Rem. Для $f \in C^k(M)$ (і довільних лок. коорд. в околі $\gamma(t_0)=p$):

$\gamma'(t_0)(f) = (\gamma^i)'(t_0)\,\frac{\partial f}{\partial x^i}(\gamma(t_0))$ = [похідна композиції] =

$= ((f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\gamma))'(t_0) = (f\circ\gamma)'(t_0)$ (тут $f\circ\gamma : (a,b)\to\mathbb{R}$).

Pr. $T_pM = \{\gamma'(t_0) \mid \gamma \in C^k((a,b), M) : \gamma(t_0) = p\}$.

Rem. Пор. з описом $T_p(M,\psi)$ вище: вектору $\gamma'(t_0) \in T_pM$ відповідає $(\psi\circ\gamma)'(t_0) \in T_p(M,\psi)$.

▷ Тобто треба довести, що $\forall\, v \in T_pM$ має такий вигляд. Дійсно, нехай (U,φ) - карта в околі p з лок. коорд. $(x^1,\dots,x^n)$ і $v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. Покладемо $\gamma(t) := \varphi^{-1}(x_0^1 + v^1 t, \dots, x_0^n + v^n t)$, $\boxed{\gamma \in C^k(\mathbb{R}, M)}$

де $(x_0^1,\dots,x_0^n) = \varphi(p)$. Тоді $\gamma(0) = \varphi^{-1}(\varphi(p)) = p$, і $\gamma'(0) = v^i\frac{\partial}{\partial x^i} = v$ за означенням ($\gamma^i(t) = x_0^i + v^i t$). ◭

Rem. Зокрема, T_pM можна природнім чином ототожнити з множиною класів еквівалентності гладких кривах, що проходять через p: ми вважаємо $\gamma \sim \mu$, якщо $\gamma(t_0) = \mu(s_0) = p$ і $\forall f \in C^k(M)$ $(f \circ \gamma)'(t_0) = (f \circ \mu)'(s_0)$.

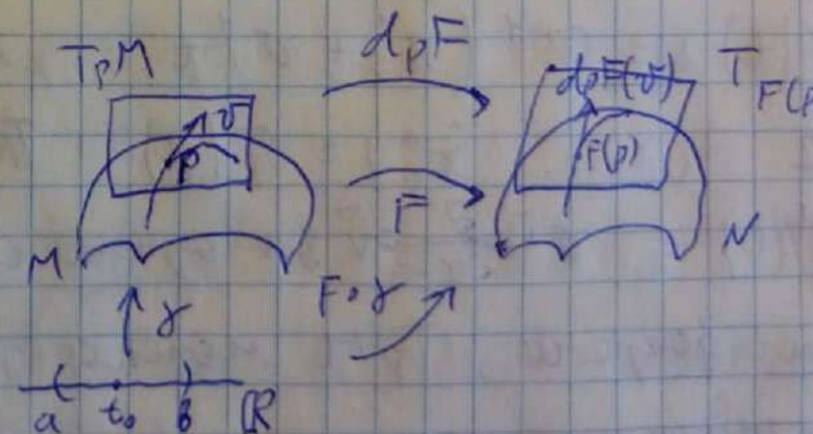
Тобто є 3 способи означення дотичного вектору: через лок. координати, через диференціювання і через криві.

<u>def.</u> Нехай M, N – k-гладкі, $F \in C^k(M, N)$, $k \geq 1$. Для $p \in M$ диференціал F у p $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ визначається наступним чином:

$\forall v \in T_pM$ нехай $v = \gamma'(t_0)$, де $\gamma \in C^k((a,b), M)$ з $\gamma(t_0) = p$.

Тоді

$$d_pF(v) := (F \circ \gamma)'(t_0)$$



<u>Rem.</u> γ існує в силу попер. Рч.

