка прямої між двома точками.

Приклад 2. Розглянемо параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^2$ з радіус-вектором



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} c^1 + r\cos t \\ c^2 + r\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Крива γ представляє собою дугу кола радіуса $r > 0$ з центром в точці $C\,(c^1, c^2)$.

Обчислимо довжину кривої γ. Маємо:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} c^1 + r\cos t \\ c^2 + r\sin t \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos)^2} = r$$

$$l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt = \int_{\alpha}^{\beta} r\, dt = rt\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = (\beta - \alpha)r$$

Відповідь: $l(\gamma) = (\beta - \alpha)r$, це звичайна довжина дуги кола.

Зауваження 1. Поняття довжини можна визначати не тільки для регулярних кривих, але й для більш загального класу *спрямних* кривих. Умова регулярності є достатньою для того, щоб крива була спрямною (мала довжину), але вона не є необхідною.

Зауваження 2. Довжина кривої має властивості адитивності і монотонності:

1) якщо крива $\gamma:(a,b)\to \mathbb{R}^n$ утворена з двох кривих $\gamma_1:(a,c)\to \mathbb{R}^n$ і $\gamma_2:(c,b)\to \mathbb{R}^n$, тобто, $\gamma_1 = \gamma|_{(a,c)}$, $\gamma_2 = \gamma|_{(c,b)}$, то $l(\gamma)=l(\gamma_1)+l(\gamma_2)$;

2) якщо крива $\gamma:(a,b)\to \mathbb{R}^n$ містить криву $\gamma^*:(a^*,b^*)\to \mathbb{R}^n$, тобто $\gamma^*= \gamma|_{(a^*,b^*)}$, де $(a^*,b^*)\subseteq(a,b)$, то $l(\gamma^*)\leq l(\gamma)$.

Зокрема, якщо крива γ є кусково-регулярною і містить скінчену кількість особливих точок, то її довжина дорівнює сумі довжин її регулярних частин, на які крива розпадається видаленням особливих точок.

За допомогою поняття довжини кривої можна ввести спеціальну параметризацію на кривій.

Розглянемо параметрично задану криву γ в $I\!R^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

Будемо вважати, що крива γ є регулярною: 1) $\vec{f}(t) \in C^1$, 2) $\dfrac{d\vec{f}}{dt} \neq 0$.

Довжина кривої γ обчислюється / визначається за формулою

$$l(\gamma) = \int_a^b \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt$$

Зафіксуємо на кривій γ точку P, що відповідає значенню параметра t_0.

Кожній точці Q на кривій γ, що відповідає довільному значенню параметра t, зіставимо у відповідність величину

$$s = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt \;.$$

Геометрично, величина s дорівнює довжині (зі знаком) дуги кривої γ відточки P до точки Q.

Виникає функція $s=s(t)$, для якої виконується

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|.$$

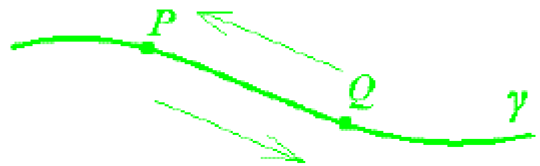
Оскільки крива γ є регулярною, тобто, $\vec{f}(t) \in C^1$ та $\frac{d\vec{f}}{dt} \neq 0$, то функція $s=s(t) \in C^1$ і при цьому $\frac{ds}{dt} \neq 0$. Це означає, що перехід від параметра t до параметра s є регулярною заміною параметра на кривій γ.

Визначення. Параметризація кривої γ параметром s називається *натуральною параметризацією*.

Зауваження. Вибір натурального параметра на кривій γ залежить від вибору початкової точки P і орієнтації (напрямку руху) на кривій γ:

1) якщо замість початкової точки $P(t_0)$ взяти іншу початкову точку $\tilde{P}(\tilde{t}_0)$, то відповідні натуральні параметри s та $\tilde{s}$ пов'язані співвідношенням $\tilde{s} = s + c$, де c – довжина дуги від точки P до точки $\tilde{P}$;

2) якщо змінити орієнтацію на кривій γ, залишивши початкову точку P незмінною, то натуральний параметр змінить знак, $\tilde{s} = -s$.



