Лекція 2. Регулярні криві. Дотична пряма. Довжина кривої.

1. *Параметрично* задана крива γ в $\mathbb{R}^n$ представляється вектор-функцією

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

Регулярність параметрично заданої кривої:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \vec{f}(t) \in C^m, \quad m \geq 1 \\ 2)\ \dfrac{d\vec{f}}{dt} \neq \vec{0}. \end{array}}$$

2. *Неявно* задана крива γ в $\mathbb{R}^2$ представляється рівнянням

$$\Phi\,(\,x^1, x^2\,) = 0 \;.$$

Регулярність неявно заданої кривої:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \Phi \in C^m, \quad m \geq 1 \\ 2)\ \nabla\Phi \neq 0 \end{array}}$$

3. *Явно* задана крива γ в $\mathbb{R}^2$ є графіком функції

$$x^2 = h\,(\,x^1\,)$$

Гладкість явно заданої кривої:

$$\boxed{1)\ h \in C^m, \quad m \geq 1}$$

Умова регулярності є достатньою умовою для того, щоб крива була «гарною» з точки зору топології:

1) якщо параметрично задана крива є регулярною, то вона є загальною (локально[1] елементарною) кривою;

2) якщо неявно задана крива є регулярною, то вона є простою (локально[2] елементарною) кривою.

---

[1] З точки зору інтервалу I, на якому визначена крива

[2] З точки зору обхопної площини $\mathbb{R}^2$

1. Регулярні параметрично задані криві: заміна параметру

Нехай γ – параметрично задана крива в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t),\ t \in I.$$

Розглянемо неперервну функцію

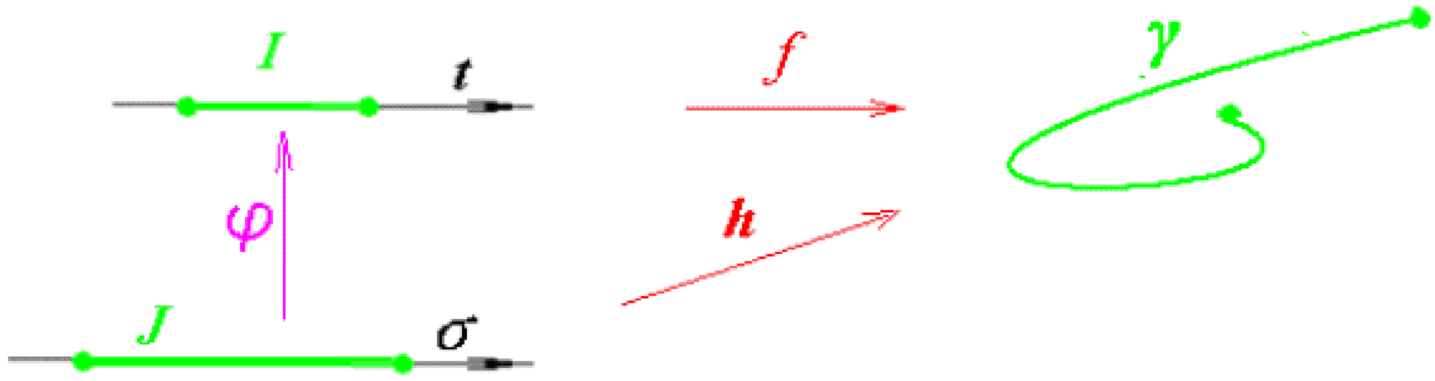
$$t = \varphi(\sigma),\quad \sigma \in J,$$

множиною значень якої є інтервал I.

Тоді складна вектор-функція

$$\vec{x} = \vec{f}(\varphi(\sigma)) = \vec{h}(\sigma),\ \sigma \in J,$$

буде задавати ту саму криву γ в $\mathbb{R}^n$.



Тобто, є один і той же шлях, але представляється як дві різні траєкторії.

Таким чином, для кривої γ маємо дві різні параметризації.

Функція $t = \varphi(\sigma)$, що описує перехід від параметра t до параметра σ, називається *функцією заміни параметра* на кривій γ.

Припустимо, що крива γ є регулярною класу C^m, тобто

$$1)\ \vec{f}(t) \in C^m\ ,\ \ 2)\ \frac{d\vec{f}}{dt} \neq \vec{0}.$$

Чи зберігається ця властивість *регулярності* при заміні параметру?

1) Припустимо, що функція заміни параметру $t = \varphi(\sigma)$ є гладкою класу C^m. Тоді складна вектор-функція $\vec{h}(\sigma) = \vec{f}(\varphi(\sigma))$також буде гладкою класу C^m, як і вектор-функція $\vec{f}(t)$.

2) Обчислимо похідну складної вектор-функції $\vec{h}(\sigma) = \vec{f}(\varphi(\sigma))$:

$$\frac{d\vec{h}}{d\sigma} = \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d\varphi}{d\sigma}\ .$$

Звідси, якщо $\dfrac{d\vec{h}}{d\sigma} \neq \vec{0}$ тоді, і тільки тоді, коли $\dfrac{d\varphi}{d\sigma} \neq 0$.

Таким чином, заміна параметру (репараметризація) $t = \varphi(\sigma)$ зберігає регулярність кривої γ, якщо функція $t = \varphi(\sigma)$ є

1) гладкою відповідного класу C^m,

2) строго монотонною.

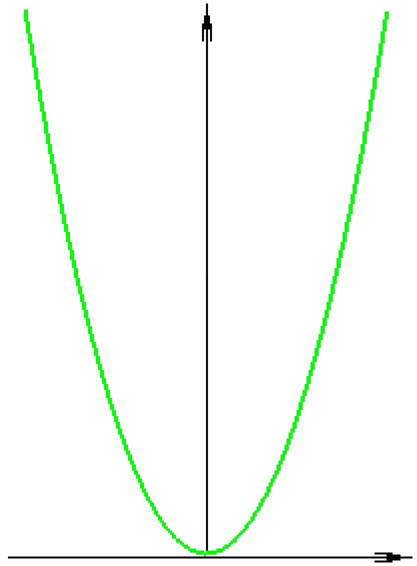
Описаний перехід від параметра t до параметра σ, що зберігає регулярність параметрично заданої кривої γ, називається *регулярною заміною параметра* на кривій γ.

Наслідок. Кожна регулярна параметрично задана крива в $\mathbb{R}^n$ допускає безліч різноманітних регулярних параметризацій.

