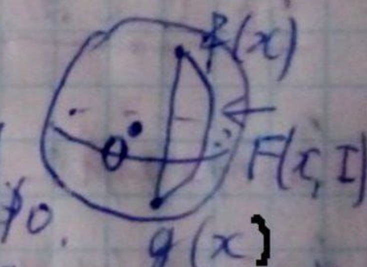
<u>30.13.</u> $f, g \in C(X, S^n)$, $|f(x)-g(x)|<2 \ \forall x \Rightarrow f \sim g$.

$$F(x,s) := \frac{(1-s)f(x)+sg(x)}{|(1-s)f(x)+sg(x)|} : X\times I \to S^n.$$ Коректно визначене, бо $(1-s)f(x) = -sg(x) \Leftrightarrow [\,|f(x)|=|g(x)|=1\,] \Leftrightarrow |1-s|=|-s| \Rightarrow$ $[\,s\in[0,1]\,] \Rightarrow 1-s=s \Rightarrow s=\frac{1}{2}$, тобто $\frac{1}{2} f(x) = -\frac{1}{2} g(x) \Rightarrow$ $|f(x)-g(x)| = 2|f(x)|=2$. Геометрично $|f(x)-g(x)|<2$ означає, що $f(x)$ і $g(x)$ — не діам. протилежні, а тоді $[f(x),g(x)] \not\ni 0$.



$F\in C(X\times I, S^n)$ (бо f, g непр.), $F(\cdot,0)=\frac{f}{|f|}=f$, $F(\cdot,1)=g$ — гомотопія

<u>30.14.</u> $f\in C(S^n,S^n)$, $f(x)\neq x \ \forall x\in S^n$. Тоді $f\sim g : x\mapsto -x$.

f і g задов. умовам <u>30.13.</u>: $f(x)\neq x = -g(x) \ \forall x$.

<u>30.K.</u> $f,g\in C(X, Y\times Z)$. $f\sim g \Leftrightarrow p_Y\circ f\sim p_Y\circ g$ і $p_Z\circ f\sim p_Z\circ g$.

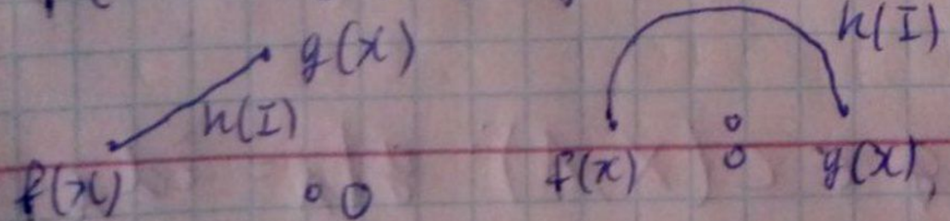
<u>$\Rightarrow$</u> — з <u>Lem. 2.1.</u> лекції: якщо $F\in C(X\times I, Y\times Z)$ — гомотопія f і g, то $p_Y\circ F$ — гом. $p_Y\circ f$ і $p_Y\circ g$, $p_Z\circ F$ — гом. $p_Z\circ f$ і $p_Z\circ g$.

<u>$\Leftarrow$</u> нехай $F_Y\in C(X\times I, Y)$, $F_Z\in C(X\times I, Z)$ — гом. $p_Y\circ f$ і $p_Y\circ g$, $p_Z\circ f$ і $p_Z\circ g$ відп. Тоді $F:(x,s)\mapsto (F_Y(x,s), F_Z(x,s))$ — гом. f і g. (див. <u>39.F.</u>)

30.7. Нехай $n > 1$, $f, g \in C(\{x\}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Тоді $f \sim g$.

