

1. Дотична пряма регулярної параметрично/неявно заданої кривої

Задача 1.1. Для наступних параметрично заданих кривих записати рівняння дотичної прямої в заданій точці:

1) Крива γ :
$$\begin{cases} x^1 = a + r \cos t \\ x^2 = b + r \sin t \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty), \text{ точка } P(t = \frac{\pi}{4})$$

2) Крива γ :
$$\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = a \cosh t \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty), \text{ точка } P(t=0)$$

3) Крива γ :
$$\begin{cases} x^1 = t^2 \\ x^2 = t^3 \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty), \text{ точка } P(t=0)$$

4) Крива γ :
$$\begin{cases} x^1 = a / \cosh t \\ x^2 = a(t - \tanh t) \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty), \text{ точка } P(t=t_0)$$

5) Крива γ :
$$\begin{cases} x^1 = r \cos t \\ x^2 = r \sin t \\ x^3 = ht \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty), \text{ точка } P(t=t_0).$$

6) Крива γ :
$$\begin{cases} x^1 = a \cos \alpha t \\ x^2 = a \sin \alpha t \\ x^3 = b \sin \beta t \\ x^4 = b \sin \beta t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad \text{точка } P(t=t_0).$$

Задача 1.2. Розглянемо параметрично задану криву

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = t^4 \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

1) Запишіть рівняння дотичних прямих до кривої γ , що проходять через точку $Q(-1, 0)$.

2) Запишіть рівняння дотичних прямих до кривої γ , що проходять паралельно до прямої $x^1 = x^2$.

Задача 1.3. Розглянемо неявно задану криву γ в площині:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0 .$$

- 1) Запишіть рівняння дотичної прямої кривої γ в точці $P(\sqrt{2}, 0)$
- 2) Знайдіть дотичну пряму кривої γ , що проходить через точку $Q(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- 3) Знайдіть дотичну пряму кривої γ , що проходить паралельно до горизонтальної координатної осі x

2. Довжина регулярної параметрично заданої кривої

Задача 2. Обчислити довжину наступних параметрично заданих кривих:

$$1) \gamma: \begin{cases} x^1 = a + A \cos t \\ x^2 = b + B \sin t \end{cases}, t \in (0, 2\pi)$$

$$2) \gamma: \begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = a \cosh t \end{cases}, t \in (-C, C)$$

$$3) \gamma: \begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = t^2 \end{cases}, t \in (-a, a)$$

$$4) \gamma: \begin{cases} x^1 = -2r \cos t (1 + \cos t) \\ x^2 = 2r \sin t (1 + \cos t) \end{cases}, t \in (0, 2\pi)$$

$$5) \gamma: \begin{cases} x^1 = a / \cosh t \\ x^2 = a(t - \tanh t) \end{cases}, t \in (0, C)$$

$$6) \gamma: \begin{cases} x^1 = r \cos t \\ x^2 = r \sin t \\ x^3 = ht \end{cases}, t \in (0, 2\pi)$$

$$7) \gamma: \begin{cases} x^1 = a \cos \alpha t \\ x^2 = a \sin \alpha t \\ x^3 = b \sin \beta t \\ x^4 = b \sin \beta t \end{cases}, t \in (A, B)$$

3. Додаткові задачі

Задача 3.1.

1) Для трактриси (Задача 1.1, п.4) обчисліть довжину відрізка дотичної прямої від точки дотику прямої з трактрисою до точки перетину прямої з вертикальною координатною віссю x^2 .

2) Для гвинтової лінії в \mathbb{R}^3 (Задача 1.1, п.5) обчисліть кут, під яким дотична пряма нахилена до горизонтальної координатної площини x^1x^2 .

3) Для «гвинтової» кривої \mathbb{R}^4 (Задача 1.1, п.6) обчисліть кути, під якими дотична пряма нахилена до горизонтальної координатної площини x^1x^2 і горизонтальної координатної площини x^3x^4 .

Задача 3.2.

Як зміниться довжина кривої, якщо застосувати наступне перетворення в обхопному просторі \mathbb{R}^n :

- 1) паралельний перенос,
- 2) обертання,
- 3) гомотетія з коефіцієнтом λ ?

Задача 3. Розглянемо коло γ одиничного радіусу з центром в початку координат:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0$$

З «північного полюсу» $N(0,1)$ проведемо промінь, який перетинає горизонтальну координатну вісь в точці $A(t,0)$.

Обчисліть координати точки P , в якій згаданий промінь перетинає коло γ .

Як буде рухатись точка P по колу γ , коли точка A буде рухатись по горизонтальній координатній осі x^1 від $-\infty$ до $+\infty$?