Висновок. На кожні регулярній параметрично заданій кривій γ в $I\!R^n$ можна ввести спеціальну параметризацію – параметризацію *натуральним* параметром.

Натуральна параметризація кривої має багато гарних властивостей, вона є дуже зручною при розв'язання багатьох задач теорії кривих.

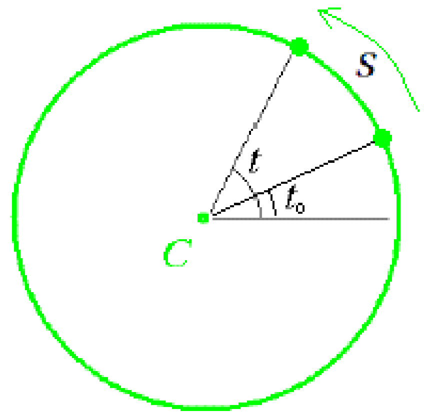
Твердження. Для регулярної параметрично заданої кривої γ в $I\!R^n$ з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{f}(t)$ параметр t є натуральним тоді, і тільки тоді, коли виконується умова

$$\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| \equiv 1$$

Ідея доведення.

$$\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| \equiv 1 \;\Leftrightarrow\; s = \int_{t_0}^{t}\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt = \int_{t_0}^{t} 1\, dt = t - t_0 \;\Leftrightarrow\; t = s + t_0 = s^*$$

Приклад. Розглянемо параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^2$ з радіус-вектором



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} c^1 + r\cos t \\ c^2 + r\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Крива γ представляє собою коло радіуса $r > 0$ з центром в точці $C\,(c^1, c^2)$, яке пробігається нескінченну кількість разів.

Маємо:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} c^1 + r\cos t \\ c^2 + r\sin t \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos)^2} = r$$

Обчислюємо натуральний параметр: $$s = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt = \int_{t_0}^{t} r\, dt = r(t - t_0)$$

Якщо зробити заміну параметра $s = r\,(t - t_0)$, тобто, $t = \frac{s}{r} + t_0$, то матимемо радіус-вектор кола в натуральній параметризації

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos(\frac{s}{r} + t_0) + c^1 \\ r\sin(\frac{s}{r} + t_0) + c^2 \end{pmatrix}$$

3. Характерна метрична властивість дотичної прямої

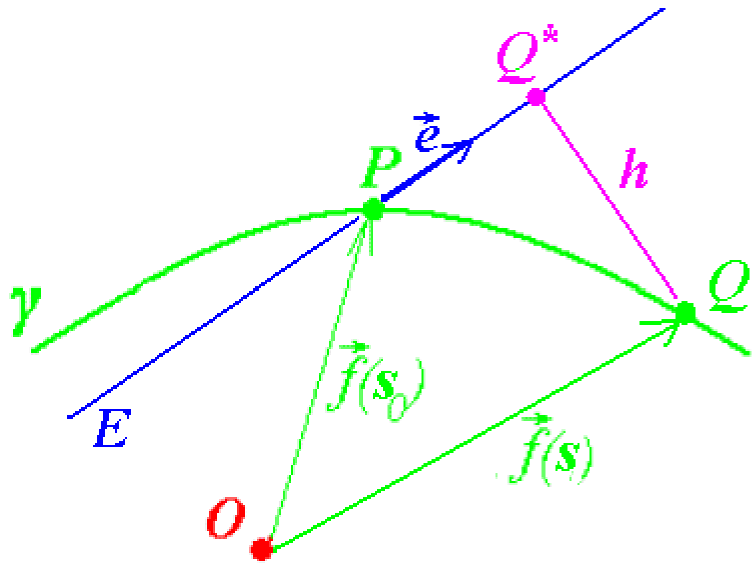
Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^n$, параметризовану натуральним параметром

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b)$$

Зафіксуємо точку $P(s_0)$ на кривій γ і проведемо через цю точку пряму E з одиничним напрямним вектором $\vec{e}$.