Це знову Сл. 1.1 лекції: нехай шлях h сполучає:

$f(x)$ і $g(x)$ у $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ — це може бути відрізок

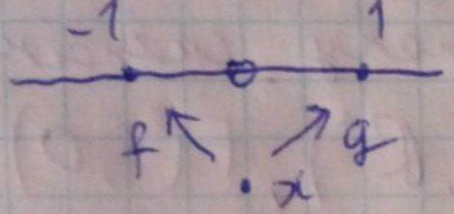


або дуга кола. Тоді $F(x,s) := h(s)$ — гомотопія постійних

f і g: непер., $F(x,0) = h(0) = f(x)$, $F(x,1) = h(1) = g(x)$.

30.8. $\exists$ $f, g \in C(\{x\}, \mathbb{R}\setminus\{0\})$: тоді $f \not\sim g$.

Знову ж, Сол. 1.1. $\Rightarrow$ треба обирати $f(x)$ і $g(x)$ у різних комп. лін. зв'язності. Скажімо, $f(x) = -1$, $g(x) = 1$.



Тоді нехай $\exists$ гомотопія $F \in C(\{x\} \times I, \mathbb{R}\setminus\{0\})$:

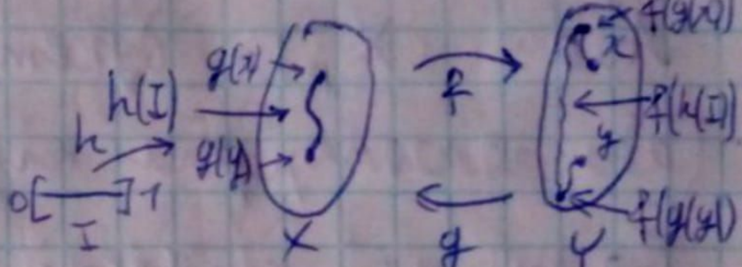
$F(x,0) = f(x) = -1$, $F(x,1) = g(x) = 1$. Тоді $h: s \mapsto F(x,s)$ – неперервне $I \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (шлях у $\mathbb{R}\setminus\{0\}$), $0 \mapsto -1$, $1 \mapsto 1$. I – зв'язний, але $h(I)$ – ні: $h(I) \cap \underset{u}{(-\infty,0)} \neq \varnothing$, $h(I) \cap \underset{v}{(0,+\infty)} \neq \varnothing$, $\underset{u}{(-\infty,0)} \cap \underset{v}{(0,+\infty)} = \varnothing$, $\underset{u}{(-\infty,0)} \cup \underset{v}{(0,+\infty)} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Це суперечить неперервності h. $\lightning$

39.2. (спрощений). X лінійно зв'язний, $X \sim Y \Rightarrow Y$ лін. зв'язний.

Отже, $\exists\, f \in C(X,Y),\ g \in C(Y,X):\ f \circ g \sim id_Y,\ g \circ f \sim id_X$.

Нехай $x, y \in Y$. X - лін. зв $\Rightarrow \exists$ шлях $h \in C(I, X):\ h(0) = g(x),\ h(1) = g(y)$. Тоді $f \circ h \in C(I, Y)$ - шлях, і $f \circ h(0) = f(g(x))$, $f \circ h(1) = f(g(y))$.

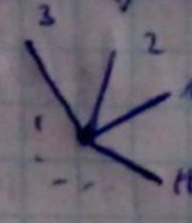


З іншого боку, $f \circ g \sim id_Y \Rightarrow f(g(x))$ і x, $f(g(y))$ і y можна з'єднати шляхами: якщо $F: Y \times I \to Y$ - відп. гомотопія, то $z \mapsto F(x,z)$, $z \mapsto F(y,z)$ - шляхи: $F(x,0) = f(g(x))$ і $F(x,1) = id_Y(x) = x$, і ан-но для y. $g \circ f \sim id_X$ не знадобилося.

394 Знайти нескінченну кількість ТП $\{X_\alpha\}$: $X_\alpha \sim X_\beta$ $\forall \alpha, \beta$, але $X_\alpha \not\cong X_\beta$ при $\alpha \neq \beta$.