Rem. Нехай (U,φ) і (V,ψ) - карти з $p \in U$, $F(p) \in V$ (загална, $p \in U \cap F^{-1}(V) \neq \varnothing$) з лок. коорд. $(x^1,\dots,x^m)$ і $(y^1,\dots,y^n)$ відповідно, $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} = (F^1,\dots,F^n)$ - лок. задання F. Нехай $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. За умовою тоді $\forall i = \overline{1,n}$ $v^i = (\gamma^i)'(t_0)$, де $(\gamma^1,\dots,\gamma^m) = \varphi \circ \gamma$ - лок. задання γ. Тоді лок. задання $F \circ \gamma$: $\psi \circ F \circ \gamma = (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)$, тому

$$d_pF(v) = (F\circ\gamma)'(t_0) = ((F\circ\gamma)^a)'(t_0)\frac{\partial}{\partial y^a} = \frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p)\cdot(\gamma^i)'(t_0)\frac{\partial}{\partial y^a} =$$

$$= \frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p)\, v^i \frac{\partial}{\partial y^a}, \text{ де}$$

$$\frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})^a}{\partial x^i}(\varphi(p)),$$ і змінюється від 1 до m, а a - від 1 до n. Помітно, що цей вираз не залежить від γ, а оригінальне def. - від координат.

~~Тому~~ Крім того, він лінійний по v^i. Тому:

Соч. $d_pF: T_pM \to T_{F(p)}N$ коректно визначене, лінійне і у базисах $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$ і $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right\}$ цих просторів має матрицю $\left(\frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p)\right)_{\substack{a=\overline{1,n} \\ i=\overline{1,m}}}$ (м-ця Якобі лок. задання F).

Rem. Пор. з означенням диференціала відобр. між множинами $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{R}^n$ (при цьому для відкритої $U \subset \mathbb{R}^m$ $T_pU \leftrightarrow \mathbb{R}^m$).

Pr. (правило диференціювання композиції, ланцюгове правило)
Для $F \in C^k(M,N)$, $G \in C^k(L,M)$, $\forall p \in L$

$$d_p(F \circ G) = d_{G(p)}F \circ d_pG.$$

▷ $\forall v \in T_pL: v = \gamma'(t_0)$, $\gamma \in C^k((a,b),L)$, $\gamma(t_0) = p$:

$$(d_p(F \circ G))(v) = ((F \circ G) \circ \gamma)'(t_0) = (F \circ (G \circ \gamma))'(t_0) =$$
$$= \left(d_{(G\circ\gamma)(t_0)}F\right)\left((G \circ \gamma)'(t_0)\right) = \left(d_{G(p)}F\right)\left(d_pG(v)\right)$$ ◁

Впр. Як виглядає d_pF у термінах диференціювань? Тобто для $v \in T_pM$, $f \in C^k(N)$ $d_pF(v)(f) = ?$

Ex 1. Для кривої $\gamma \in C^k((a,b), M)$ і $t_0 \in (a,b)$:

$$d_{t_0}\gamma : \underset{\substack{\updownarrow \\ \mathbb{R}}}{T_{t_0}(a,b)} \to T_{\gamma(t_0)} M$$

Перший з цих просторів ототожнюємо з $\mathbb{R}$ як вище:

$v \leftrightarrow v \frac{\partial}{\partial t} = \mu'(0)$, де $\mu(t) = t_0 + vt$, $\mu(0) = t_0$.

Тоді $d_{t_0}\gamma(v) = (\gamma \circ \mu)'(0) = v \cdot \gamma'(t_0)$.

2. Для ф-цій $f \in C^k(M)$, $p \in M$:

$$d_p f : T_p M \to \underset{\substack{\updownarrow \\ \mathbb{R}}}{T_{f(p)} \mathbb{R}}$$

Тепер другий простір ототожнюємо з $\mathbb{R}$. В силу лінійності тоді $d_p f \in T_p M^*$ - лін. функціонал на $T_p M$.