Приклад 1.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

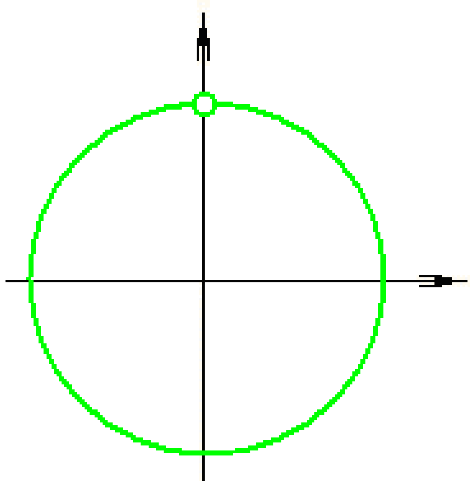
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{tg}^3\sigma \\ \mathrm{tg}^6\sigma \end{pmatrix}, \quad \sigma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



Приклад 2.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\sigma}{\sigma^2+1} \\ \dfrac{\sigma^2-1}{\sigma^2+1} \end{pmatrix}, \quad \sigma \in (-\infty, \infty)$$



Регулярні параметрично задані криві: орієнтація

Нехай γ – регулярна параметрично задана крива в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{f}(t)$. Розглянемо регулярну заміну параметра $t = \varphi(\sigma)$ на кривій γ.

Функція заміни параметру $t = \varphi(\sigma)$ є строго монотонною, $\dfrac{d\varphi}{d\sigma} \neq 0$.

Скажемо, що параметри t і σ *задають однакову орієнтацію* (*однаковий напрям руху)* на кривій γ, якщо відповідна функція заміни параметру $t = \varphi(\sigma)$ є зростаючою, $\dfrac{d\varphi}{d\sigma} > 0$.

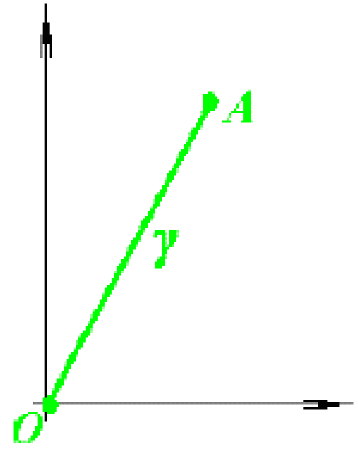
Якщо ж функція заміни параметру $t = \varphi(\sigma)$ є спадаючою, $\dfrac{d\varphi}{d\sigma} < 0$,то говорять, що параметри t і σ *задають протилежні орієнтації* (*протилежні напрями руху)* на кривій γ.

Маємо відношення еквівалентності, яке розбиває множину усіх регулярних параметризацій кривої γ на два класи еквівалентності, кожний з яких визначає орієнтацію (напрям руху) на кривій γ.

Приклад (перевірте самостійно)

Розглянемо три різні параметризації одного й того ж відрізка прямої:

$$\begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = 2t \end{cases}, \ t \in (0,1); \qquad \begin{cases} x^1 = \sin\sigma \\ x^2 = 2\sin\sigma \end{cases}, \ \sigma \in (0, \frac{\pi}{2}); \qquad \begin{cases} x^1 = \cos s \\ x^2 = 2\cos s \end{cases}, \ s \in (0, \frac{\pi}{2}).$$



Коли t зростає від 0 до 1, відповідна точка рухається по відрізку від O до A.

Коли σ зростає від 0 до $\frac{\pi}{2}$, відповідна точка рухається по відрізку від O до A.

Коли s зростає від 0 до $\frac{\pi}{2}$, відповідна точка рухається по відрізку від A до O.

Параметри t і σ задають однакову орієнтацію на заданій кривій γ, функція заміни параметру $t = \sin\sigma$ є зростаючою при $\sigma \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Параметри t і s задають протилежні орієнтації на заданій кривій γ, функція заміни параметру $t = \cos s$ є спадаючою при $s \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Параметри σ і s задають протилежні орієнтації на заданій кривій γ, функція заміни параметру $\sigma = \frac{\pi}{2} - s$ є спадаючою при $s \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Регулярні параметрично задані криві: фізична інтерпретація

Нехай γ – регулярна параметрично задана крива в $I\!R^n$ з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{f}(t)$.

Криву γ можна інтерпретувати як шлях, по якому рухається точковий фізичний об'єкт.

Вектор-функція $\vec{x} = \vec{f}(t)$ представляє траєкторію, тобто, як саме об'єкт рухається по обраному шляху γ, яке саме положення він займає в кожний момент часу t.

Похідна $\dfrac{d\vec{f}}{dt}$ – це вектор швидкості об'єкта в кожний момент часу t.

Регулярність траєкторії означає, що під час руху швидкість змінюється неперервним чином і в жодний момент не обертається в нуль, тобто, точковий фізичний об'єкт рухається «плавно» і без жодних зупинок.

Регулярність шляху означає, що точковий фізичний об'єкт може подолати цей шлях, рухаючись «плавно» і без жодних зупинок.

2. Дотична пряма

Нехай γ – параметрично задана крива в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором

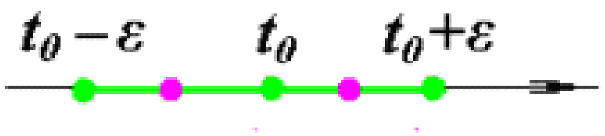
$$\vec{x} = \vec{f}(t),\ t \in I .$$

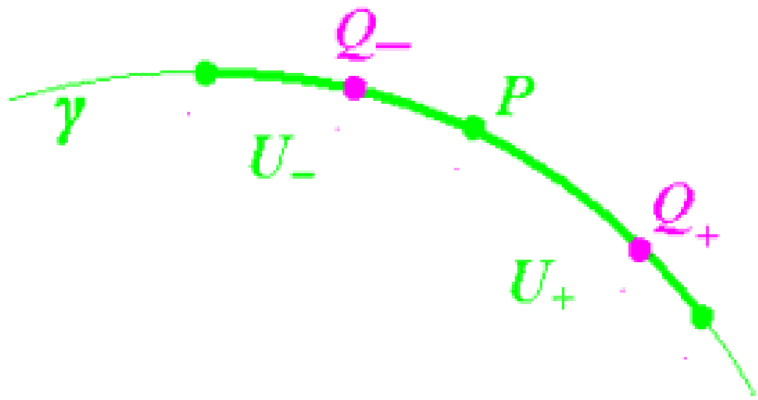
Візьмемо довільну точку P на кривій γ, що відповідає значенню параметра $t=t_0$. Визначимо лівий U_- і U_+ правий «півоколи» точки P на кривій γ:

$$U_- = \{\vec{f}(t) \,|\, t \in (t_0 - \varepsilon, t_0]\} \quad , \quad U_+ = \{\vec{f}(t) \,|\, t \in [t_0, t_0 + \varepsilon)\} .$$

