# 0. Домашнє завдання

**Задача 0.1.1.** Побудуйте неявно задану криву в $\mathbb{R}^2$,

$$(x^2 + y^2)^2 + 2ax\,(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0$$

перевірте її регулярність, знайдіть її особливі точки або доведіть їх відсутність

*Розв'язання.* Запишемо відповідну функцію $\Phi(x,y)$:

$$\Phi(x,y) = (x^2 + y^2)^2 + 2ax\,(x^2 + y^2) - a^2y^2$$

Ця функція є гладкою. Обчислимо її перші похідні:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 4\,x(x^2 + y^2) + 2a(x^2 + y^2) + 4ax^2$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 4\,y\,(x^2 + y^2) + 4axy - 2a^2y$$

Запишемо систему для знаходження особливих точок

$$\Phi = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0$$

Маємо

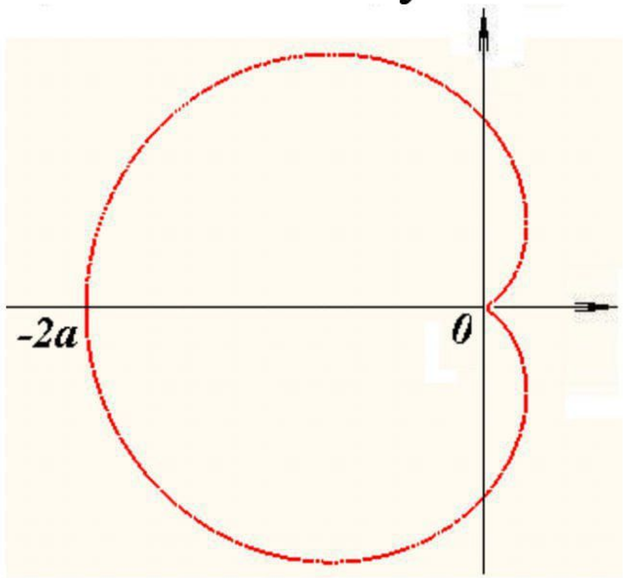
$$(x^2 + y^2)^2 + 2ax\,(x^2 + y^2) - a^2y^2,$$

$$4\,x(x^2 + y^2) + 2a(x^2 + y^2) + 4ax^2 = 0\ ,$$

$$4\,y\,(x^2 + y^2) + 4axy - 2a^2y = 0\ .$$

Ця система має єдиний розв’язок $x=0\ ,\ y=0$. Значить, неявно задана крива не є регулярною і має одну особливу точку $P(0,0)$.

Крива називається *кардіоїдою* і має наступний вигляд:



**Задача 0.2.** Побудуйте параметрично задану криву в $I\!R^2$ :

$$\begin{cases} x^1 = -2r\cos t\,(1+\cos t) \\ x^2 = 2r\sin t\,(1+\cos t) \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

перевірте її регулярність, знайдіть її особливі точки або доведіть їх відсутність. Проаналізуйте, як точка рухається по заданій кривій з плином часу *t*.

*Розв'язання.* Крива $\gamma$ є періодичною з періодом $2\pi$.

Проаналізуємо регулярність кривої $\gamma$. Запишемо радіус-вектор $\vec{x} = \vec{f}(t)$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r\cos t\,(1+\cos t) \\ 2r\sin t\,(1+\cos t) \end{pmatrix}.$$

Радіус-вектор є $C^\infty$-гладкою вектор-функцією.

Обчислимо похідну радіус-вектора :

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} 2r\sin t(1+2\cos t) \\ 2r\,(\cos t + \cos^2 t - \sin^2 t) \end{pmatrix}.$$

Прирівняємо похідну нулю:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} 2r\sin t(1+2\cos t) \\ 2r\,(\cos t + \cos^2 t - \sin^2 t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

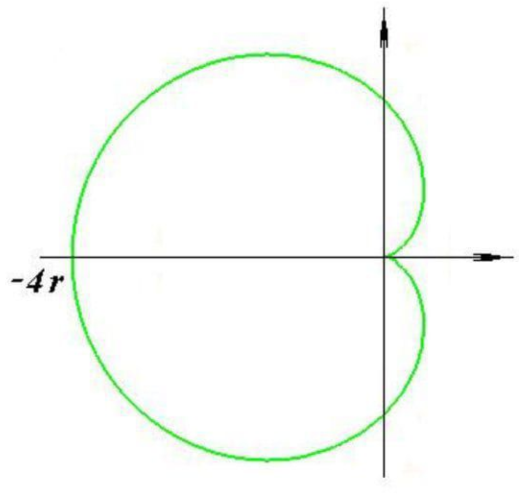
Маємо систему для знаходження сингулярних точок:

$$\begin{cases} 2r\sin t(1+2\cos t) = 0 \\ 2r\,(\cos t + \cos^2 t - \sin^2 t) = 0 \end{cases}$$

