Отже $F: S^3 \to S^2$. Знайдемо його локальне задання!

$S^3 \subset \mathbb{C}^2 : \{\xi \mid |\xi^1|^2 + |\xi^2|^2 = 1\}$. Нехай

$|\xi^1| = \cos\alpha \Rightarrow \xi^1 = \cos\alpha\, e^{i\beta}$

$|\xi^2| = \sin\alpha \Rightarrow \xi^2 = \sin\alpha\, e^{i\gamma}$

Тобто (α, β, γ) – лок. коорд. S^3 (Впр. на якій підмножині?)

і під дією лок. задання F

$(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \frac{\xi_1}{\xi_2} = ctg\,\alpha\, e^{i(\beta-\gamma)} \Leftrightarrow (ctg\,\alpha \cos(\beta-\gamma), ctg\,\alpha \sin(\beta-\gamma))$.

Впр. Перевірити, що це субмерсія, тобто що матриця Якобі має ранг 2. Для яких (α, β, γ) це працює? Як щодо інших точок!

def. $p \in M$ зветься критичною точкою $F \in C^k(M, N)$, якщо $rank_p F < \dim N$ (тобто F – не субмерсія в p). У цьому випадку точка $F(p)$ зветься критичним значенням F; інші точки $F(M) \subset N$ звуться регулярними значеннями F.

Ex. Для $f \in C^k(M) = C^k(M, \mathbb{R})$ $\dim \mathbb{R} = 1$, тобто

p критична $\Leftrightarrow d_p f = 0$. У лок. координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ в околі p це означає $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$.

Сл. Якщо p – точка локального мінімуму або максимуму f (зокрема, глобального), то p – критична точка f.

Rem. Лок. min: $\exists$ відкр. $U \ni p$: $\forall q \in U \quad f(q) \geq f(p)$

Глоб. min: $\forall q \in M \quad f(q) \geq f(p)$

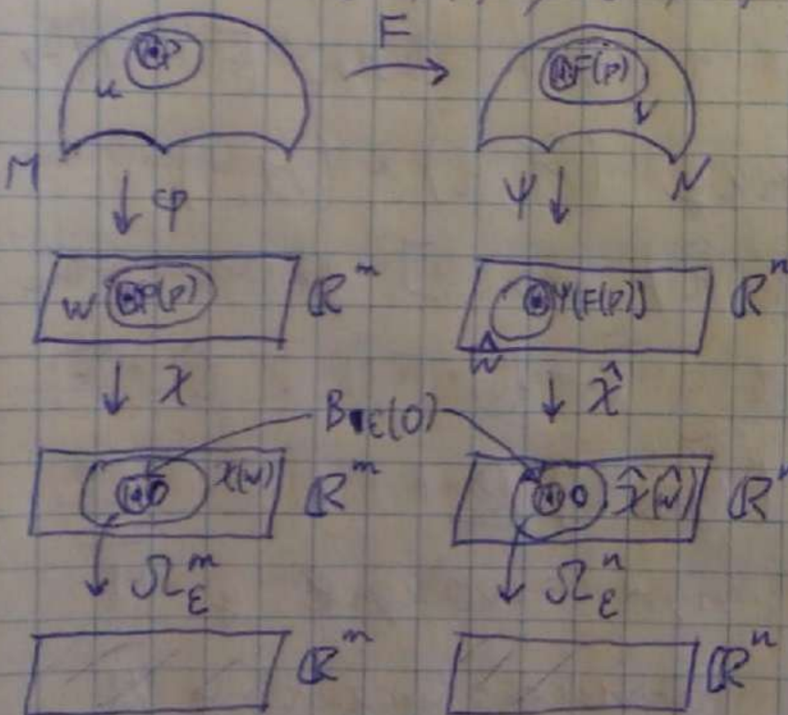
Ан-но max.

▷ Очевидно, якщо p – точка лок. $\underbrace{\text{екстремуму}}_{\text{(мінімуму або максимуму)}}$ f, то $\forall$ карти (U, φ) в околі p $\varphi(p)$ – точка лок. екстремуму її лок. задання $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, тому, згідно з відомим фактом з аналізу, для відп. лок. координат $(x^1, \ldots, x^n)$ $\forall i = \overline{1,n}$ $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) = 0$. ◁

Rem. Як побачимо далі, дослідження критичних точок ф-ції за допомогою 2-х похідних (гессіану) також є і на многовидах.

<u>Rem.</u> Переформулюємо теорему про ранг для многовидів у загальному вигляді (з цього випливають, зокрема, випадки лок. диф-зму, субмерсій, а також занурення нижче).