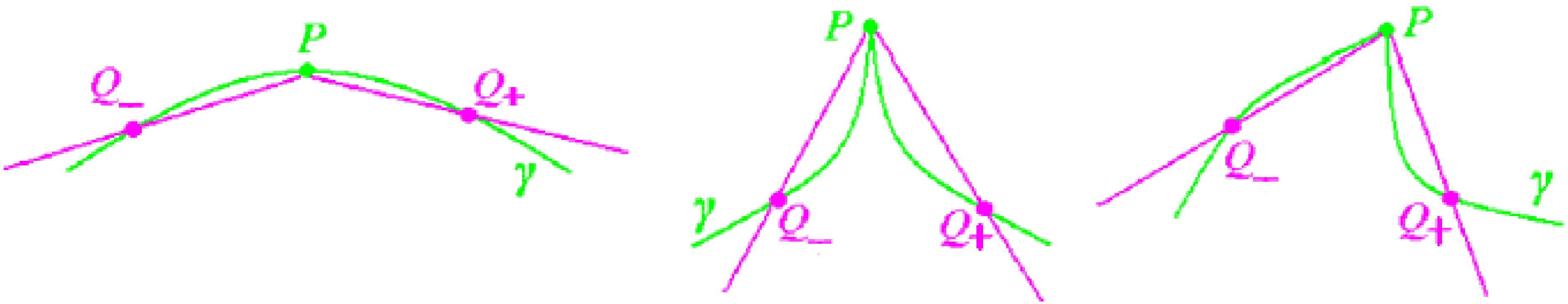
Позначимо Q_- точку з U_-, що відповідає значенню $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$.

Позначимо Q_+ точку з U_+, що відповідає значенню $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$.





Лівою (правою) січною кривої γ в точці P називається промінь PQ_- (відповідно PQ_+), проведений через точку $Q_- \in U_-$ (відповідно,через точку $Q_+ \in U_+$).



Якщо існує границя

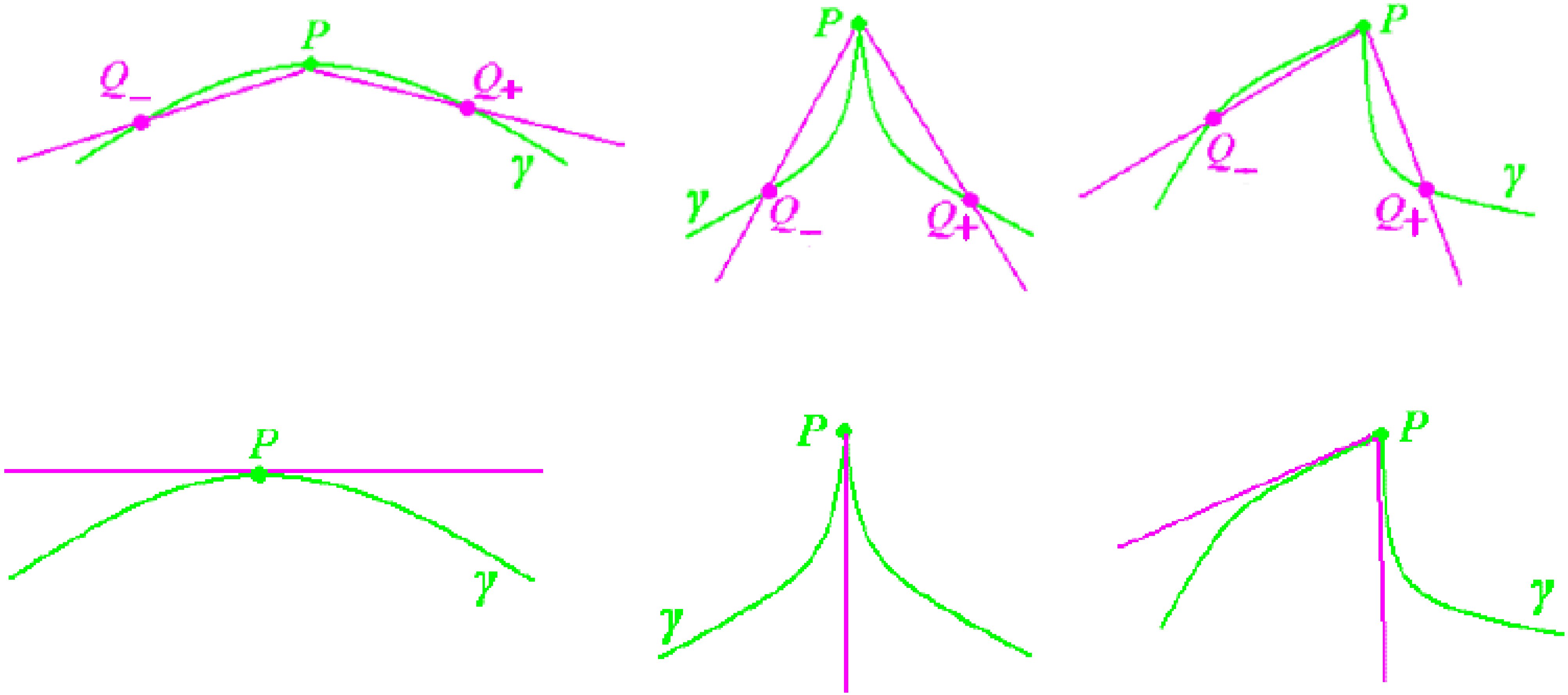
$$\Lambda_- = \lim_{t \to t_0 - 0} PQ_-,$$

то граничний промінь Λ_- називається *лівою півдотичною* кривої γ в точці P.

Аналогічно,якщо існує границя

$$\Lambda_+ = \lim_{t \to t_0 + 0} PQ_+,$$

то граничний промінь Λ_- називається *правою півдотичною* кривої γ в точці P.