Розв'язок системи $t=\pi+2\pi m,\ m\in Z$. Цей розв'язок відповідає сингулярній точці $P$ на кардіоїді $\gamma$. Радіус-вектор цієї точки дорівнює:

$$\vec{x}_P = \vec{f}(\pi + 2\pi m) = \begin{pmatrix} -2r\cos\pi\,(1+\cos\pi) \\ 2r\sin\pi\,(1+\cos\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, кардіоїда $\gamma$ має єдину сингулярну точку $P(0,0)$.

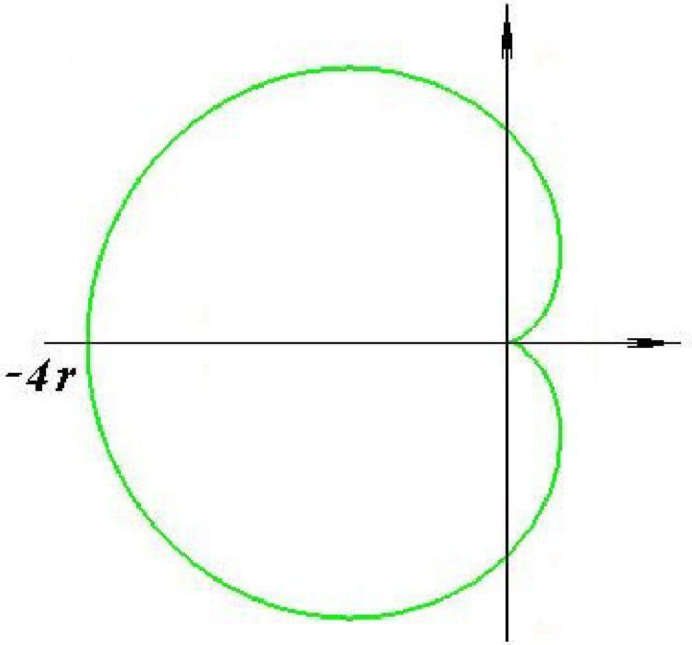


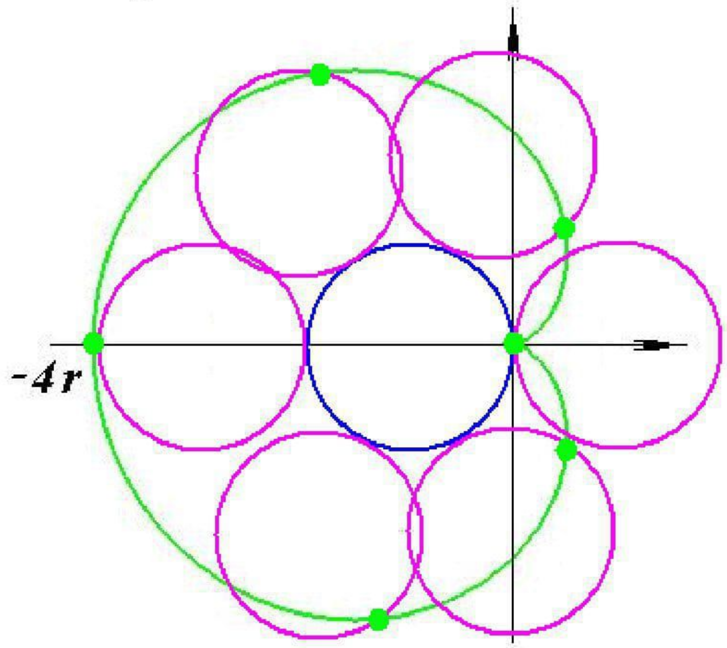
*Кардіоїда як траєкторія*

Уявімо, що коло $C_1$ радіусу $r$ котиться по іншому колу $C_2$ радіуса $r$.

Зафіксуємо на колі $C_1$ довільну точку $A$ і будемо відслідковувати її траєкторію під час вказаного руху.