Для довільної точки $Q(s)$ на кривій позначимо h відстань від точки $Q(s)$ до прямої E:

$$h = \sqrt{|PQ|^2 - |PQ^*|^2} = \sqrt{|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - <\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e}>^2}$$



Проаналізуємо поведінку функції $h(s)$ при $s \to s_0$.

Маємо:

$$h(s_0) = 0$$

$$\frac{dh}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\sqrt{|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - <\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e}>^2}\right) =$$

$$= \frac{\frac{d}{ds}\left(|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - <\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e}>^2\right)}{2\sqrt{|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - <\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e}>^2}} =$$

$$= \frac{\frac{d}{ds}\left(<\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)> - <\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e}>^2\right)}{2\sqrt{|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - <\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e}>^2}} =$$

$$= \frac{<\frac{d\vec{f}(s)}{ds}, \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)> - <\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e}><\frac{d\vec{f}(s)}{ds}, \vec{e}>}{\sqrt{|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - <\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e}>^2}}$$

$$\frac{dh}{ds}(s_0)=\lim_{s\to s_0}\frac{dh}{ds}(s_0)=$$

$$=\lim_{s\to s_0}\frac{<\frac{d\vec f}{ds}(s),\vec f(s)-\vec f(s_0)>-<\vec f(s)-\vec f(s_0),\vec e><\frac{d\vec f}{ds}(s),\vec e>}{\sqrt{|\vec f(s)-\vec f(s_0)|^2-<\vec f(s)-\vec f(s_0),\vec e>^2}}=$$

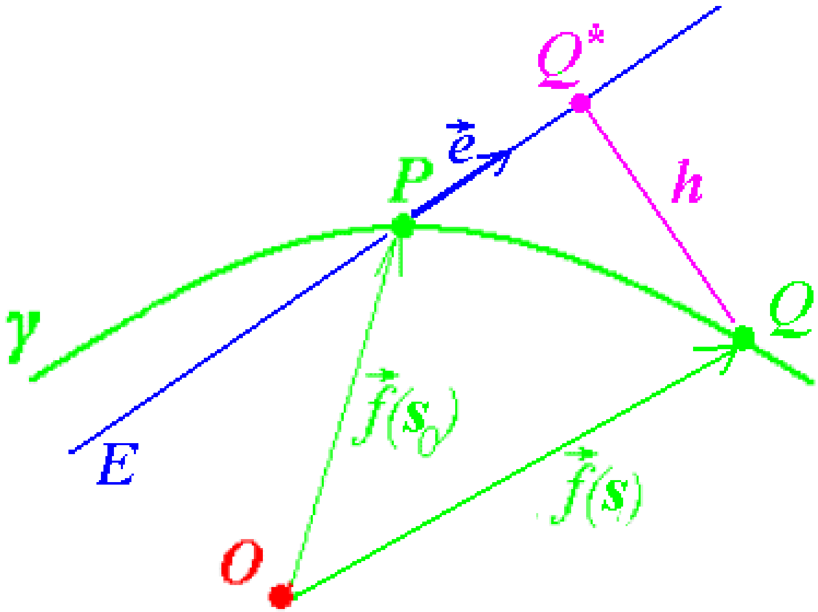
$$=\frac{<\frac{d\vec f}{ds}(s_0),\frac{d\vec f}{ds}(s_0)>-<\frac{d\vec f}{ds}(s_0),\vec e><\frac{d\vec f}{ds}(s_0),\vec e>}{\sqrt{|\frac{d\vec f}{ds}(s_0)|^2-<\frac{d\vec f}{ds}(s_0),\vec e>^2}}=$$

$$=\sqrt{|\frac{d\vec f}{ds}(s_0)|^2-<\frac{d\vec f}{ds}(s_0),\vec e>^2}=\sin\varphi$$

де φ – кут між $\frac{d\vec f}{ds}(s_0)$ та $\vec e$, тобто, кут між прямою E і дотичною прямою кривої γ в точці P.