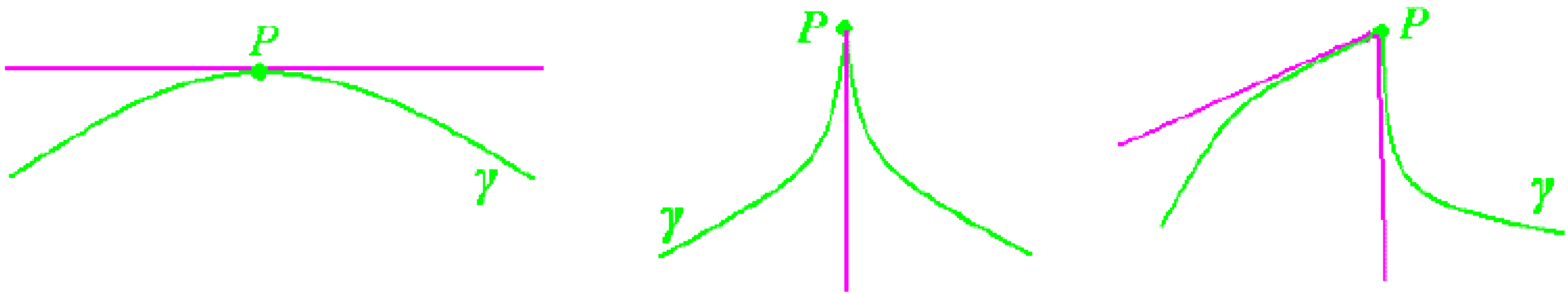
P
Q_
Q+
γ

Визначення.

1. *Якщо* промені Λ_- та Λ_+ протилежно направлені і разом утворюють пряму, то ця пряма Λ називається *дотичною прямою* кривої в точці P.

2. *Якщо* промені Λ_- та Λ_+ співпадають, то точка P називається *точкою повернення* на кривій γ.

3. *Якщо* промені Λ_- та Λ_+ і не протилежно направлені, і не співпадають, то точка P називається *кутовою точкою* на кривій γ.



Твердження. *Нехай параметрично задана крива* γ *в* $\mathbb{R}^n$ *з радіус-вектором* $\vec{x} = \vec{f}(t)$ *є регулярною класу гладкості* C^1.

Тоді в будь-якій точці $P(t=t_0)$ *кривої* γ *існує і є єдиною дотична пряма.*

Ця пряма проходить через точку P, а її напрямним вектором є вектор $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$.

Доведення. Будемо використовувати визначення дотичної прямої, описане вище.

Беремо точку P на кривій γ, що відповідає значенню параметра $t=t_0$.

Точкам Q_- з лівого півоколу U_- відповідають значення параметра t виду

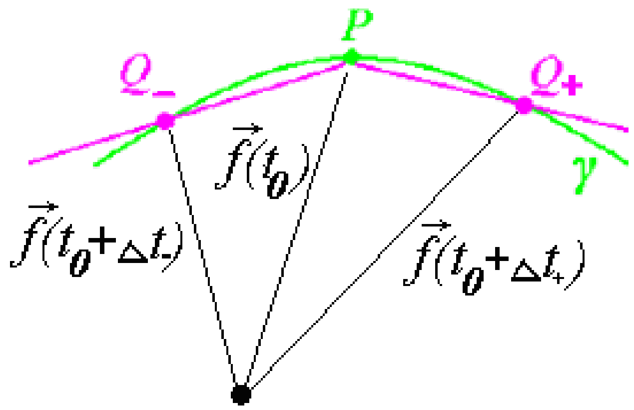
$$t = t_0 + \Delta t_- \;, \; \Delta t_- < 0.$$

Точкам Q_+ з правого півоколу U_+ відповідають значення параметра t виду

$$t = t_0 + \Delta t_+ \;, \Delta t_+ > 0.$$

Розглянемо напрямні вектори лівої та правої січних:

$$\overrightarrow{PQ_-} = \vec{f}(t_0+\Delta t_-) - \vec{f}(t_0) \quad , \quad \overrightarrow{PQ_+} = \vec{f}(t_0+\Delta t_+) - \vec{f}(t_0),$$



Вектори

$$\overrightarrow{PQ_-} = \vec{f}(t_0+\Delta t_-) - \vec{f}(t_0) \quad \text{та} \quad \left(\vec{f}(t_0+\Delta t_-) - \vec{f}(t_0)\right)\cdot \frac{1}{\Delta t_-}$$

колінеарні і протилежно направлені, оскільки $\Delta t_- < 0$.

Вектори

$$\overrightarrow{PQ_+} = \vec{f}(t_0+\Delta t_+) - \vec{f}(t_0) \quad \text{та} \quad \left(\vec{f}(t_0+\Delta t_+) - \vec{f}(t_0)\right)\cdot \frac{1}{\Delta t_+}$$

колінеарні і однаково направлені, оскільки $\Delta t_+ > 0$.

Оскільки вектор-функція $\vec{f}(t)$ є гладкою класу C^1, то тоді маємо:

$$\lim_{t \to t_0 - 0} \left(\vec{f}(t_0+\Delta t_-) - \vec{f}(t_0)\right)\cdot \frac{1}{\Delta t_-} = \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \ ,$$

$$\lim_{t \to t_0 + 0} \left(\vec{f}(t_0+\Delta t_+) - \vec{f}(t_0)\right)\cdot \frac{1}{\Delta t_+} = \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \ ,$$

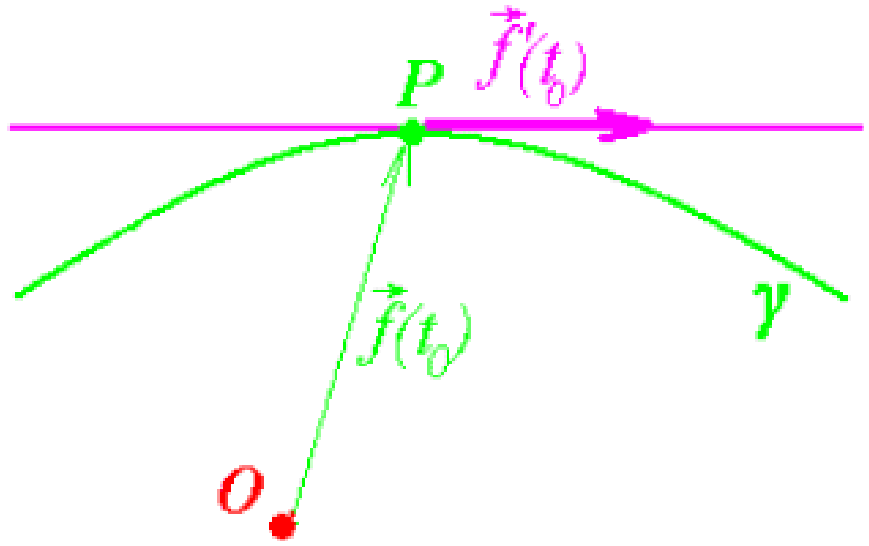
Як наслідок, існують лівий і правий півдотичні промені

$$\Lambda_{-} = \lim_{t \to t_0 - 0} PQ_{-} \ , \ \Lambda_{+} = \lim_{t \to t_0 + 0} PQ_{+}$$

кривої γ в точці P.