Виявляється, що траєкторією буде[1] саме *кардіоїда*



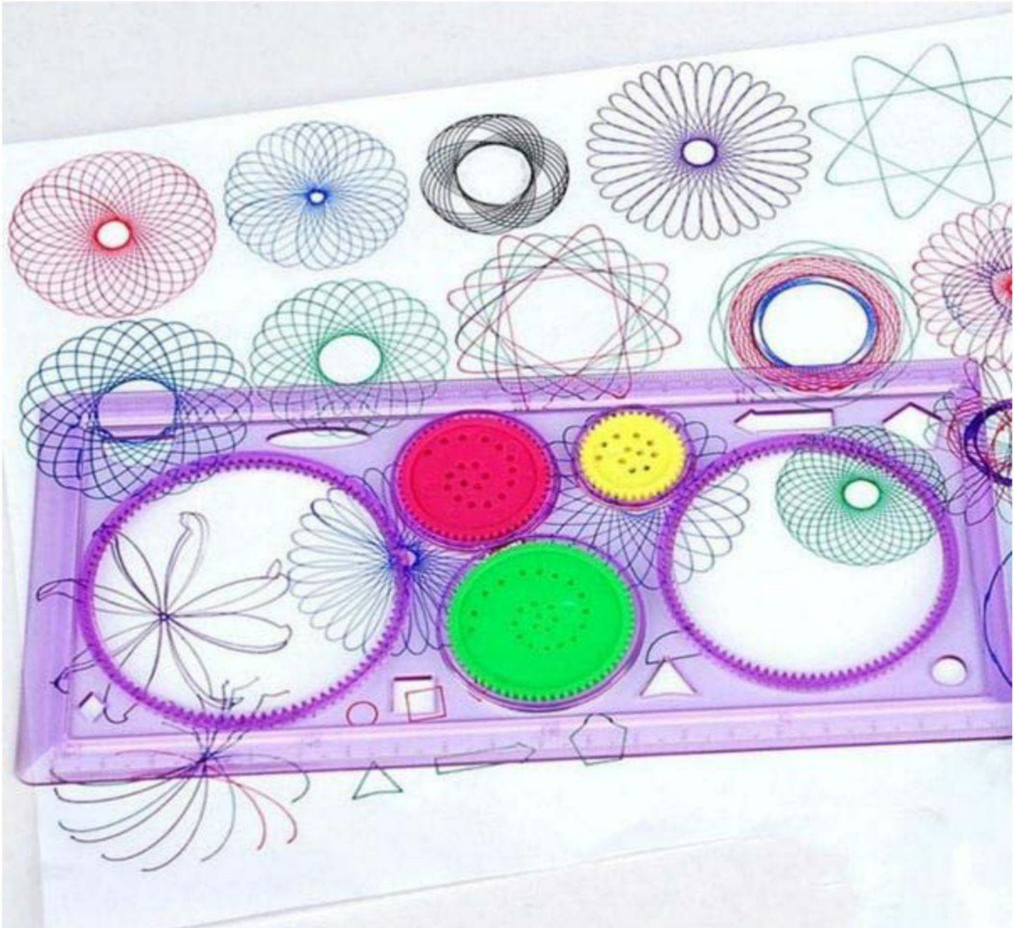

[1] З точністю до розташування на площині

Аналогічно, можна:

1) брати кола $C_1$ і $C_2$ різного радіусу,

2) котити коло $C_1$ «всередині» кола $C_2$ ,

3) точку $A$ фіксувати не на самому колі $C_1$, а всередині або назовні кола $C_1$, але зберігаючи «прив'язаність» точки до кола.



**Задача 0.1.2.** Розглянемо неявно задану криву $\gamma$ в площині $\mathbb{R}^2$

$$\Phi(x,y) = 0,$$

де $\Phi(x,y)$ – двічі неперервно диференційована функція. Нехай $P(x_0,y_0)$ – точка на кривій $\gamma$.Запишіть розкладення Тейлора функції $\Phi(x,y)$ в точці $P(x_0,y_0)$ з точністю до членів другого порядку. Проаналізуйте, як виглядає розкладення Тейлора у випадках, коли точка $P(x_0,y_0)$ є регулярною або сингулярною.