Нехай M, N – k-гл. многовиди, $k \geq 1$, $\dim M = m$, $\dim N = n$, $F \in C^k(M, N)$ і $\operatorname{rank} d_pF = \operatorname{rank}_p F = l$ $(\leq m, n)$. Оберемо карти (U, φ), (V, ψ) : $p \in U$, $F(p) \in V$. Лок. задання F



$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \underset{\underset{\mathbb{R}^m}{\cap} \text{ відкр.}}{\varphi(U \cap F^{-1}(V))} \to \mathbb{R}^n$$ –

k-гладке і має ранг l в $\varphi(p)$ (бо згідно з ланцюговим правилом $d_{\varphi(p)}(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) = d_{F(p)}\psi \circ d_pF \circ d_{\varphi(p)}\varphi^{-1}$, а ψ і φ^{-1} k-дифеоморфізми, тому мають так ранг – n і m відповідно). Отже, згідно з <u>Th.</u> про ранг:

$\exists$ відкр. $W \ni \overbrace{\varphi(p)}^{\{W \subset \varphi(U \cap F^{-1}(V))\}}$, $\hat{W} \ni \psi(F(p))$ і k-дифеоморфізми
$\chi: W \to \chi(W)$, $\hat{\chi}: \hat{W} \to \hat{\chi}(\hat{W})$ на відкриті підмножини
$\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{R}^n$ відповідно такі, що відображення
$\hat{\chi} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \circ \chi^{-1}: \chi(W) \to \hat{\chi}(\hat{W})$
має вигляд $(x^1, .., x^m) \mapsto (x^1, .., x^\ell, 0, .., 0)$. Можемо,
не зменшуючи загальність, вважати, що $\chi(\varphi(p)) = 0$ і $\hat{\chi}(\psi(F(p))) = 0$ (просто доповнимо χ і $\hat{\chi}$ зсувами за необхідності).
Відкр. $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$: $B^m_\varepsilon(0) \subset \chi(W)$, $B^n_\varepsilon(0) \subset \hat{\chi}(\hat{W})$ (відкриті $\underbrace{\text{евкл. кулі}}_{\text{відповідної вимірності}}$) Очевидно, $\hat{\chi} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \circ \chi^{-1}(B^m_\varepsilon(0)) \subset B^n_\varepsilon(0)$. Нарешті,
побудуємо стандартний ∞-дифео-зм з відкр. кулі $\mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}^m$:

$$\Omega^m_\varepsilon: B^m_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}^m: \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 0; \\ tg\left(\frac{|x|}{\varepsilon} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{x}{|x|}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Тоді $(\varphi^{-1}(\chi^{-1}(B^m_\varepsilon(0))), \Omega^m_\varepsilon \circ \chi \circ \varphi)$ і $(\psi^{-1}(\hat{\chi}^{-1}(B^n_\varepsilon(0))), \Omega^n_\varepsilon \circ \hat{\chi} \circ \psi)$ - карти M і N в околах p і $F(p)$ відп., і лок. задання F:

$$\Omega^n_\varepsilon \circ \hat{\chi} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \circ \chi^{-1} \circ (\Omega^m_\varepsilon)^{-1}: (x^1, .., x^m) \mapsto (x^1, .., x^\ell, 0, .., 0).$$

(Вар. перевірити акуратно)

Т.ч., ми показали наступне (після заміни позначень):

Th. (формулювання теореми про ранг для відображень гл. многовидів). Нехай M, N - k-гл. многовиди, $k \geq 1$, $\dim M = m$, $\dim N = n$, $F \in C^k(M, N)$ і $\operatorname{rank}_p F = l \ (\leq m, n)$ для деякої $p \in M$. Тоді $\exists$ карти (U, φ), (V, ψ) мн. M і N відп.: $p \in U$, $F(p) \in V$ і лок. задання F має вигляд

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^l, 0, \dots, 0).$$

Занурення і вкладення

<u>def.</u> Відображення $\varphi \in C^k(M, N)$ (де M, N — k-гладкі многовиди, $k \geq 1$) зветься зануренням (іммерсією) у $p \in M$, якщо $\operatorname{rank}_p \varphi = \dim M$; φ зветься зануренням, якщо це занурення $\forall\, p \in M$.

<u>Rem.</u> φ — занурення в $p \iff \operatorname{rank} d_p\varphi = \dim M = \dim T_pM$ $\iff d_p\varphi$ — ін'є $\Rightarrow \dim M \leq \dim N$.

<u>Rem.</u> Ан-но до лок. диф-зму (це частковий випадок) і субмерсії, з <u>Th.</u> про ранг випливає (див. <u>Rem.</u> вище, [redacted]):

<u>Cor.</u> Якщо φ — занурення в p, то $\exists$ карти (U, ϕ) і (V, ψ): $p \in U$, $\varphi(p) \in V$, і локальне задання

$$\psi \circ \varphi \circ \phi^{-1} : (u^1, \dots, u^n) \mapsto (u^1, \dots, u^n, 0, \dots, 0)$$

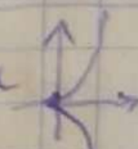
<u>Rem.</u> Вірне й обернене.