При цьому промінь Λ_{-} буде спрямований в напрямку, протилежному вектору $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$. А промінь Λ_{+} буде спрямований в напрямку вектора $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$.

Разом промені Λ_{-} та Λ_{+} утворять пряму – дотичну пряму кривої γ в точці P. Ця пряма проходить через точку P, а її напрямним вектором є вектор $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$.



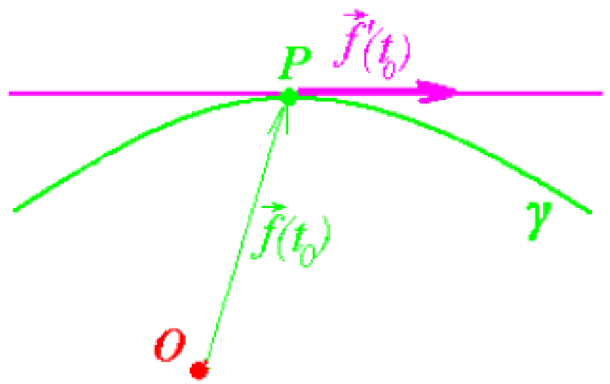
Твердження. *Нехай* γ *– регулярна параметрично задана крива в* $\mathbb{R}^n$ *з радіус-вектором* $\vec{x} = \vec{f}(t)$. *Нехай* P *– точка на кривій* γ *, що відповідає значенню параметра* $t = t_0$.

Тоді векторне параметричне рівняння дотичної прямої до кривої γ *в точці* P *має вигляд*

$$\vec{x} = \vec{f}(t_0) + \lambda \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R};$$

канонічне рівняння дотичної прямої до кривої γ *в точці* P *має вигляд*

$$\frac{x^1 - f^1(t_0)}{\dfrac{df^1}{dt}(t_0)} = \ldots = \frac{x^n - f^n(t_0)}{\dfrac{df^n}{dt}(t_0)}\ .$$



Приклади.

n=2) Якщо регулярна крива γ задана в площині $I\!R^2$ параметрично у вигляді

$$\begin{cases} x = f^1(t) \\ y = f^2(t) \end{cases},$$

то канонічне рівняння дотичної прямої до кривої γ в точці P має вигляд

$$\frac{x - f^1(t_0)}{\frac{df^1}{dt}(t_0)} = \frac{y - f^2(t_0)}{\frac{df^2}{dt}(t_0)}$$

n=3) Якщо регулярна крива γ задана в просторі $I\!R^3$ параметрично у вигляді

$$\begin{cases} x = f^1(t) \\ y = f^2(t), \\ z = f^3(t) \end{cases}$$

то канонічне рівняння дотичної прямої до кривої γ в точці P має вигляд

$$\frac{x - f^1(t_0)}{\frac{df^1}{dt}(t_0)} = \frac{y - f^2(t_0)}{\frac{df^2}{dt}(t_0)} = \frac{z - f^3(t_0)}{\frac{df^3}{dt}(t_0)}$$

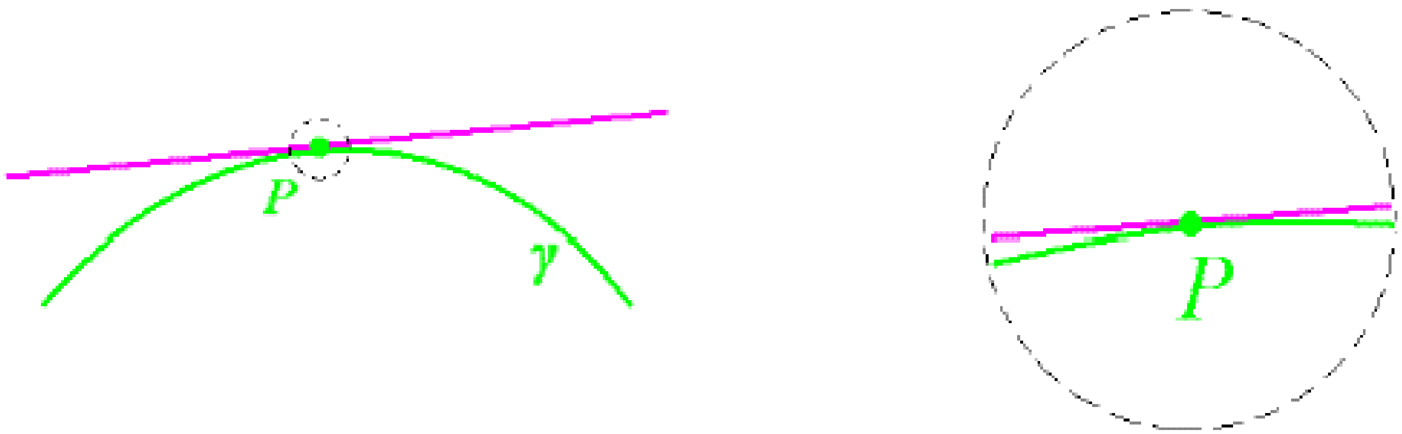
Зауваження 1. Дотична пряма – це «наближення першого порядку» для регулярної кривої у відповідній точці.

Якщо ми запишемо розкладання в ряд Тейлора для радіус-вектора $\vec{x} = \vec{f}(t)$ параметрично задано кривої γ в довільній її точці $P(t=t_0)$,

$$\vec{f}(t) = \vec{f}(t_0) + (t - t_0) \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) + \dots$$

і залишимо лише члени до першого порядку включно, то отримаємо радіус-вектор дотичної прямої кривої γ в точці P:

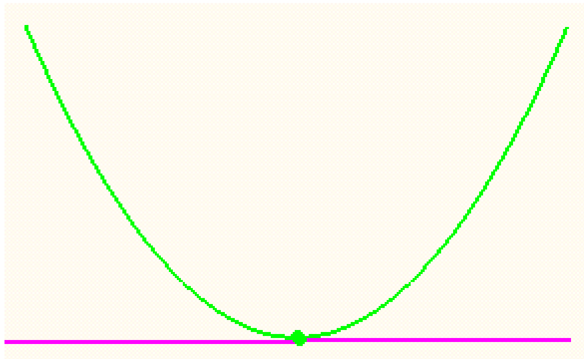
$$\vec{x} = \vec{f}(t_0) + (t - t_0) \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0).$$



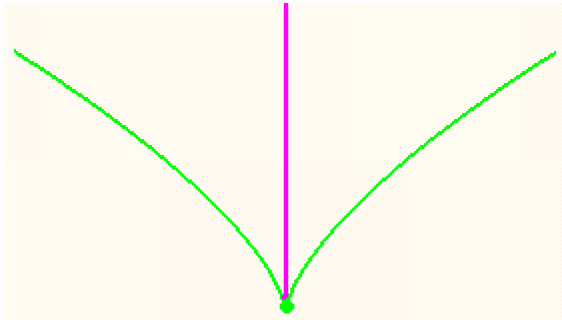
Зауваження 2. Якщо параметрично задана крива γ має ізольовану особливу точку P, де порушені умови регулярності, то існування дотичної прямої кривої γ в точці P потребує додаткового аналізу.