Наслідок. $h(s) = \sin\varphi \cdot (s - s_0) + o(s - s_0)$

Наслідок. $h(s) = o(s - s_0)$ тоді, і тільки тоді, коли E – дотична пряма кривої γ в точці P.



Таким чином, серед усіх прямих, що проходять через точку P, саме дотична пряма є найближчою – в метричному сенсі, за *порядком* малості – до кривої γ в досить малому околі точки P.

4. Щільнодотична площина кривої

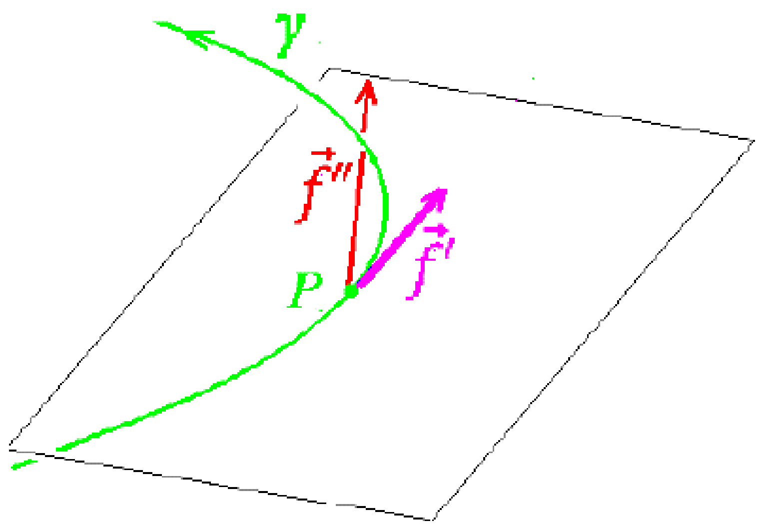
Розглянемо регулярну (класу C^2) параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

Зафіксуємо довільну точку P кривої γ і розглянемо пару векторів

$$\frac{d\vec{f}}{dt}, \quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}.$$

Якщо ці вектори є лінійно незалежними, $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \neq 0$, то через точку P можна провести однозначно визначену площину, натягнуту на вказані вектори.



Ця площина називається *щільнодотичною* площиною кривої γ в точці P.

Зауваження 1. Визначення є змістовним при $n \geq 3$.

У випадку $n=2$ щільнодотична площина в довільній точці кривої γ просто співпадає з обхопною площиною $\mathbb{R}^2$.

Зауваження 2. Визначення є *коректним* і не залежить від вибору параметризації на регулярній кривій. Якщо зробити регулярну заміну $t = t(\tilde{t})$ і записати радіус-вектор кривої в новій параметризації:

$$\vec{x} = \vec{f}(t(\tilde{t})) = \vec{\tilde{f}}(\tilde{t}),$$

то маємо

$$\frac{d\vec{\tilde{f}}}{d\tilde{t}} = \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{dt}{d\tilde{t}}$$

$$\frac{d^2\vec{\tilde{f}}}{d\tilde{t}^2} = \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\left(\frac{dt}{d\tilde{t}}\right)^2 + \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d^2t}{d\tilde{t}^2}$$

тобто

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\vec{\tilde{f}}}{d\tilde{t}} \\ \dfrac{d^2\vec{\tilde{f}}}{d\tilde{t}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dt}{d\tilde{t}} & 0 \\ \dfrac{d^2t}{d\tilde{t}^2} & \left(\dfrac{dt}{d\tilde{t}}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{d\vec{f}}{dt} \\ \dfrac{d^2\vec{f}}{dt^2} \end{pmatrix}$$

Отже, при регулярній заміні параметру на кривій щільнодотична площина не змінюється, змінюється лише базис в цій площині.