<u>Ex. 1.</u> Лок. дифео-зм.

<u>2.</u> Гладкі криві $\gamma \in C^k((a, b), M)$: γ — занурення в t

$\Leftrightarrow$ rank $d_t\gamma = \dim(a,b) = 1 \Leftrightarrow d_t\gamma \neq 0 \Leftrightarrow \gamma'(t) \neq 0$,

тобто γ регулярна в t.

~~Найб~~ Кубічна парабола 

$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2, t^3)$ — нерегулярна в $t=0$

3. Згадаємо про підмноговиди в $\mathbb{R}^{n+q}$: $\varphi \in C^k(M, \mathbb{R}^{n+q})$.

Умова $\forall\, p \in M$ $\operatorname{rank}_p \varphi = \dim M = n \Leftrightarrow \forall p$ $d_p\varphi$ — ін'є $\Leftrightarrow \forall p$ $\forall$ лок. коорд. $(u^1, \dots, u^n)$ в околі p $d_p\varphi$ переводить базис $\left\{\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n}\right\}$ простору T_pM у лінійно незалежну систему $\left\{\varphi_{u^i}(p) = d_p\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)\right\}_{i=1}^n$ в $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^{n+q} \Leftrightarrow \mathbb{R}^{n+q}$

це і є введена раніше умова регулярності (звичайно, вона також $\Leftrightarrow$ рівності n рангу м-ці Якобі лок. задання φ $\forall p$ і $\forall$ лок. координат).

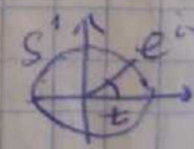
def. $\varphi \in C^k(M, N)$ зветься вкладенням, якщо φ — занурення і топологічне вкладення, тобто $\varphi: M \to \varphi(M)$ — гомеоморфізм, де $\varphi(M)$ — з індукованою з N топологією.

Rem. Якщо φ – вкладення, то на $\varphi(M)$ з індукованою топологією можна перенести гл. структуру з M за допомогою гомеоморфізма $\varphi: M \to \varphi(M)$. А саме, нехай $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ – атлас з k-гл. стр. M. Тоді $\varphi(\mathcal{A}) := \{(\varphi(U_\alpha), \Phi_\alpha \circ \varphi^{-1})\}_{\alpha \in A}$ задовольняє def. k-гл. атласу $\varphi(M)$ ($\varphi(U_\alpha)$ відкр., бо φ – гомео-зм і утворюють покриття $\varphi(M)$, бо U_α утв. покриття M і φ – біє; $\Phi_\alpha \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\alpha) \to \mathbb{R}^n$ – гомео-зми як комп. гомео-змів; $\varphi(M)$ тоді задов. def. n ($= \dim M$) – вим. многовиду (($\varphi(M)$ – хаусд. і з $\exists$ зл. базою, бо M таке, а топ. індукована), а $\varphi(\mathcal{A})$ – його атласу; відобр. переходу $\Phi_\beta \circ \varphi^{-1} \circ (\Phi_\alpha \circ \varphi^{-1})^{-1} = \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}$ – ті ж, що у $\mathcal{A}$, тому k-гладкі), і $\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \Rightarrow \varphi(\mathcal{A}) \sim \varphi(\mathcal{B})$ (аналогічні міркування), тому однозначно визначена k-гл. структура на $\varphi(M)$. При цьому у картах (U_α, Φ_α), $(\varphi(U_\alpha), \Phi_\alpha \circ \varphi^{-1})$ лок.

задання φ буде $(\Phi_\alpha \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \circ \Phi_\alpha^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$, тому φ – дифеоморфізм. Так переносити структуру можна $\forall$ гомео-зма $g: M \to L$ (і взагалі $\forall$ біу, але тоді треба переносити і топологію). З урахуванням цієї конструкції можна казати, що φ – дифеоморфізм на $\varphi(M)$.