Приклади

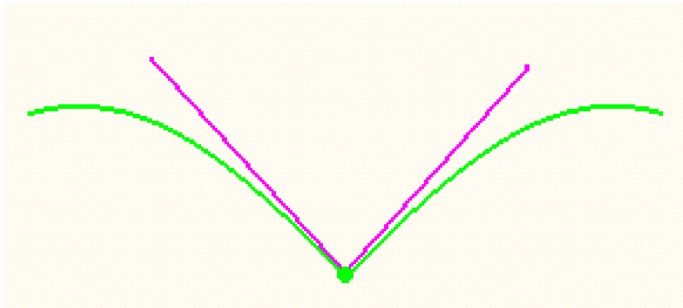
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6 \end{pmatrix}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ |\sin t| \end{pmatrix}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$



Зауваження 3. Що відбувається з дотичною прямою, якщо на регулярній параметрично заданій кривій зробити регулярну заміну параметру?

Коли крива γ задається радіус-вектором $\vec{x} = \vec{f}(t)$, то напрямним вектором дотичної прямої кривої γ в точці $P(t{=}t_0)$ буде вектор $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$.

Коли ми зробимо заміну параметра $t = \varphi(\tilde{t})$ і запишемо радіус-вектор кривої в новій параметризації $\vec{x} = \vec{f}(\varphi(\tilde{t})) = \vec{\tilde{f}}(\tilde{t})$, то напрямним вектором дотичної прямої кривої γ в точці $P(t{=}t_0)$ буде вектор $\dfrac{d\vec{\tilde{f}}}{d\tilde{t}}(\tilde{t}_0)$.

Продиференціювавши $\vec{f}(\varphi(\tilde{t})) = \vec{\tilde{f}}(\tilde{t})$ як складну вектор-функцію, матимемо:

$$\frac{d\vec{\tilde{f}}}{d\tilde{t}}(\tilde{t}_0) = \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\varphi}{d\tilde{t}}(\tilde{t}_0)$$

Звідси випливає, що при регулярній заміні параметру, коли $\dfrac{d\varphi}{d\tilde{t}} \neq 0$, напрямний вектор дотичної прямої або не змінює напрямку (при $\dfrac{d\varphi}{d\tilde{t}} > 0$), або змінює напрямок на протилежний (при $\dfrac{d\varphi}{d\tilde{t}} < 0$) . При цьому сама дотична пряма залишається незмінною, вона не залежить від вибору параметризації.

Рівняння дотичної прямої до явно заданої кривої в площині $I\!R^2$

Нехай γ – явно задана крива в $I\!R^2$, тобто, графік функції

$$y = h(x)\ ,\ x \in (a,b),$$

що є гладкою класу C^1 (неперервно диференційованою).

Зафіксуємо точку P, що відповідає значенню $x = x_0$.

Перейдемо до параметрично задавання кривої γ:

$$\begin{cases} x = t \\ y = h(t) \end{cases}$$

Запишемо рівняння дотичної прямої для кривої γ в точці $P(t = x_0^1)$ як для параметрично заданої кривої:

$$\frac{x - f^1(t_0)}{\frac{df^1}{dt}(t_0)} = \frac{y - f^2(t_0)}{\frac{df^2}{dt}(t_0)} \quad \to \quad \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - h(x_0)}{\frac{dh}{dx}(x_0)} \quad \to \quad y = h(x_0) + \frac{dh}{dx}(x_0) \cdot \left(x - x_0\right)$$

Таким чином, *явно* задані криві в $I\!R^2$ є частковим випадком *параметрично* заданих кривих в $I\!R^2$, а добре відоме рівняння дотичної прямої до явно заданої кривої (графіка функції) є частковим випадком загального рівняння доичної прямої параметрично заданої кривої.

Рівняння дотичної прямої до неявно заданої кривої в площині $\mathbb{R}^2$

Нехай γ – неявно задана крива в $\mathbb{R}^2$, утворена точками, координати яких задовольняють рівнянню

$$\Phi(x^1, x^2) = 0 .$$

Припустимо, що крива γ є регулярною, тобто, функція $\Phi(x^1, x^2)$ є неперервно диференційовною і $\nabla\Phi = (\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^2})$ не є нульовим в жодній точці кривої γ.

Зафіксуємо довільну точку P кривої γ. Координати (x_0^1, x_0^2) цієї точки в $\mathbb{R}^2$ задовольняють рівняння $\Phi(x_0^1, x_0^2) = 0$.

Оскільки крива γ є регулярною, в досить малому околі точки P її можна задати явно, а потім перейти до параметрично задавання

$$\begin{cases} x^1 = f^1(t) \\ x^2 = f^2(t) \end{cases}$$

так, що

$$\Phi(f^1(t), f^2(t)) \equiv 0$$

Продиференціюємо цю тотожність:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\frac{df^1}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\frac{df^2}{dt} \equiv 0$$

Як наслідок, в точці P маємо: $$\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2)}{\frac{df^1}{dt}(t_0)} = \frac{-\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2)}{\frac{df^2}{dt}(t_0)}$$

Запишемо рівняння дотичної прямої для кривої γ як для параметрично заданої кривої:

$$\frac{x^1 - f^1(t_0)}{\frac{df^1}{dt}(t_0)} = \frac{x^2 - f^2(t_0)}{\frac{df^2}{dt}(t_0)} \quad \to \quad \frac{x^1 - x_0^1}{\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2)} = \frac{x^2 - x_0^2}{-\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2)}$$

Як результат, приходимо до *лінійного* рівняння

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2)\cdot\left(x^1 - x_0^1\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2)\cdot\left(x^2 - x_0^2\right) = 0 \ ,$$

що задає дотичну пряму регулярної неявно заданої кривої γ в її довільній точці P з координатами (x_0^1, x_0^2). При цьому $\nabla\Phi(x_0^1, x_0^2) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2), \frac{\partial\Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2)\right)$ є вектором нормалі до дотичної прямої.