*Розв'язання.* Маємо

$$\Phi(x,y) = \Phi(x_0,y_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) +\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 +2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cdot (x-x_0)(y-y_0) +\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right) +\ldots$$

Точка $P(x_0,y_0)$ належить кривій $\gamma$, значить $\Phi(x_0,y_0)=0$. Тому маємо

$$\Phi(x,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) +\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 +2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cdot (x-x_0)(y-y_0) +\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right) +\ldots$$

Якщо крива $\gamma$ є регулярною, $\nabla\Phi \neq 0$, то вона апроксимується прямою

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y - y_0) = 0.$$

Ця пряма проходить через точку $P(x_0,y_0)$, а вектор $\nabla\Phi = (\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y})$, обчислений в точці $P(x_0,y_0)$, є нормальним вектором прямої.

Якщо ж крива $\gamma$ не є регулярною і точка $P(x_0,y_0)$ є особливою, то в цій точці маємо $\nabla\Phi = 0$, тому

$$\Phi(x,y) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y - y_0)^2\right) + \ldots$$

**Задача 0.3.1.** Доведіть наступні властивості похідної вектор-функції:

1) $\frac{d}{dt}(\vec{f}+\vec{h})=\frac{d\vec{f}}{dt}+\frac{d\vec{h}}{dt}$

2) $\frac{d}{dt}(\lambda\vec{f})=\frac{d\lambda}{dt}\vec{f}+\lambda\frac{d\vec{f}}{dt}$

3) $\frac{d\vec{f}}{dt}\equiv\vec{0}\Leftrightarrow\vec{f}\equiv\vec{c}$

4.1) $\frac{d}{dt}<\vec{f},\vec{h}> \;=\; <\frac{d\vec{f}}{dt},\vec{h}>+<\vec{f},\frac{d\vec{h}}{dt}>$

4.2) $\frac{d}{dt}[\vec{f},\vec{h}\,] \;=\; [\frac{d\vec{f}}{dt},\vec{h}\,]+[\vec{f},\frac{d\vec{h}}{dt}\,]$

4.3) $\frac{d}{dt}(\vec{f},\vec{g},\vec{h}\,)=(\frac{d\vec{f}}{dt},\vec{g},\vec{h}\,)+(\vec{f},\frac{d\vec{g}}{dt},\vec{h}\,)+(\vec{f},\vec{g},\frac{d\vec{h}}{dt})$

*Розв'язання.*

4.1) Доведемо $\frac{d}{dt} < \vec{f}, \vec{h} > \; = \; < \frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{h} > + < \vec{f}, \frac{d\vec{h}}{dt} >$

Маємо

$$\frac{d}{dt} < \vec{f}, \vec{h} > \; = \; \frac{d}{dt}\left( \sum_{j=1}^{n} f^{j} h^{j} \right) \; = \; \sum_{j=1}^{n} \frac{df^{j}}{dt} h^{j} + \sum_{j=1}^{n} f^{j} \frac{dh^{j}}{dt} \; = \; < \frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{h} > + < \vec{f}, \frac{d\vec{h}}{dt} >$$

Інший метод

$$\frac{d}{dt} < \vec{f}, \vec{h} > \; = \; \lim_{\delta t \to 0} \frac{< \vec{f}(t+\delta t), \vec{h}(t+\delta t) > - < \vec{f}(t), \vec{h}(t) >}{\delta t} =$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{< \vec{f}(t+\delta t), \vec{h}(t+\delta t) > - < \vec{f}(t), \vec{h}(t+\delta t) > + < \vec{f}(t), \vec{h}(t+\delta t) > - < \vec{f}(t), \vec{h}(t) >}{\delta t} =$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{< \vec{f}(t+\delta t) - \vec{f}(t), \vec{h}(t+\delta t) > + < \vec{f}(t), \vec{h}(t+\delta t) - \vec{h}(t) >}{\delta t} =$$

$$= < \frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{h} > + < \vec{f}, \frac{d\vec{h}}{dt} >$$

**Задача 0.3.2.**

1) Обчислити $\frac{d}{dt}|\vec{f}|$

2) Обчислити $\frac{d}{dt}(\frac{\vec{f}}{|\vec{f}|})$

3) Довести (або спростувати), що $|\vec{f}| \equiv const \Leftrightarrow <\vec{f}, \frac{d\vec{f}}{dt}> \equiv 0$

4) Довести (або спростувати), що $[\vec{f}, \frac{d\vec{f}}{dt}] \equiv \vec{0} \Leftrightarrow$ існує сталий вектор $\vec{C}$ такий, що $\vec{f}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{C}$.

5) Довести (або спростувати), що $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \equiv \vec{0} \Leftrightarrow$ існують сталі вектори $\vec{C}$, $\vec{C}_0$ такі, що $\vec{f}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{C} + \vec{C}_0$.