<u>Ex. 1.</u> Звісно, φ – вкладення $\Rightarrow$ φ – ін'у, тому неін'єкт. занурення – не вкладення. Наприклад:

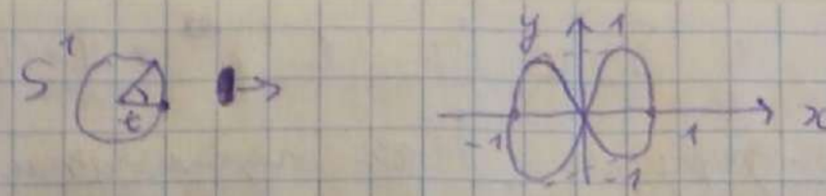
$$\gamma: S^1 \to \mathbb{R}^2: \gamma(t) = (\cos t, \sin 2t), \quad t \in [0, 2\pi)$$

(це замкнена крива, тобто гладке (тут ∞) відобр. S^1 у многовид; взагалі S^1 і $\mathbb{R}$ вичерпують зв'язні 1-вимірні многовиди з точністю до дифео-зма у $\forall$ гладкості включно з 0; t можна розуміти як коорд.: 

)

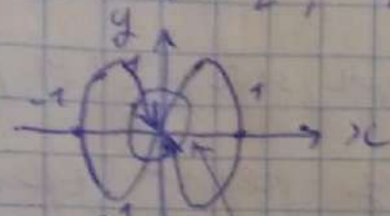
$\gamma'(t) = (-\sin t, 2\cos 2t) \neq 0 \ \forall t$, тому це занурення (рег. крива). $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0,0) = \gamma(\frac{3\pi}{2})$, тому вона не ін'у $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ не вкладення



<u>2.</u> Модифікуємо попередній приклад:

$\gamma : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^2$: $\gamma(t) = (\cos t, \sin 2t)$.



Ан-но, це занурення; крім того, γ - ін'єк.

Але це не вкладення: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ не гомеоморфне $\gamma\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right)$ з індук. топ. (і тим більше γ - не гомеоморфізм):

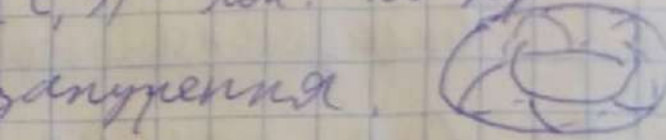
$\boxed{\text{або можна перевірити, що } \gamma \text{ переводить окіл } \left(\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon, \tfrac{\pi}{2}+\varepsilon\right) \text{ у множину, що не відкр. у індук. топ.} \Rightarrow \gamma \text{ - не відкрите.}}$

- $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ - не компакт, образ - компакт.
- образ - взагалі не (1-вимірний) многовид, бо у $(0,0)$ немає околу, що гомеоморфний $\mathbb{R}$: .

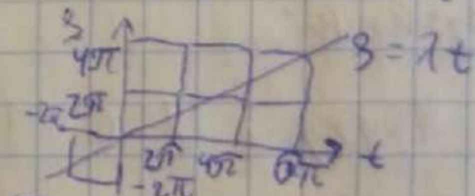
<u>3.</u> Обмотки тора $\gamma : \mathbb{R} \to T^2$:

$\gamma(t) = (e^{it}, e^{i\lambda t})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (тут $T^2 = S^1 \times S^1$ записуємо як пару чисел з $\mathbb{C}$ з модулем 1).

Локально $\gamma(t) = (t, \lambda t)$ (бо (t, s) - лок. коорд. $(e^{it}, e^{is}) \in T^2$) тому $\gamma' \neq 0$ - це занурення.



- Якщо $\lambda \in \mathbb{Q}$, крива замикається: $\gamma(t) = \gamma(t + 2\pi q)$ де $\lambda = \frac{p}{q}$, і $\gamma(\mathbb{R}) = \tilde{\gamma}(S^1)$, де $\tilde{\gamma} : S^1 \to T^2$ - вкладення (Впр, див. також наступне Рч.)
- Якщо $\lambda \notin \mathbb{Q}$, то γ - ін'єкт. (Впр.), але не вкладення, бо $\gamma(\mathbb{R})$ з індук. топологією - не 1-вимірний многовид, тому $\mathbb{R} \not\cong \gamma(\mathbb{R})$: $\forall t \in \mathbb{R}$ у $\gamma(t)$ $\nexists$ околу, гомеоморфного $\mathbb{R}$ (бо $\forall$ відкр. у T^2 $U \ni \gamma(t)$ U містить нескінченну кількість "шматків" - Впр.) При цьому $\overline{\gamma(\mathbb{R})} = T^2$



Підняття γ у накриття $\mathbb{R}^2$ тору T^2

(або можна безпосередньо перевірити, що γ - не відкр. бо $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ не перех. у відкр.).
Зауважимо, що на $\gamma(\mathbb{R})$ можна перенести топологію і стр. ∞-гл. многовида з $\mathbb{R}$, але γ все одно не буде вкладенням, бо топологія - не індукована.

<u>Рч.</u> Якщо M - компакт і $\varphi \in C^k(M, N)$ - ін'єкт. занурення,

то φ - вкладення.