Зауважимо, що якщо записати розкладання Тейлора функції $\Phi(x^1,x^2)$ в точці $P(x_0^1, x_0^2)$,

$$\Phi(x^1, x^2) = \frac{\partial \Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2) \cdot \left(x^1 - x_0^1\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2) \cdot \left(x^2 - x_0^2\right) + \ldots.$$

і обмежитись лише членами до першого порядку включно, то замість рівняння кривої γ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2) \cdot \left(x^1 - x_0^1\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2) \cdot \left(x^2 - x_0^2\right) + \ldots. = 0 ,$$

отримаємо рівняння її дотичної прямої в точці P:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2) \cdot \left(x^1 - x_0^1\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2) \cdot \left(x^2 - x_0^2\right) = 0 .$$

Отже, для регулярної неявно заданої кривої γ її лінійною апроксимацією (наближенням першого порядку) в точці P на кривій є саме дотична пряма в цій точці.

Висновок. *Якщо взяти довільну точку P на регулярній кривій γ і розглянути усі прямі, що проходять через точку P, то саме дотична пряма є «найближчою» до кривої γ в околі точки P.*

3. Довжина кривої

Будемо розглядати простір $\mathbb{R}^n$ як евклідів простір, де скалярний добуток і довжина векторів $\vec{X} = \left(X^1,...,X^n\right)$ і $\vec{Y} = \left(Y^1,...,Y^n\right)$ визначається формулами

$$\left\langle \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle = X^1 Y^1 + ... + X^n Y^n \quad ,$$

$$\left| \vec{X} \right| = \sqrt{\left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle} = \sqrt{(X^1)^2 + ... + (X^n)^2} \, .$$

Нехай γ – параметрично задана крива в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t) \quad , \qquad a \le t \le b.$$

Визначення. *Довжиною* кривої γ називається величина

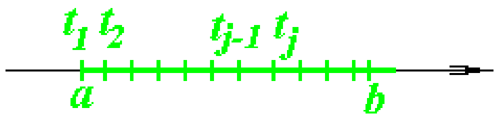
$$l = \int_a^b \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| dt,$$

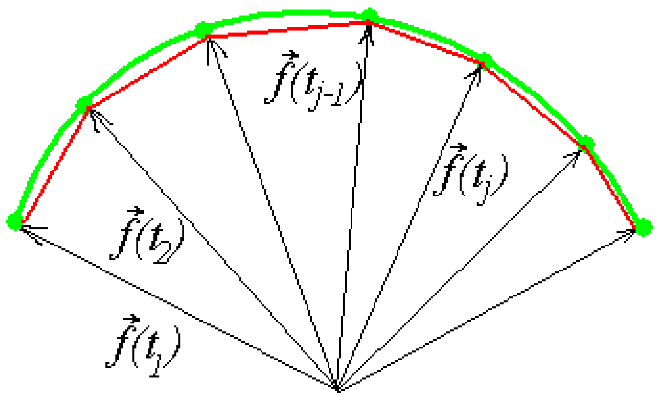
тобто,

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{df^1}{dt}\right)^2 + ... + \left(\frac{df^n}{dt}\right)^2} \, dt$$

Синтетичне визначення довжини кривої за допомогою вписаних в криву ломаних і відповідного граничного переходу дивись в підручнику О.В. Погорєлова *Диференціальна геометрія*.

Ідея синтетичного підходу до визначення довжини кривої





$$\sum\left|\vec{f}(t_j)-\vec{f}(t_{j-1})\right| =$$

$$= \sum\sqrt{(f^1(t_j)-f^1(t_{j-1}))^2+\ldots+(f^n(t_j)-f^n(t_{j-1}))^2} =$$

$$= \sum\sqrt{(\frac{df^1}{dt}(\hat{t}_j^1)\cdot\Delta t)^2+\ldots+(\frac{df^n}{dt}(\hat{t}_j^n)\cdot\Delta t)^2} =$$

$$= \sum\sqrt{(\frac{df^1}{dt}(\hat{t}_j^1))^2+\ldots+(\frac{df^n}{dt}(\hat{t}_j^n))^2}\,\Delta t \to \int_a^b\sqrt{(\frac{df^1}{dt})^2+\ldots+(\frac{df^n}{dt})^2}\,dt =$$

$$= \int_a^b\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|dt$$

Твердження. *Визначення поняття довжини для регулярної кривої є коректним – довжина кривої не змінюється при регулярних замінах параметру на кривій.*

Доведення. Зробимо на кривій γ регулярну заміну параметра

$$t = \varphi(\tilde{t}\,)\ ,\ \ \tilde{a} \le \tilde{t} \le \tilde{b}\,,$$

і запишемо радіус-вектор кривої в новій параметризації

$$\vec{x} = \vec{f}\,(\varphi(\tilde{t}\,)) = \tilde{\vec{f}}\,(\tilde{t}\,).$$

Тоді маємо:

$$\frac{d\tilde{\vec{f}}}{d\tilde{t}} = \frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tilde{t}}$$

і далі
$$\int_a^b \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| \cdot \frac{dt}{d\tilde{t}}\, d\tilde{t} = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left|\frac{d\tilde{\vec{f}}}{d\tilde{t}}\right| d\tilde{t} \quad \text{при } \frac{dt}{d\tilde{t}} > 0,$$

$$\int_a^b \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt = \int_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| \cdot \frac{dt}{d\tilde{t}}\, d\tilde{t} = -\int_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} \left|\frac{d\tilde{\vec{f}}}{d\tilde{t}}\right| d\tilde{t} = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left|\frac{d\tilde{\vec{f}}}{d\tilde{t}}\right| d\tilde{t} \quad \text{при } \frac{dt}{d\tilde{t}} < 0,$$

Таким чином,

$$\int_a^b \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left|\frac{d\tilde{\vec{f}}}{d\tilde{t}}\right| d\tilde{t}\ \ ,$$

що і вимагалось довести.

Приклад 1. Розглянемо параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = (1-t)\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \quad t \in (0,1).$$

Крива γ представляє собою відрізок прямої, що сполучає точки $A(a^1,a^2)$ і $B(b^1,b^2)$

Обчислимо довжину кривої γ. Маємо:

$$\vec{f}(t) = (1-t)\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\vec{f}}{dt} = -\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 - a^1 \\ b^2 - a^2 \end{pmatrix}$$

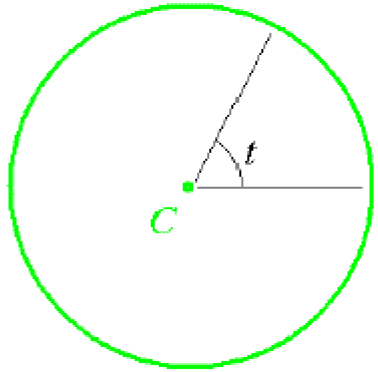
$$\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = \sqrt{(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2}$$

$$l(\gamma) = \int_0^1 \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt = \int_0^1 \sqrt{(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2}\, dt = \sqrt{(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2}\Big|_{t=0}^{t=1} =$$

$$= \sqrt{(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2}$$

Відповідь: $l(\gamma) = \sqrt{(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2}$, це звичайна довжина відрізка прямої між двома точками.