Розв’язання.

1) $$\frac{d}{dt}|\vec{f}|=\frac{d}{dt}\sqrt{<\vec{f},\vec{f}>}=\frac{1}{2\sqrt{<\vec{f},\vec{f}>}}\cdot\frac{d}{dt}<\vec{f},\vec{f}>=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{<\vec{f},\vec{f}>}}\cdot(<\frac{d\vec{f}}{dt},\vec{f}>+<\vec{f},\frac{d\vec{f}}{dt}>)=\frac{1}{\sqrt{<\vec{f},\vec{f}>}}\cdot<\frac{d\vec{f}}{dt},\vec{f}>=\frac{1}{|\vec{f}|}\cdot<\frac{d\vec{f}}{dt},\vec{f}>$$

Наслідок: $|\vec{f}|\equiv const \quad \Leftrightarrow \quad <\vec{f},\frac{d\vec{f}}{dt}>\equiv 0$

2) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{f}}{|\vec{f}|}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\vec{f}|}\right)\vec{f}+\frac{1}{|\vec{f}|}\frac{d\vec{f}}{dt}=-\frac{1}{|\vec{f}|^2}\frac{d}{dt}(|\vec{f}|)\vec{f}+\frac{1}{|\vec{f}|}\frac{d\vec{f}}{dt}=$$

$$=-\frac{1}{|\vec{f}|^2}\frac{1}{|\vec{f}|}<\frac{d\vec{f}}{dt},\vec{f}>\vec{f}+\frac{1}{|\vec{f}|}\frac{d\vec{f}}{dt}=-\frac{1}{|\vec{f}|^3}<\frac{d\vec{f}}{dt},\vec{f}>\vec{f}+\frac{1}{|\vec{f}|}\frac{d\vec{f}}{dt}$$

Наслідок: $<\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{f}}{|\vec{f}|}\right),\vec{f}>=0$

4) $[\vec{f}, \frac{d\vec{f}}{dt}] \equiv \vec{0} \iff$ Існує сталий вектор $\vec{C}$ такий, що $\vec{f}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{C}$.

Доведення. Нехай $\vec{f} \in C^1$, $\vec{f} \neq \vec{0}$

Маємо:

$$[\vec{f}, \frac{d\vec{f}}{dt}] \equiv \vec{0} \iff \text{Існує функція } \mu(t) \text{ така, що } \frac{d\vec{f}}{dt} = \mu \cdot \vec{f} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{df^1}{dt} = \mu \cdot f^1 \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{df^n}{dt} = \mu \cdot f^n \end{cases} \iff \begin{cases} f^1 = C^1 \cdot \lambda(t) \\ \qquad \vdots \\ f^n = C^n \cdot \lambda(t) \end{cases}, \ \lambda(t) = e^{\int \mu(t) dt} \iff \vec{f}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{C}$$

$[\bar{r}, \frac{d\bar{r}}{dt}] = 0 \iff \exists\ \bar{c} \equiv const: \bar{r}(t) = \lambda(t)\cdot\bar{c}$ для деякої $\lambda: (a,b) \to \mathbb{R}$.

$\Leftarrow$ $\bar{r} = \lambda\bar{c} \Rightarrow \bar{r}' = \lambda'\bar{c} \Rightarrow [\bar{r}, \bar{r}'] = [\bar{c}, \lambda'\bar{c}] = 0$.

$\Rightarrow$ Покажемо для $\bar{r} \neq 0$: $\bar{r} = |\bar{r}| \cdot \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$. $\lambda := |\bar{r}|$, $\bar{c} := \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$.

Треба показати, що $\bar{c} \equiv const \iff \bar{c}' = 0$. Дійсно,

$\bar{c}' = [\underline{4.1}(2)] = -\frac{\langle \bar{r}, \bar{r}' \rangle}{|\bar{r}|^3}\bar{r} + \frac{1}{|\bar{r}|}\bar{r}' \Rightarrow [\bar{c}, \bar{c}'] = \left[[\bar{r}, \bar{r}] = 0\right] = \frac{1}{|\bar{r}|^2}[\bar{r}, \bar{r}'] = 0$, тобто $\bar{c}$ і $\bar{c}'$ колінеарні. Але $|\bar{c}| = 1 \Rightarrow \langle \bar{c}, \bar{c}' \rangle = 0$ за $\underline{4.1.(3)}$, тобто $\bar{c} \perp \bar{c}'$. $\bar{c}'$ кол. і ортог. $\bar{c} \neq 0 \Rightarrow \bar{c}' = 0$.