▶ Ми вже знаємо, що $\varphi: M \to \varphi(M)$ - біє і неперервне. Залишилося перевірити, що φ^{-1} - неперервне $\Leftrightarrow$ φ - відкрите:

$\forall$ відкр. $U \subset M$ $M \setminus U$ замкнена $\Rightarrow$ [M - компакт] $\Rightarrow$ $M \setminus U$ - компакт $\Rightarrow$ [φ неперервне] $\Rightarrow$ $\varphi(M) \setminus \varphi(U) = \varphi(M \setminus U)$ - компакт $\Rightarrow$ [N хаусдорфовий $\Rightarrow$ $\varphi(M)$ хаусд.] $\Rightarrow$ $\varphi(M) \setminus \varphi(U)$ замкнена $\Rightarrow$ $\varphi(U)$ відкрита в $\varphi(M)$. ◭

Означення підмноговиду

<u>def. 1.</u> Нехай $\overline{M}$ - k-гладкий многовид ($k \geq 1$). (k-гладким зануреним) підмноговидом у $\overline{M}$ будемо називати пару (M, φ), де M - k-гладкий многовид, а $\varphi \in C^k(M, \overline{M})$ - занурення. Якщо φ - вкладення, (M, φ) зветься вкладеним.

<u>def.</u> Два $^{(k\text{-гл.})}$ підмноговиди (M, φ) і $(\tilde{M}, \tilde{\varphi})$ в $\overline{M}$ звуться

еквівалентними, якщо $\exists$ k-дифеоморфізм $F: M \to \tilde{M}$:

$\varphi = \tilde{\varphi} \circ F$.

Rem Це узагальнення поняття еквівалентності кривих (там F - це строго монотонні гладкі ф-ції на проміжках) $\dot{F}' \neq 0$

Pr Це відношення еквівалентності

▷ 1. $\forall$ підмн. (M, φ) : $(M, \varphi) \underset{\text{дифео-зм}}{\sim} (M, \varphi)$, $F := id_M$.

2. Якщо $(M, \varphi) \sim (\tilde{M}, \tilde{\varphi})$, то $\exists F : \varphi = \tilde{\varphi} \circ F$. Тоді $F^{-1} : \tilde{M} \to M$ - також дифео-зм, і $\tilde{\varphi} = \varphi \circ F^{-1}$, тому $(\tilde{M}, \tilde{\varphi}) \sim (M, \varphi)$.

3. Якщо $(M, \varphi) \sim (\tilde{M}, \tilde{\varphi})$, $(\tilde{M}, \tilde{\varphi}) \sim (\tilde{\tilde{M}}, \tilde{\tilde{\varphi}})$, то $\exists$ дифео-зми F, G : $\varphi = \tilde{\varphi} \circ F$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\tilde{\varphi}} \circ G$ $\Rightarrow$ $\varphi = \tilde{\tilde{\varphi}} \circ (G \circ F)$ і $G \circ F : M \to \tilde{\tilde{M}}$ - дифео-зм, отже $(M, \varphi) \sim (\tilde{\tilde{M}}, \tilde{\tilde{\varphi}})$ ◭

def Клас еквівалентності k-м. підмноговидів у $\overline{M}$ зветься непараметризованим k-м. підмноговидом у $\overline{M}$.

Rem З def. усі екв. підмноговиди мають один образ (носій):

$\varphi(M) = \tilde{\varphi}(F(M)) = \tilde{\varphi}(\tilde{M})$.

При цьому r-ію $\Leftrightarrow$ $\tilde{r}$-ію. Більш того, для вкладень:

Рм.1. Якщо $(M, r) \sim (\tilde{M}, \tilde{r})$ і один з підмноговидів вкладений, то й інший також.

2. Для вкладених $(M, r), (\tilde{M}, \tilde{r})$ $\quad r(M) = \tilde{r}(\tilde{M}) \Leftrightarrow (M, r) \sim (\tilde{M}, \tilde{r})$
(тут все C^k-гладке).

▷ 1. Якщо $r = \tilde{r} \circ F$ і $\tilde{r} : \tilde{M} \to \tilde{r}(\tilde{M})$ — гомео-зм, то й $r : M \to r(M) = \tilde{r}(\tilde{M})$ — гомео-зм як композиція гомео-змів. Ан-но для $\tilde{r} = r \circ F^{-1}$.

2. $\Leftarrow$ показали вище у загальному випадку.