Локально для $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ тоді $d_p f(v) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = v(f)$

3. Для к-ч $\varphi : M \to \mathbb{R}^N$, $p \in M$ знову ототожнюємо:

$$d_p \varphi : T_p M \to T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^N \leftrightarrow \mathbb{R}^N$$

Для лок. коорд. $(u^1, \dots, u^n)$ в околі P тоді $\forall i = \overline{1,n}$

$$d_P \varphi \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) = \frac{\partial x^a}{\partial u^i}(P) \frac{\partial}{\partial x^a} = \varphi_{u^i}(P) \quad \text{(при ототожненні)}$$

у позначеннях, що ми вводили вище. Тут вже необов'язково $N \geq n$ і необов'язково виконується умова регулярності, але в будь-якому разі

$$d_P \varphi (T_P M) = \operatorname{span} \{ \varphi_{u^i}(P) \}_{i=1}^{n}.$$

Якщо ж умова регулярності виконується, то справа буде $T_P(M, \varphi)$ і $d_P \varphi : T_P M \to T_P(M, \varphi)$ – лін. ізоморфізм, що встановлює описану вище відповідність. Зокрема, згідно з означенням, $\forall \gamma \in C^k((a,b), M)$ з $P = \gamma(t_0)$

$$d_P \varphi (\gamma'(t_0)) = (\varphi \circ \gamma)'(t_0).$$

Отже, всі $T_P(M, \varphi)$ для занурень $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+q}$ – це ізоморфні образи "абстрактного" дотичного простору $T_P M$.

Відображення максимального рангу

def. Рангом $F \in C^k(M, N)$ (де M, N - k-гладкі многовиди, $k \geq 1$) в $p \in M$ зветься ранг його диференціала:

$$\mathrm{rank}_p F := \mathrm{rank}\, d_p F$$

Th (про ранг)

Нехай $F \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, де $U \subset \mathbb{R}^m$ - відкрита і для $p \in U$ $\mathrm{rank}_p F = l$ $(\leq \min(m, n))$. Тоді $\exists$ відкриті $V \ni p$ $(V \subset U)$ і $W \ni F(p)$ і k-дифеоморфізми $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^m$, $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^n$ (на відкриті підмножини) такі, що

$$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^l, 0, \dots, 0).$$

$(\varphi(V) \to \psi(W))$

Rem Зокрема, при $m = n = l$ відображення $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$: $(x^1, \dots, x^n) \to (x^1, \dots, x^n)$ - тотожне, тобто $F = \psi^{-1} \circ \varphi : V \to W$ -

дифеоморфізм (теорема про обернене відображення).

▷ Див. курс аналіза ◁

<u>def.</u> Якщо для $F \in C^k(M,N)$ $\mathrm{rank}_p F = \dim M = \dim N$, то F зветься локальним дифеоморфізмом у p.

<u>Rem.</u> Нехай (U,φ), (V,ψ) – карти в околах p, $F(p)$ відповідно, тоді лок. задання F $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \in C^k(\varphi(U \cap F^{-1}(V)), \mathbb{R}^n)$ і, оскільки φ і ψ – дифеоморфізми, в силу ланцюгового правила $\mathrm{rank}_{\varphi(p)} \psi \circ F \circ \varphi^{-1} = \mathrm{rank}_p F$.

Якщо F – лок. дифео-зм у p, це дорівнює n $(= \dim M = \dim N)$. Застосуємо теорему про обернене відображення: $\exists$ відкр. околи $W \ni \varphi(p)$ і $\hat{W} \ni \psi(F(p))$: $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : W \to \hat{W}$ – дифеоморфізм. Отже, $F : \varphi^{-1}(W) \to \psi^{-1}(\hat{W})$ – дифео-зм, де $p \in \varphi^{-1}(W) \subset U$, $F(p) \in \psi^{-1}(\hat{W}) \subset V$. Перепозначимо:

відкриті

Сл. 1. Якщо F - лок. дифеоморфізм у p, то $\exists$ відкриті $U \ni p$, $V \ni F(p)$: $F : U \to V$ - дифеоморфізм.