5) $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \equiv \vec{0} \Leftrightarrow$ існують сталі вектори $\vec{C}, \vec{C}_0$ такі, що $\vec{f}(t) = \lambda(t)\cdot\vec{C} + \vec{C}_0$.

Доведення. Нехай $\vec{f} \in C^2$, $\frac{d\vec{f}}{dt} \neq \vec{0}$

Покладемо $\vec{u}(t) = \frac{d\vec{f}}{dt}$.. Маємо:

$[\vec{u}, \frac{d\vec{u}}{dt}] \equiv \vec{0} \Leftrightarrow$ Існує сталий вектор $\vec{C}$ і функція $\lambda(t)$ такі, що $\vec{u}(t) = \lambda(t)\cdot\vec{C}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{f}}{dt} = \lambda(t)\cdot\vec{C} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{f} = \int\lambda(t)dt\cdot\vec{C} + \vec{C}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{f} = \Lambda(t)\cdot\vec{C} + \vec{C}_0$$

Под. 4.3. Обертання: $\begin{pmatrix} \cos\alpha t & -\sin\alpha t & 0 & 0 \\ \sin\alpha t & \cos\alpha t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta t & -\sin\beta t \\ 0 & 0 & \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$

Діємо на $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$: отримуємо $\begin{pmatrix} a\cos\alpha t \\ a\sin\alpha t \\ b\cos\beta t \\ b\sin\beta t \end{pmatrix} = \varphi(t)$

якщо $\beta = \alpha \cdot \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, то $\varphi(t + \frac{2\pi q}{\alpha}) = \varphi(t)$. якщо $\frac{\beta}{\alpha} \notin \mathbb{Q}$, $\varphi$ - ілу.

**Приклад.** Для наступної параметрично заданої кривої

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = \cos t \\ x^2 = 2\sin t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

записати рівняння дотичної прямої в точці $P(t=\frac{\pi}{3})$.

*Розв'язання.* Радіус-вектор кривої

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$$

є $C^\infty$-гладкою вектор-функцією. Обчислимо її похідну:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$$

Оскільки $\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, задана крива є регулярною. Тому в кожній точці на кривій існує і є єдиною дотична пряма.

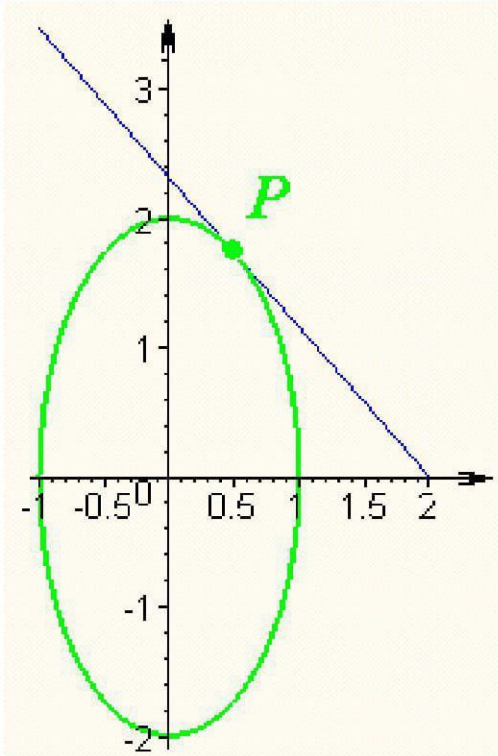
Зокрема, дотична пряма в точці $P$ проходить через цю точку, а $\frac{d\vec{f}}{dt}$ є її напрямним вектором.

Обчислюємо координати точки $P$: $\vec{x}_P = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ 2\sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Обчислюємо координати напрямного вектора: $\dfrac{d\vec{f}}{dt}_P = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{3} \\ 2\cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Записуємо рівняння дотичної прямої кривої $\gamma$ в точці $P$:

$$\frac{x^1 - \frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x^2 - \sqrt{3}}{1} \quad \leftrightarrow \quad x^2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}x^1 + \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$




Відповідь: $x^2 = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}x^1 + \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

**Приклад.** Для наступної неявно заданої кривої на площині

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 10 = 0$$

записати рівняння дотичної прямої в заданій точці $P(3,1)$.