$\Rightarrow$. Покладемо $F := \tilde{r}^{-1} \circ r : M \to \tilde{M}$, де $\tilde{r}^{-1}$ — обернене до обмеження $\tilde{r} : \tilde{M} \to \tilde{r}(\tilde{M}) = r(M)$. Оскільки за умовою (обмежені) r і $\tilde{r}$ — гомео-зми, то і F — гомео-зм. Доведемо його гладкість. Нехай $p \in M$ і $\tilde{p} = F(p) \in \tilde{M}$, тобто $r(p) = \tilde{r}(\tilde{p})$. Нехай $(U, \varphi), (V, \psi)$ — карти M і $\overline{M}$ в околах p і $r(p)$ відп. з лок. коорд. $(u^1, .., u^n)$ і $(x^1, ..., x^{n+q})$ відп.,

а $(\tilde U,\tilde\varphi)$ і $(\tilde V,\tilde\psi)$ – карти $\tilde M$ і $\tilde N$ в околах $\tilde p$ і
$\tilde\chi(\tilde p)=\chi(p)$ відп. З Th. про ранг: лок. задання $\tilde\chi$
має вигляд $\tilde\psi\circ\tilde\chi\circ\tilde\varphi^{-1}: (y^1,\dots,y^n)\mapsto(y^1,\dots,y^n,0,\dots,0)$.
Тоді у деякому околі p лок. задання F буде мати вигляд:
$\tilde\varphi\circ\tilde\chi^{-1}\circ\chi\circ\varphi^{-1}=(\tilde\varphi\circ\tilde\chi^{-1}\circ\tilde\psi^{-1})\circ(\tilde\psi\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ\chi\circ\varphi^{-1})$ – композиція
лок. задання χ, відобр. переходу і оберненого до лок. задання $\tilde\chi$:
$(u^1,\dots,u^n)\mapsto(x^1,\dots,x^{n+q})\mapsto(y^1,\dots,y^n,0,\dots,0)\mapsto(y^1,\dots,y^n)$;
оскільки кожне з цих відобр. k-гладке (останнє – ∞-гладке),
F – k-гладке в околі p. Ан-но перевіряємо гладкість
$F^{-1}=\chi^{-1}\circ\tilde\chi$. Отже F – дифео-зм і за побудовою $\chi=\tilde\chi\circ F$. ▲

Rem. У Ex.1 і 2 вище криві мають однакові образи, але
не еквівалентні, бо S^1 не гомеоморфне $(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$. Вони
обидві не вкладені. Або можна розглянути Ex.2. і таку ж $\tilde\gamma:(-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}^2$, γ і $\tilde\gamma$ – inj, але $\tilde\gamma^{-1}\circ\gamma$ – не неперервне.

Rem. Як бачили вище, для вкладеного (M,χ) на $\chi(M)$

переноситься з M стр. гладкого многовиду. Якщо ж φ — лише ін'єкція, то спочатку треба перенести на $\varphi(M)$ топологію: $V \subset \varphi(M)$ відкрита $\Leftrightarrow V = \varphi(U)$, U - відкр. в M, далі все аналогічно (Впр. перевірити, що це топологія, і що для атласа $\mathcal{A}$ з гл. стр. M $\varphi(\mathcal{A})$ задає стр. гл. многовида на цьому топ. просторі). Отже, у цьому випадку також можна вважати $\varphi(M)$ гл. многовидом, дифеоморфним M.

Впр. Якщо $(M, \varphi) \sim (\tilde{M}, \tilde{\varphi})$, де φ (і $\tilde{\varphi}$) - ін'єкції, то гладкі стр., побудовані на $\varphi(M) = \tilde{\varphi}(\tilde{M})$ за допомогою φ і $\tilde{\varphi}$, співпадають.

Це все мотивує альтернативне означення:

Озн.2. Нехай $\bar{M}$ - k-гл. многовид ($k \geq 1$). Його підмножина $M \subset \bar{M}$ зветься його k-гл. (занурений) підмноговидом, якщо:

– M має структуру k-гл. многовиду (відносно деякої топології на M).

– Формальне вкладення $i: M \to \overline{M} : p \mapsto p$ – $\underbrace{\text{запурення}}_{\text{k-гладке}}$.

Якщо при цьому i – вкладення, M зветься вкладеним.

Rem. i – (топологічне) вкладення $\Leftrightarrow$ топологія M – індукована з $\overline{M}$.

Ці означення еквівалентні у наступному сенсі:

Pr. Існує природна біекція між непараметризованими ін'єктивно занурениими (k-гладкими) підмноговидами у $\overline{M}$ у сенсі def. 1 і k-гладкими підмноговидами у $\overline{M}$ у сенсі def. 2, що зводиться:

$$[(M, \varphi)] \mapsto \varphi(M),$$

(клас екв-сті (M,φ))

де на $\varphi(M)$ вводиться топологія і гл. структура, що описані вище. При цьому вкладеним підмноговидам відповідають вкладені.