Зауваження 3. Для регулярної параметрично заданої кривої γ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t),$$

якщо записати розкладання Тейлора в довільній точці $P(t_0)$,

$$\vec{f}(t) = \vec{f}(t_0) + \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)\cdot(t-t_0) + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0)\cdot(t-t_0)^2 + o((t-t_0)^2),$$

то наближенням *першого* порядку буде *дотична* пряма кривої γ в точці P,

$$\vec{x} = \vec{f}(t_0) + \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)\cdot(t-t_0),$$

а наближенням *другого* порядку буде якась крива, що належить *щільнодотичній* площині кривої γ в точці P:

$$\vec{x} = \vec{f}(t_0) + \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)\cdot(t-t_0) + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0)\cdot(t-t_0)^2.$$

Рівняння щільнодотичної площини

Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t)$$

Запишемо рівняння щільнодотичної площини кривої в точці $P(t_0)$.

Параметричне задавання (при довільному $n \geq 3$)

$$\vec{x}(u,v) = \vec{f}(t_0) + \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \cdot u + \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0) \cdot v \ .$$

Неявне задавання (при $n=3$)

$$N_1 \cdot (x^1 - f^1(t_0)) + N_2 \cdot (x^2 - f^2(t_0)) + N_3 \cdot (x^3 - f^3(t_0)) = 0,$$

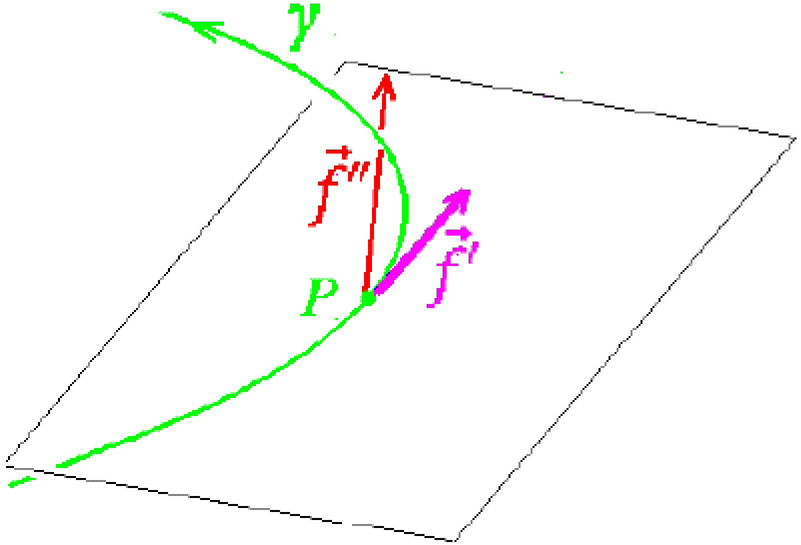
де

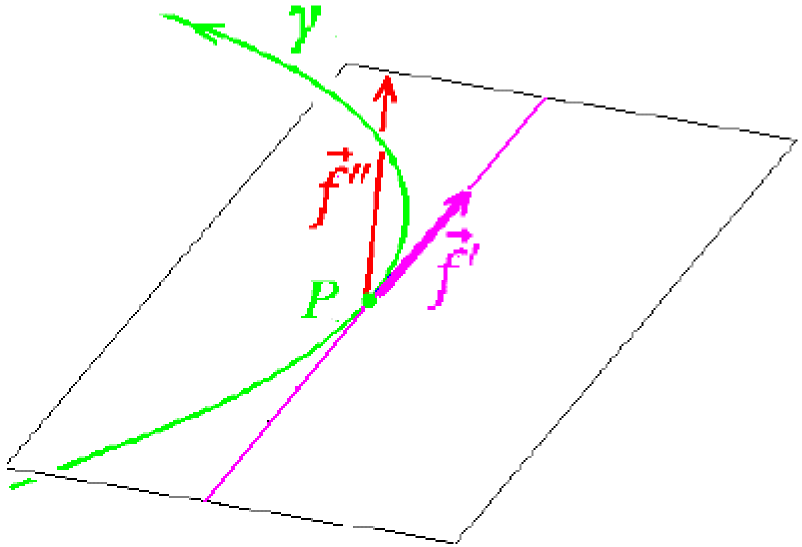
$$\vec{N} = \left[\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0), \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0) \right]$$

$$(N_1, N_2, N_3) = \left(\begin{vmatrix} \dfrac{df^2}{dt} & \dfrac{df^3}{dt} \\ \dfrac{d^2 f^2}{dt^2} & \dfrac{d^2 f^3}{dt^2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \dfrac{df^3}{dt} & \dfrac{df^1}{dt} \\ \dfrac{d^2 f^3}{dt^2} & \dfrac{d^2 f^1}{dt^2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \dfrac{df^1}{dt} & \dfrac{df^2}{dt} \\ \dfrac{d^2 f^1}{dt^2} & \dfrac{d^2 f^2}{dt^2} \end{vmatrix} \right)_{t=t_0}$$