*Розв'язання.* Запишемо відповідну функцію $\Phi(x^1,x^2) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - 10$

Перевіримо, що точка $P(2,1)$ належить кривій:

$$\Phi(3,1) = 3^2 + 1^2 - 10 = 0$$

Обчислимо градієнт функції $\Phi(x^1,x^2)$:

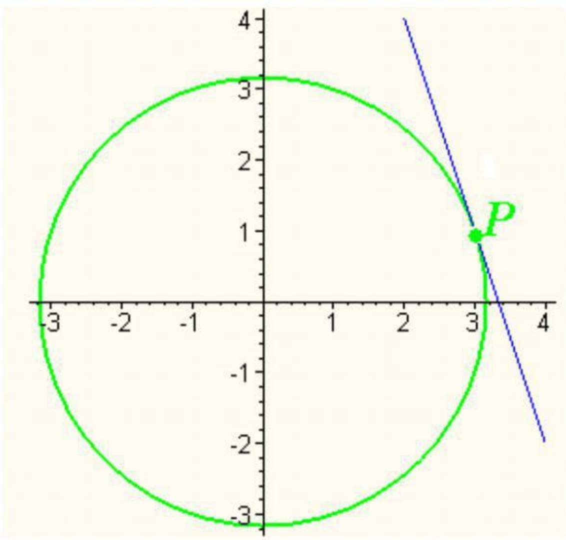
$$\nabla\Phi = \begin{pmatrix} 2x^1 \\ 2x^2 \end{pmatrix}$$

Обчислимо значення градієнті функції $\Phi(x^1,x^2)$ в точці $P(3,1)$:

$$\nabla\Phi(3,1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix},$$

це вектор нормалі шуканої прямої. Записуємо рівняння прямої:

$$6(x-3) + 2(y-1) = 0.$$




Відповідь: $6(x-3) + 2(y-1) = 0$.

**Приклад.** Обчислити довжину наступної параметрично заданої кривої

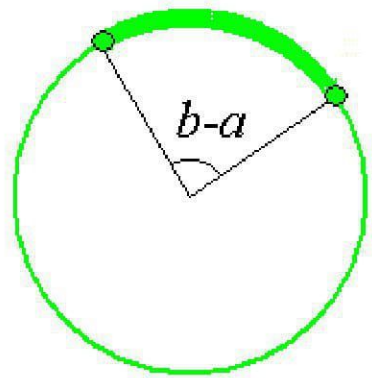
$$\gamma: \begin{cases} x^1 = \cos t \\ x^2 = \sin t \end{cases}, \ t \in (a, b).$$

*Розв'язання.* Радіус-вектор кривої $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ є $C^\infty$-гладкою вектор-функцією.

Обчислимо її похідну: $\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$. Оскільки $\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, задана крива є регулярною.

Обчислюємо довжину вектора швидкості (дотичного вектора): $|\frac{d\vec{f}}{dt}| = 1$

Обчислюємо довжину кривої: $L = \int_a^b |\frac{d\vec{f}}{dt}| dt = \int_a^b dt = b - a$




*Відповідь*: $L = \int_a^b |\frac{d\vec{f}}{dt}| dt = \int_a^b dt = b - a$

**Додаткова задача 1.**

1) Для трактриси (Задача 1.1, п.4) обчисліть довжину відрізку дотичної прямої від точки дотику прямої з трактрисою до точки перетину прямої з вертикальною координатною віссю $x^2$.

2) Для гвинтової лінії в $\mathbb{R}^3$ (Задача 1.1, п.5) обчисліть кут, під яким дотична пряма нахилена до горизонтальної координатної площини $x^1x^2$.

3) Для «гвинтової» кривої $\mathbb{R}^4$ (Задача 1.1, п.6) обчисліть кути, під якими дотична пряма нахилена до горизонтальної координатної площини $x^1x^2$ і горизонтальної координатної площини $x^3x^4$.

**Додаткова задача 2.**

Як зміниться довжина кривої, якщо застосувати наступне перетворення в обхопному просторі $\mathbb{R}^n$:

1) паралельний перенос,

2) обертання,

3) гомотетія з коефіцієнтом $\lambda$ ?

**Задача 2.6.***

Як зміниться довжина кривої, якщо застосувати наступне перетворення в обхопному просторі $I\!R^n$: 1) паралельний перенос, 2) обертання, 3) гомотетія з коефіцієнтом $\lambda$?