$\Rightarrow$ Отже, ми вже показали, що класу екв. $[(M,\varphi)]$

коректно ставиться у відп. $\varphi(M)$ з k-гл. стр. $\forall$ $\varphi(p) \in \varphi(M)$ обрано в околі $\varphi(p)$ карту з цієї структури вигляду $(\varphi(U), \phi \circ \varphi^{-1})$, де (U, ϕ) - карта M в околі p. Тоді для карти (V, ψ) в околі $\varphi(p) = i(\varphi(p)) \in \overline{M}$ лок. задання i

$$\psi \circ i \circ (\phi \circ \varphi^{-1})^{-1} = \psi \circ \varphi \circ \phi^{-1}$$

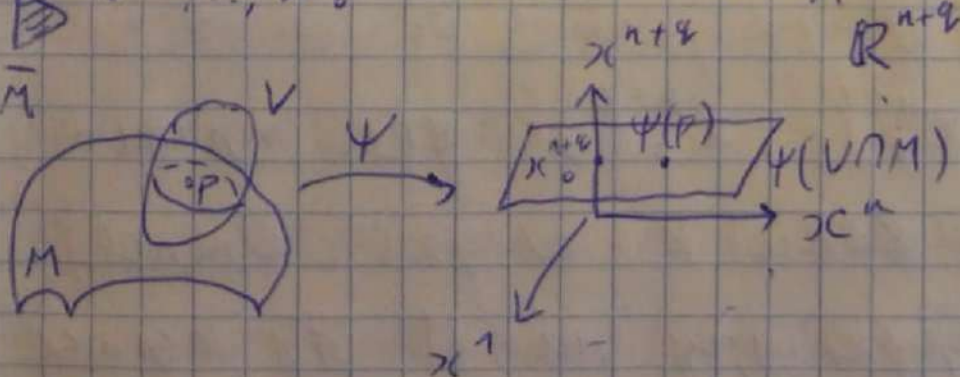
збігається з лок. заданням φ, тому i - k-гладке, і $\operatorname{rank}_{\varphi(p)} i = \operatorname{rank}_p \varphi = \dim M$. Отже, i - занурення. φ - вкладення => перенесена топ. з M співпадає на $\varphi(M)$ з індукованою => i - вкладення.

У навпаки, якщо $M \subset \overline{M}$ - підмноговид у $\overline{M}$ у сенсі <u>def. 2</u> (k-гл.), то $[(M, i)]$ - непараметризований k-гл. підмн. у $\overline{M}$ у сенсі <u>def. 1</u> (вкладений, якщо M вкл.), якому відповідає M під дією нашої бієкції. $\blacktriangle$

Rem. У невкладеному випадку $\varphi(M)$ з індукованою топ. може взагалі не бути многовидом: див. Ex.2 ("вісімка") і Ex.3 (ірраціональна обмотка тора).

Пр. Нехай $\overline{M}$ – $(n+q)$-вимірний k-гл. многовид $(k \geq 1)$. $M \subset \overline{M}$ є його n-вимірним k-гл. вкладеним підмноговидом $\Leftrightarrow \forall p \in M$ $\exists$ карта (V, ψ) мног. $\overline{M}$ така, що $p \in V$ і $\psi(V \cap M) = \{(x^1, \ldots, x^{n+q}) \in \mathbb{R}^{n+q} \mid x^{n+1} = x_0^{n+1}, \ldots, x^{n+q} = x_0^{n+q}\}$ (де $x_0^{n+1}, \ldots, x_0^{n+q} \in \mathbb{R}$ – постійні).

▷



$\Leftarrow$. Введемо на M індуковану базою топологію. Вона хаусд. і з ЗЗл. $\forall p \in M$ розглянемо карту (V, ψ) з умови. Тоді $V \cap M$ – відкритий окіл p в M. Побудуємо $\varphi: V \cap M \to \mathbb{R}^n$: $\varphi = ((\psi|_{V \cap M})^1, \ldots, (\psi|_{V \cap M})^n)$ (тобто обмежимо ψ на підпростір $\psi(V \cap M)$). Це гомеоморфізм як обмеження гомео-зм. Тобто $(V\cap M, \varphi)$ – карта M в околі p. Таким чином, M – n-вимірний многовид. Побудуємо атлас, взявши такі карти в околі кожної $p\in M$. Якщо $p\in V\cap\tilde V$, де (V,ψ), $(\tilde V,\tilde\psi)$ – карти $\bar M$ з умови з лок. коорд. $(x^1,..,x^{n+q})$ і $(\tilde x^1,..,\tilde x^{n+q})$ відп., то коорд ф-ції відобр. переходу $\tilde\varphi\circ\varphi^{-1}$ карт M $(V\cap M,\varphi)$, $(\tilde V\cap M,\tilde\varphi)$, що відповідають цим картам $\bar M$, мають вигляд для $i=\overline{1,n}$:

$$\tilde x^i(x^1,..,x^n) = \tilde x^i(x^1,..,x^n,x_0^{n+1},..,x_0^{n+q}),$$ де справа – коорд. ф-ції $\tilde\psi\circ\psi^{-1}$. Тому вони k-гладкі. Отже, цей атлас задає k-гл. структуру на M. В картах $(V\cap M,\varphi)$, (V,ψ) лок. задання $i: M\to\bar M$ має вигляд $(x^1,..,x^n)\mapsto(x^1,..,x^n,x_0^1,..,x_0^{n+q})$, отже i - занурення (має ранг n), і M - вкладений (в силу