Твердження. *Щільнодотична площина кривої γ в точці P містить дотичну пряму кривої γ в точці P.*

Доведення.





Дотична пряма проходить через ту ж точку *P(t₀)*, що і щільнодотична площина. Напрямний вектор $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$ дотичної прямої лежить у щільнодотичні площині. Значить, дотична пряма в точці *P* належить щільнодотичній площині в точці *P*.

Щільнодотична площина як границя січних площин

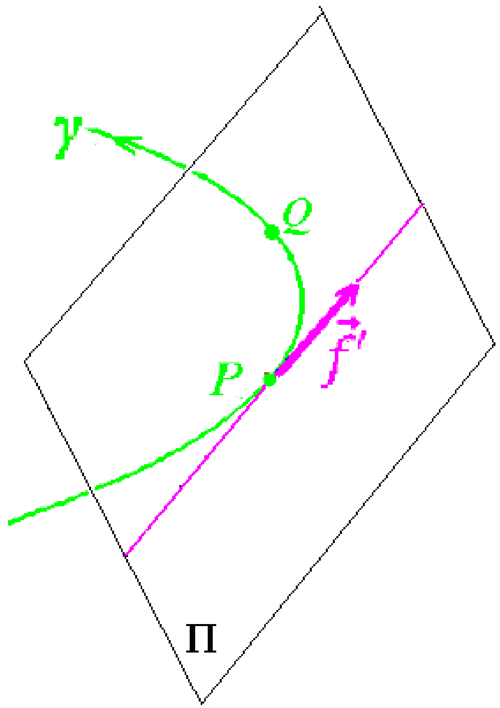
Розглянемо регулярну (класу C^2) параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

Зафіксуємо довільну точку $P(t_0)$ кривої γ.

Візьмемо дотичну пряму кривої γ в точці P, її напрямний вектор $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$.

Для довільної точки $Q(t)$ кривої γ побудуємо двомірну площину П, що містить дотичну пряму кривої γ в точці P і проходить через точку Q.



Яким буде граничне положення площини П, коли точка $Q(t)$ прямує по кривій γ до точки $P(t_0)$?

Ідея розв’язання. Зважаючи на розкладання Тейлора

$$\vec{f}(t) = \vec{f}(t_0) + \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)\cdot(t-t_0) + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0)\cdot(t-t_0)^2 + o((t-t_0)^2)\ ,$$

площина П буде натягнута на вектори

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \text{ і } \vec{f}(t) - \vec{f}(t_0) = \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)\cdot(t-t_0) + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0)\cdot(t-t_0)^2 + o((t-t_0)^2),$$

тобто

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \text{ і } \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0) + \frac{1}{(t-t_0)^2}\cdot o((t-t_0)^2).$$