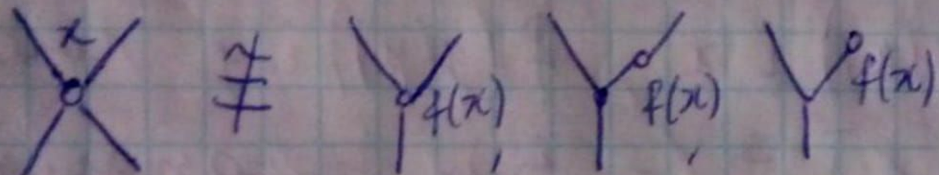
$\{\mathbb{R}^n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$: $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^0$ $\forall n$. Але ми поки вміємо доводити лише $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^0$ при $n \geq 2$ (і $\mathbb{R}^1 \not\cong \mathbb{R}^0$). Вірно і $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$ $\forall$ $n \neq m$.

Або: X_n – букет n відрізків, з'єднаних у кінці (або гомеоморфна підмножина $\mathbb{R}^2$):



Вони усі стягні (бо зірчасті), X_n

але $X_n \not\simeq X_m$ при $n \neq m$:



n зв. комп. $\qquad \le m$ зв. комп.

(для $n > m$) припустимо, що $\exists$ гомео-зм $f: X_n \to X_m$, тоді $X_n \setminus \{x\} \cong X_m \setminus \{f(x)\}$).

Впр. 2.1. з лекції:

$X \sim Y,\ Z \sim W \Rightarrow X \times Z \sim Y \times W$

Отже, $\exists\ f \in C(X,Y),\ g \in C(Y,X),\ h \in C(Z,W),\ k \in C(W,Z)$:

$f \circ g \sim id_Y,\ g \circ f \sim id_X,\ h \circ k \sim id_W,\ k \circ h \sim id_Z$. Тоді

$(f,h): X \times Z \to Y \times W: (x,z) \mapsto (f(x), h(z))$ і ан-но $(g,k): Y \times W \to X \times Z$

непер., і $(g,k) \circ (f,h) = (g \circ f, k \circ h) \sim$ [ан-но 3.9.F.] $\sim (id_X \times id_Z) = id_{X \times Z}$, $(f,h) \circ (g,k) \sim id_{Y \times W}$

38.E. (Впр. 2.2 лекції).

$A \subset X$ – ретракт ТП $X \Leftrightarrow \forall\ f \in C(A, Y)$ (Y – ТП)

$\exists\ \bar{f} \in C(X, Y): \bar{f}|_A = f$.

За def.: A – ретракт $X \Leftrightarrow \exists\ g \in C(X, A): g|_A = id_A$

(тобто $\forall\ x \in A\ \ g(x) = x$) – ретракція.

⇒. Нехай A – ретракт, $g : X \to A$ – відп. ретракція, $f \in C(X, Y)$. Тоді $\overline{f} := f \circ g \in C(X, Y)$ як комп. непер., $\forall x \in A \ \ \overline{f}(x) = f(g(x)) = f(x)$.

⇐. Застосуємо умову до тотожного $id_A : A \to A : x \mapsto x$. Тоді його продовження $g = \overline{id_A} \in C(X, A)$ – ретракція, бо $g|_A = id_A$ за умовою.

38. С і Д. $\{x, y\}$, $x \neq y$ – не ретракт $\mathbb{R}$; S^0 – не ретракт D^1.
(з дискр. топ.)

Ретракція $f : X \to A$ – сюр (бо $\forall x \in A \ \ x = f(x) \in f(X)$) і неперервне, тому X – зв'язний ⇒ A – зв'язний.

38.3. $[a, b]$ – ретракт $\mathbb{R}$.

$f : \mathbb{R} \to [a, b] : \ f(x) = \begin{cases} a, & x \leq a \\ x, & x \in [a, b] \\ b, & x \geq b \end{cases}$ – ретракція. Дійсно,
виразу

$f|_{[a,b]} = id$; відкриті в $[a, b]$ – це об'єднання проміжків $[a, c)$, $(c, d) \subset (a, b)$, $(d, b]$; $f^{-1}([a, c)) = (-\infty, c)$, $f^{-1}((c, d)) = (c, d)$, $f^{-1}((d, b]) = (d, +\infty)$ – відкр., отже, f – непер.