вибору топології) підмноговид.

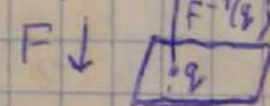
$\Rightarrow$ Застосуємо теорему про ранг: $\forall p \in M$ $\operatorname{rank}_p i = n$
$\Rightarrow$ $\exists$ карти (U, φ) і (V, ψ) мног. M і $\overline{M}$ відп. з
$p = i(p) \in U \cap V$ і лок. задання $\psi \circ \varphi^{-1} = \psi \circ i \circ \varphi^{-1}$:
$(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)$, тобто $\psi(V \cap M) = \{x \in B^{n+q} \mid$
$x^{n+1} = \ldots = x^{n+q} = 0\}$ $\blacktriangle$

Rem Формулювання цього Рч. також використовується для означення підмноговиду у сенсі def. 2. (але лише для вкладених).

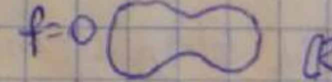
Th. (про прообраз регулярного значення) Нехай M, N - k-гл. многовиди $(k \geq 1)$, $F \in C^k(M, N)$, $q \in F(M)$ - регулярне значення F. Тоді $F^{-1}(q)$ - k-гладкий $(\dim M - \dim N)$-вимірний вкладений підмноговид у M.

Rem. Очевидно, $\dim M - \dim N \geq 0$, бо інакше всі значення F критичні. Якщо F − субмерсія, то $\forall q \in F(M)$ − рег. значення.

Ex. 1. Ортог. проектування $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$: прообрази − аф. підпростори.



2. Відобр. Хопфа $S^3 \to S^2$: прообрази − великі кола S^3 (шари у шаруванні Хопфа).



3. Якщо $f \in C^\infty(M)$ і $c \in \mathbb{R}$ − регулярне (тобто $\forall p \in f^{-1}(c)$ $d_p f \neq 0$), то $f^{-1}(c)$ − вкладений k-гл. підмноговид вимірності $\dim M - 1$ (гіперповерхня).

Це узагальнення класичної Тн. про неявну функцію.

▷ Отже, q − регулярне, тобто $\forall p \in F^{-1}(q)$ − не критична, тобто F − субмерсія в p. Тн. про ранг $\Rightarrow$ $\exists$ карти (U, φ) і (V, ψ) M і N відп.: $p \in U$, $q \in V$

і лок. задання $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$

(де $m = \dim M$, $n = \dim N$). Якщо $\psi(q) = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ –

коорд. q, з цього отримуємо, що

$$\varphi(U \cap F^{-1}(q)) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^1 = x_0^1, \dots, x^n = x_0^n\}.$$

Тоді з попереднього Рч. випливає, що $F^{-1}(q)$ – вклад.

к-гл. $(m-n)$-вимірний підмноговид. ▲

Rem Повернемося до def 1.: якщо (M, φ) – підмн. у $\overline{M}$,

то $\forall p \in M$ $d_p\varphi$ – лінійна ін'у, тобто $d_p\varphi : T_pM \to$

$d_p\varphi(T_pM) \subset T_{\varphi(p)}\overline{M}$ – лін. ізоморфізм. Крім того,

з $T_pM = \{\gamma'(t_0) \mid \gamma \in C^k((a,b), M), \gamma(t_0) = p\}$ і def диферен-

ціалу: $d_p\varphi(T_pM) = \{\underbrace{(\varphi \circ \gamma)'(t_0)}_{d_p\varphi(\gamma'(t_0))} \mid \gamma \in C^k((a,b), M), \gamma(t_0) = p\}$,

як $\underset{T_p(M,\varphi)}{\shortparallel}$ у частк. випадку $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+q}$ (коли ми вважаємо

$d_p\varphi(T_pM) \subset \mathbb{R}^{n+q} \leftrightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^{n+q}$). Іноді ототожнюють

важливо для $M \subset \overline{M}$

T_pM і $d_p\varphi(T_pM)$ (і p з $\varphi(p)$) і пишуть $T_pM \subset T_p\overline{M}$.