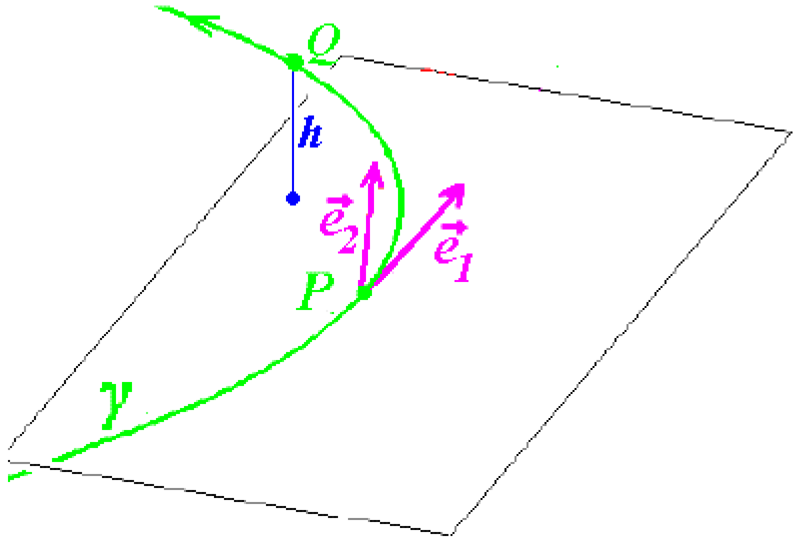
Якщо $[\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0), \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0)] \neq 0$, то при $t \to t_0$ отримаємо площину, натягнуту на вектори $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$ і $\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0)$, тобто, щільнодотичну площину кривої γ в точці P.

Характерна метрична властивість щільнодотичної площини

Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^n$, параметризовану натуральним параметром

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b)$$

Зафіксуємо точку $P(s_0)$ на кривій γ і проведемо через цю точку довільну двомірну площину E , натягнуту на пару ортонормованих векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.



Для довільної точки $Q(s)$ на кривій позначимо h відстань від точки $Q(s)$ до площини E.

Задача. Перевірте, що $h(s) = o((s-s_0)^2)$ тоді, і лише тоді, коли площина E є щільнодотичною площиною кривої γ в точці P.

Висновок. Серед усіх двомірних площин, що проходять через точку P, саме щільнодотична площина є найближчою – в метричному сенсі, за *порядком* малості – до кривої γ в досить малому околі точки P.

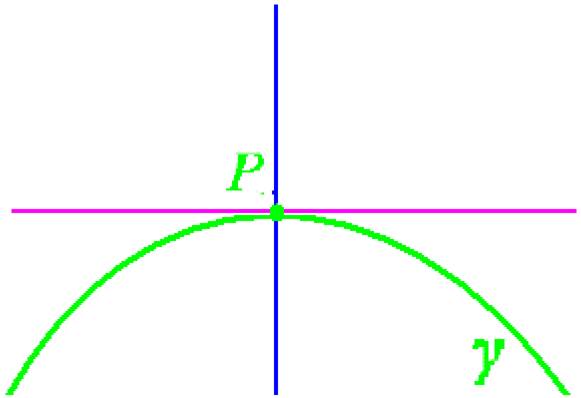
4. Нормальна пряма кривої в $\mathbb{R}2$

Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^2$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

Зафіксуємо точку P на кривій γ.

Пряма, що проходить через точку P ортогонально до дотичної прямої кривої γ в точці P, називається *нормальною прямою* кривої γ в точці P.



Задача. Аналогічно до рівняння дотичної прямої, запишіть рівняння нормальної прямої в термінах радіус-вектора кривої γ.

Задачі для практичного заняття і самостійної роботи

Питання 3.1.

1. Припустимо, що регулярна крива параметризована натуральним параметром t. Якщо уявляти параметрично задану криву як траєкторію точки, що рухається, чому дорівнює абсолютне значення швидкості, з якою рухається точка?

2. Якщо взяти на регулярній кривій γ довільну точку P, скільки існує різних дотичних прямих кривої γ в точці P?

3. Якщо взяти на регулярній кривій γ довільну точку P, скільки існує різних щільнодотичних площин кривої γ в точці P?

4. Якщо на регулярній кривій взяти довільну точку P і побудувати дотичну пряму в цій точці, чому дорівнює кут між кривою і її дотичною прямою в точці P?