Rem. Звичайно, для $\forall$ дифеоморфізма F $\forall$ точки p з його області визначення м-ця Якобі лок. задання F в околі p (що теж буде дифео-змом) має максимальний ранг, тому F - лок. дифео-зм у p. Зокрема, тому у Сл. 1 вірна і обернена імплікація. При цьому з того, що F k-гладке і лок. дифеоморфізм $\forall p \in M$ не випливає, взагалі кажучи, що F - дифеоморфізм

Ex. $\gamma : \mathbb{R} \to S^1$, $\gamma(t) = e^{it}$ (це ми ототожнюємо S^1 з множиною чисел модуля 1 в $\mathbb{C}$). Якщо параметризувати S^1 кутом, то локально $\gamma(t) = t$ (або $t + t_0$), тому $\gamma' \neq 0$ і γ - лок. дифеоморфізм $\forall t$. Але це не гомеоморфізм (і взагалі не бієкція) $\Rightarrow$ не дифеоморфізм.

(і між ними $\nexists$ дифео-зма, бо вони негомеоморфні).

Рч. Нехай $F \in C^k(M,N)$ - біц і $\forall p \in M$ F - лок. дифео-зм у p. Тоді F - дифеоморфізм.

$\triangleright$ $\forall q = F(p) \in N$ F - лок. дифео-зм у p. Згідно Сор. 1, тоді $F: U \to V$ - дифео-зм для відкр. $U \ni p$, $V \ni F(p)$, зокрема, $F^{-1}: V \to U$ - неперервне і k-гладке. Тоді і $F^{-1}: N \to M$ - неперервне і k-гладке (це локальні властивості). $\blacktriangle$

Rem. Можна використати саму теорему про ранг, а не її наслідок: F - лок. дифео-зм у p $\Rightarrow$ для карт (U,φ) і (V,ψ) у околах p і $F(p)$ відповідно $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ має максимальний ранг n у $\varphi(p)$ $\Rightarrow$ $\exists$ відкриті $W \ni \varphi(p)$ і $\hat{W} \ni \psi(F(p))$ і k-дифеоморфізми $\chi: W \to \chi(W)$ і $\hat{\chi}: \hat{W} \to \hat{\chi}(\hat{W})$ на відкр. підмножини $\mathbb{R}^n$ такі, що $\hat{\chi} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \circ \chi^{-1}$ має вигляд $(x^1, \ldots, x^n) \mapsto$

$(x^1, \dots, x^n)$. З відкритості випливає, що існує $\varepsilon > 0$ таке, що (евклідова) відкрита куля $B_\varepsilon(x) \subset x(w) = \hat{x}(\hat{w})$, де $x = x(\varphi(p)) = \hat{x}(\psi(F(p)))$. Розглянувши якийсь небудь стандартний C^∞-дифеоморфізм $\Omega : B_\varepsilon(x) \to \mathbb{R}^n$, отримаємо карти $(\varphi^{-1}(\underbrace{\quad}_{x^{-1}(B_\varepsilon(x))}), \Omega \circ x \circ \varphi)$ і $(\psi^{-1}(\underbrace{\quad}_{\hat{x}^{-1}(B_\varepsilon(x))}), \Omega \circ \hat{x} \circ \psi)$ в околах p і $F(p)$ відповідно, в яких локальне задання F: $\Omega \circ \hat{x} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \circ x^{-1} \circ \Omega^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$. Отже:

<u>Сл. 2.</u> Якщо F - лок. дифео-зм в p (зокрема, дифеоморфізм), то в околах точок p і $F(p)$ існують карти, в яких F задається тотожним відображенням (рівністю координат).

<u>def.</u> $F \in C^k(M, N)$ зветься субмерсією в $p \in M$, якщо $\operatorname{rank}_p F = \dim N$; F зветься субмерсією, якщо це субмерсія в $\forall\, p \in M$.