38.4. (a, b) – не ретракт $\mathbb{R}$. Нехай $\exists$ ретракція $f : \mathbb{R} \to (a, b)$. Тоді $\forall n \geq n_0$ $f\left(a + \frac{1}{n}\right) = a + \frac{1}{n}$ ⇒ [неперервність f] ⇒ $f(a) = a \notin (a, b)$ ↯. Або випливає з 38.6 (9/3).
[щоб $a + \frac{1}{n} \in (a, b)$]

39.F. A - деформаційний ретракт X, B - деформаційний ретракт Y => $A \times B$ - деф. ретракт $X \times Y$.

Якщо $f: X \to A$, $g: Y \to B$ - відп. ретракції, то (f,g): $X \times Y \to A \times B$ - неперервне ($\forall$ ел-та $U \times V \subset A \times B$ бази топ. $A \times B$ $(f,g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \times g^{-1}(V)$ - відкр. в $X \times Y$),

$\forall (x,y) \in A \times B$ $(f,g)(x,y) = (f(x), g(y)) = (x,y)$ => (f,g) - ретракція

За умовою, $f \sim id_X$, $g \sim id_Y$ => $(f,g) \sim (id_X, id_Y) = id_{X \times Y}$

ретр. деформаційний

(Якщо $F \in C(X \times I, X)$, $G \in C(Y \times I, Y)$ - відп. гомотопії, то $H: (x,y,s) \mapsto$
$\mapsto (F(x,s), G(y,s)) \in C(X \times Y \times I, X \times Y)$ непер., бо $H^{-1}(U \times V) =$
$= \{(x,y,s) \mid (x,s) \in F^{-1}(U), (y,s) \in G^{-1}(V)\} = \Phi(F^{-1}(U) \times Y) \cap (X \times G^{-1}(V))$
$\forall$ відкр. $U \subset X$, $V \subset Y$, де $\Phi: X \times I \times Y \to X \times Y \times I : (x,s,y) \mapsto (x,y,s)$ - гомеоморфізм. Тому $H^{-1}(U \times V)$ відкр. в $X \times Y \times I$.

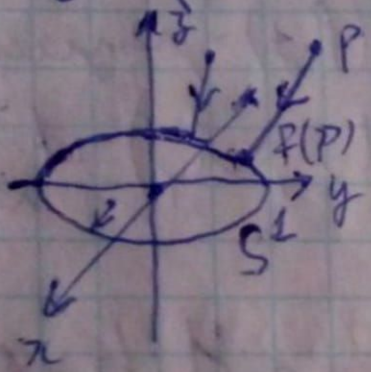
При цьому $H(x,y,0) = (F(x,0), G(x,0)) = (f(x), g(x)) = (f,g)(x)$

$H(x,y,1) = (F(x,1), G(x,1)) = (x,y)$.)

39.13(1) $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1 \sim S^1$.

Оскільки аф. перетворення - гомеоморфізми, можемо вважати без обмеження загальності, що $\mathbb{R}^1$ - це O_z :

$\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$.



Побудуємо деф. ретракцію на коло

$\{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1,\ z=0\} \cong S^1$:

$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right)$ - кор. визн., непер.,

$\forall (x,y,z) \in S^1$ $f(x,y,z) = (x,y,z)$ => ретракція.

$F: (P, s) \mapsto (1-s)f(P) + sP : \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1 \times I \to \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1$

кор. визначене (бо $x \neq 0 \Rightarrow (1-s)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + sx \neq 0\ \forall s \in I$ і ан-но для y), непер., $F(\cdot,0) = f$, $F(\cdot,1) = id_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1}$. Отже, f - деф. ретракція => $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1 \sim S^1$.