Задача 3.2. Знайдіть точку перетину наступних параметрично заданих кривих в $\mathbb{R}^2$ та обчисліть кут між кривими:

$$\gamma_1: \begin{cases} x^1 = \cos t \\ x^2 = \sin t \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty), \quad \gamma_2: \begin{cases} x^1 = \sqrt{2} + \cos\sigma \\ x^2 = \sin\sigma \end{cases}, \ \sigma \in (-\infty, +\infty),$$

Задача 3.3. Знайдіть точку перетину наступних неявно заданих кривих в $\mathbb{R}^2$ та обчисліть кут між кривими:

$$\gamma_1: (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \qquad \gamma_2: (x^1 - \sqrt{2})^2 + (x^2)^2 - 1 = 0,$$

Задача 3.4. Розглянемо наступні параметрично задані криві в $\mathbb{R}^2$:

$$\gamma_1: \begin{cases} x^1 = a\cos t \\ x^2 = b\sin t \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty), \qquad \gamma_2: \begin{cases} x^1 = A\cosh t \\ x^2 = B\sinh t \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty),$$

За яких умов на додатні параметри a, b, A, B задані криві перетинаються взаємно ортогонально (під кутом $\frac{\pi}{2}$)?

Задача 3.5. Розглянемо наступні неявно задані криві в $\mathbb{R}^2$:

$$\gamma_1: \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad \gamma_2: \frac{(x^1)^2}{A^2} - \frac{(x^2)^2}{B^2} - 1 = 0,$$

За яких умов на додатні параметри a, b, A, B задані криві перетинаються взаємно ортогонально (під кутом $\frac{\pi}{2}$)?

Задача 3.6. Розглянемо параметрично задану криву в $\mathbb{R}^2$

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = \rho(t)\cos t \\ x^2 = \rho(t)\sin t \end{cases}, \quad t \in (a,b),$$

де $\rho(t)$ – деяка неперервно диференційована функція.

За яких умов на функцію $\rho(t)$ задана крива γ буде регулярною?

Підберіть функцію $\rho(t)$ так, щоб задана крива γ перетиналась з будь-яким променем, що виходить з початку координат O, під одним і тим же кутом α.

Задача 3.7. Для параметрично заданої кривої γ в $\mathbb{R}^3$ запишіть рівняння щільнодотичної площини в заданій точці P:

$$\gamma:\begin{cases} x^1 = \cos t \\ x^2 = \sin t\;, \quad t \in (-\infty,+\infty), \\ x^3 = ht \end{cases} \qquad P(t=\pi).$$

Задача 3.8. Перевірте, що для параметрично заданої гвинтової лінії γ в $\mathbb{R}^3$

$$\gamma:\begin{cases} x^1 = \cos t \\ x^2 = \sin t\;, \quad t \in (-\infty,+\infty), \\ x^3 = ht \end{cases}$$

щільнодотичні площини в усіх точках кривої нахилені однаково по відношенню до вертикального координатного напрямку x^3.

Обчисліть величину кута між щільнодотичною площиною кривої в довільній точці та координатною віссю x^3.

Задача 3.9. Для параметрично заданої кривої γ в $\mathbb{R}^4$ запишіть рівняння щільнодотичної площини в заданій точці P:

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = a\cos\alpha t \\ x^2 = a\sin\alpha t \\ x^3 = b\cos\beta t \\ x^4 = b\sin\beta t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty), \qquad P(t=0).$$

* Обчисліть величину кута між щільнодотичною площиною кривої γ в довільній точці та координатними осями.

Задача 3.10. Доведіть, що якщо регулярна (класу C^2) крива γ в $I\!R^n$ параметризована натуральним параметром, $\vec{x} = \vec{f}(s)$, то тоді

1) вектори $\dfrac{d\vec{f}}{ds}$, $\dfrac{d^2\vec{f}}{ds^2}$ взаємно ортогональні, тобто, $< \dfrac{d\vec{f}}{ds}, \dfrac{d^2\vec{f}}{ds^2} > \equiv 0$,

2) вектори $\dfrac{d\vec{f}}{ds}$, $\dfrac{d^2\vec{f}}{ds^2}$ лінійно незалежні $\Leftrightarrow \left| \dfrac{d^2\vec{f}}{ds^2} \right| \neq 0$.

Задача 3.11. Доведіть (або спростуйте), що якщо у регулярної (класу C^2) кривої γ в $I\!R^3$ усі щільнодотичні площини паралельні фіксованій площині П, то тоді уся крива γ належить якійсь площині, паралельній площині П.