Відповідь:

1) Довжина не зміниться:

$$\vec{f}^{\,*}(t)=\vec{f}(t)+\vec{c}\;\Rightarrow\;\frac{d\vec{f}^{\,*}}{dt}=\frac{d\vec{f}}{dt}\;\Rightarrow\;\left|\frac{d\vec{f}^{\,*}}{dt}\right|=\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|\;\Rightarrow\;\int_a^b\left|\frac{d\vec{f}^{\,*}}{dt}\right|dt=\int_a^b\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|dt\;\Rightarrow l(\gamma^*)=l(\gamma)$$

2) Довжина не зміниться:

$$\vec{f}^{\,*}(t)=W\cdot\vec{f}(t),W\in O(n)\;\Rightarrow\;\frac{d\vec{f}^{\,*}}{dt}=W\cdot\frac{d\vec{f}}{dt}\;\Rightarrow\;\left|\frac{d\vec{f}^{\,*}}{dt}\right|=\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\int_a^b\left|\frac{d\vec{f}^{\,*}}{dt}\right|dt=\int_a^b\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|dt\;\Rightarrow l(\gamma^*)=l(\gamma)$$

3) Довжина помножиться на коефіцієнт гомотетії $\lambda$:

$$\vec{f}^{\,*}(t)=\lambda\cdot\vec{f}(t)\;\Rightarrow\;\frac{d\vec{f}^{\,*}}{dt}=\lambda\cdot\frac{d\vec{f}}{dt}\;\Rightarrow\;\left|\frac{d\vec{f}^{\,*}}{dt}\right|=\lambda\cdot\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_a^b\left|\frac{d\vec{f}^{\,*}}{dt}\right|dt=\lambda\cdot\int_a^b\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|dt\;\Rightarrow l(\gamma^*)=\lambda\cdot l(\gamma)$$

**Задача 6.1c.** Знайдемо довжину дуги плаской кривої

$$x = a(\cos t + t \sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t)$$

між точками, що відповідають довільним значенням параметра $t = t_1$ і $t = t_2$, $t_1 \leqslant t_2$. Тут $a > 0$. Позначимо відповідну вектор-функцію через $r$, продиференціюємо і знайдемо довжину:

$$r = a(\cos t + t\sin t,\ \sin t - t\cos t),$$

$$r' = a(-\sin t + \sin t + t\cos t,\ \cos t - \cos t + t\sin t) = at(\cos t,\ \sin t),$$

$$|r'| = \sqrt{(at\cos t)^2 + (at\sin t)^2} = a|t|.$$

Довжина дуги кривої обчислюється за формулою:

$$L = \int\limits_{t_1}^{t_2} |r'(t)|\, dt = a\int\limits_{t_1}^{t_2} |t|\, dt.$$

Зокрема, для невід'ємних $t_1$ і $t_2$ це буде

$$a\int\limits_{t_1}^{t_2} t\, dt = a\frac{t^2}{2}\bigg|_{t_1}^{t_2} = \frac{a}{2}(t_2^2 - t_1^2),$$

а для випадку $t_1 \leqslant 0 \leqslant t_2$ –

$$a\int\limits_{t_1}^{0}(-t)\, dt + a\int\limits_{0}^{t_2} t\, dt = -a\frac{t^2}{2}\bigg|_{t_1}^{0} + a\frac{t^2}{2}\bigg|_{0}^{t_2} = \frac{a}{2}(t_1^2 + t_2^2).$$

Випадок недодатних $t_1$ і $t_2$ розглянути самостійно.

**Задача 6.2a.** Знайдемо довжину дуги явно заданої пласької кривої

$$y = \ln \cos x$$

на проміжку $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$. Зауважимо, що у загальному випадку явно задану криву $y = f(x)$ можна розглядати як параметрично задану з параметром $x$:

$$r = (x, f),\ r' = (1, f'),\ |r'| = \sqrt{1 + f'^2}.$$

У нас $f' = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\mathrm{tg} x$, тому довжина дорівнює

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\, dx.$$

Оскільки $\cos x > 0$ для $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$,

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\, dx.$$

Зробимо заміну $\xi = \frac{\pi}{2} - x$. Зауважимо, що $d\xi = -dx$, тому образи меж інтегрування поміняються місцями:

$$L = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\xi}\, d\xi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{\xi}{2}}\, d\xi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{\xi}{2}}{\sin\frac{\xi}{2}} \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2\frac{\xi}{2}}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}}\, d\operatorname{tg}\frac{\xi}{2} = \ln\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \ln\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}.$$