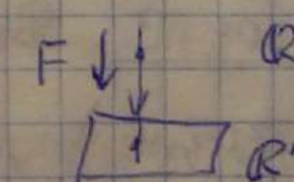
Rem. F - субмерсія в p $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} d_pF = \dim N = \dim T_{F(p)} N$
$\Leftrightarrow$ d_pF - сюр $\Rightarrow$ $\dim M \geq \dim N$

Rem. Ан-но до випадку лок. дифеоморфізма з Тл. (або див. Rem. нижче,) про ранг випливає (Впр.):

Cor. Якщо F - субмерсія у p, то $\exists$ карти (U, φ) і (V, ψ): $p \in U$, $F(p) \in V$ і локальне задання

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : (x^1, .., x^m) \mapsto (x^1, .., x^n).$$

$(m = \dim M,\ n = \dim N \leq m)$. Rem. Вірне і обернене.



Ex. 1. Лок. дифео-зм.

2. Ортогональне проектування $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $m \geq n$: для нього $(x^1, .., x^m) \mapsto (x^1, .., x^n)$ глобально.

3. Відображення Хопфа.

Аналогічно до $\mathbb{R}P^n$, n-вимірний комплексний проективний простір:

$$\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \big/ \mathbb{C}\setminus\{0\} = \{(\xi^1 : \dots : \xi^{n+1})\}$$

$$\begin{array}{c} \shortparallel \\ [(\xi^1, \dots, \xi^{n+1})] \\ \shortparallel \\ \{(\lambda\xi^1, \dots, \lambda\xi^{n+1}) \mid \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\} \end{array}$$

Або $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1} / S^1$, де $S^{2n+1} = \{(\xi^1, \dots, \xi^{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n} |\xi^i|^2 = 1\}$ і $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$. При цьому S^{2n+1} розбивається на великі кола, що не перетинаються. Канонічна проекція $F: S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n : (\xi^1, \dots, \xi^{n+1}) \mapsto (\xi^1 : \dots : \xi^{n+1})$ і зветься відображенням Хопфа. Це ∞-гладке відобр. і субмерсія.

Зокрема, при $n = 1$ отримуємо класичне відобр. Хопфа:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}P^1 = \{(\xi^1 : \xi^2)\} = & \{(\xi^1 : \xi^2) \mid \xi^2 \neq 0\} & \sqcup & \{(1 : 0)\} \\ & \updownarrow \; (\xi^1 : \xi^2) \mapsto \frac{\xi^1}{\xi^2} & & \shortparallel \\ & \mathbb{C} & & \infty \\ & \updownarrow & & \\ & \mathbb{R}^2 & & \end{array}$$

За допомогою стереографічної проекції будуємо дифеоморфізм $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ (сфера Рімана).

Отже $F: S^3 \to S^2$. Знайдемо його локальне задання!

$S^3 \subset \mathbb{C}^2 : \{\xi \mid |\xi^1|^2 + |\xi^2|^2 = 1\}$. Нехай

$|\xi^1| = \cos\alpha \Rightarrow \xi^1 = \cos\alpha\, e^{i\beta}$

$|\xi^2| = \sin\alpha \Rightarrow \xi^2 = \sin\alpha\, e^{i\gamma}$

Тобто (α, β, γ) – лок. коорд. S^3 (Впр. на якій підмножині?), і під дією лок. задання F

$(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \frac{\xi_1}{\xi_2} = \operatorname{ctg}\alpha\, e^{i(\beta-\gamma)} \Leftrightarrow (\operatorname{ctg}\alpha\cos(\beta-\gamma), \operatorname{ctg}\alpha\sin(\beta-\gamma))$.

Впр. Перевірити, що це субмерсія, тобто що матриця Якобі має ранг 2. Для яких (α, β, γ) це працює? Як щодо інших точок!

def. $p \in M$ зветься критичною точкою $F \in C^k(M, N)$, якщо $\operatorname{rank}_p F < \dim N$ (тобто F – не субмерсія в p). У цьому випадку точка $F(p)$ зветься критичним значенням F; інші точки $F(M) \subset N$ звуться регулярними значеннями F.

Ex. Для $f \in C^k(M) = C^k(M, \mathbb{R})$ $\dim \mathbb{R} = 1$, тобто