Приклад 2. Розглянемо параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^2$ з радіус-вектором



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} c^1 + r\cos t \\ c^2 + r\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Крива γ представляє собою дугу кола радіуса $r > 0$ з центром в точці $C\,(c^1, c^2)$.

Обчислимо довжину кривої γ. Маємо:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} c^1 + r\cos t \\ c^2 + r\sin t \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos)^2} = r$$

$$l(\gamma) = \int_\alpha^\beta \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt = \int_\alpha^\beta r\ dt = rt\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = (\beta - \alpha)r$$

Відповідь: $l(\gamma) = (\beta - \alpha)r$, це звичайна довжина дуги кола.

Зауваження 1. Поняття довжини можна визначати не тільки для регулярних кривих, але й для більш загального класу *спрямних* кривих. Умова регулярності є достатньою для того, щоб крива була спрямною (мала довжину), але вона не є необхідною.

Зауваження 2. Довжина кривої має властивості адитивності і монотонності:

1) якщо крива $\gamma:(a,b)\to I\!R^n$ утворена з двох кривих $\gamma_1:(a,c)\to I\!R^n$ і $\gamma_2:(c,b)\to I\!R^n$, тобто, $\gamma_1 = \gamma|_{(a,c)}$, $\gamma_2 = \gamma|_{(c,b)}$, то $l(\gamma)=l(\gamma_1)+l(\gamma_2)$;

2) якщо крива $\gamma:(a,b)\to I\!R^n$ містить криву $\gamma^*:(a^*,b^*)\to I\!R^n$, тобто $\gamma^*= \gamma|_{(a^*,b^*)}$, де $(a^*,b^*)\subseteq(a,b)$, то $l(\gamma^*)\leq l(\gamma)$.

Зокрема, якщо крива γ є кусково-регулярною і містить скінчену кількість особливих точок, то її довжина дорівнює сумі довжин її регулярних частин, на які крива розпадається видаленням особливих точок.

Задачі для практичного заняття і самостійної роботи

Задача 2.0.

1) Доведіть, що умова регулярності неявно заданої кривої в площині не залежить від розташування кривої на площині.

Підказка. Покажіть, що умови регулярності неявно заданої кривої інваріантні відносно заміни декартових координат в площині, породжених обертаннями і паралельними переносами:

$$\Phi(x^1,x^2) = 0 \quad \text{регулярна} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Psi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2) = \Phi(\cos\alpha\, \tilde{x}^1 - \sin\alpha\, \tilde{x}^2 + c^1, \sin\alpha\, \tilde{x}^1 + \cos\alpha\, \tilde{x}^2 + c^2) = 0 \quad \text{регулярна.}$$

2) Доведіть, що умова регулярності параметрично заданої кривої не залежить від розташування кривої в обхопному просторі $\mathbb{R}^n$.

Підказка. Покажіть, що умови регулярності параметрично заданої кривої інваріантні відносно заміни декартових координат в обхопному просторі $\mathbb{R}^n$, породжених обертаннями і паралельними переносами:

$$\vec{x} = \vec{f}(t) \quad \text{регулярна} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = U\,\vec{f}(t) + \vec{c} \quad \text{регулярна,}$$

де $U \in SO(n)$ – стала матриця, що відповідає за обертання в просторі $\mathbb{R}^n$, а $\vec{c}$ – постійний вектор,що відповідає за паралельний перенос в просторі $\mathbb{R}^n$.

Задача 2.1. Для наступних параметрично заданих кривих записати рівняння дотичної прямої в заданій точці:

1) Крива γ: $\begin{cases} x^1 = a + r\cos t \\ x^2 = b + r\sin t \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, точка $P(t=\dfrac{\pi}{4})$

2) Крива γ: $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = a\cosh t \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, точка $P(t=0)$

3) Крива γ: $\begin{cases} x^1 = t^2 \\ x^2 = t^3 \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, точка $P(t=0)$

4) Крива γ: $\begin{cases} x^1 = a/\cosh t \\ x^2 = a(t - \tanh t) \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, точка $P(t=t_0)$

5) Крива γ: $\begin{cases} x^1 = r\cos t \\ x^2 = r\sin t \\ x^3 = ht \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, точка $P(t=t_0)$

6) Крива γ: $\begin{cases} x^1 = a\cos\alpha t \\ x^2 = a\sin\alpha t \\ x^3 = b\sin\beta t \\ x^4 = b\sin\beta t \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, точка $P(t=t_0)$.

Задача 2.2. Розглянемо параметрично задану криву

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = t^4 \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty).$$

1) Запишіть рівняння дотичних прямих до кривої γ, що проходять через точку $Q(-1,0)$.

2) Запишіть рівняння дотичних прямих до кривої γ, що проходять паралельно до прямої $x^1 = x^2$.

Задача 2.3.1. Розглянемо неявно задану криву γ в площині:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2\,(x^2 - y^2) = 0\ .$$

1) Запишіть рівняння дотичної прямої кривої γ в точці $P(\sqrt{2},0)$

2) Знайдіть дотичну пряму кривої γ, що проходить через точку $Q(\sqrt{2},\sqrt{2})$

3) Знайдіть дотичну пряму кривої γ , що проходить паралельно до горизонтальної координатної осі x

Задача 2.3.2. Для неявно заданої кривої на площині

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 10 = 0$$

запишіть рівняння дотичної прямої в заданій точці $P(3,1)$.

Задача 2.4. Обчислити довжину наступних параметрично заданих кривих:

1) $\gamma: \begin{cases} x^1 = a + A\cos t \\ x^2 = b + B\sin t \end{cases}, \ t \in (0, 2\pi)$

2) $\gamma: \begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = a\cosh t \end{cases}, \ t \in (-C, C)$

3) $\gamma: \begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = t^2 \end{cases}, \ t \in (-a, a)$

4) $\gamma: \begin{cases} x^1 = -2r\cos t\,(1 + \cos t) \\ x^2 = 2r\sin t\,(1 + \cos t) \end{cases}, \ t \in (0, 2\pi)$

5) $\gamma: \begin{cases} x^1 = a / \cosh t \\ x^2 = a(t - \tanh t) \end{cases}, \ t \in (-C, C)$

6) $\gamma: \begin{cases} x^1 = r\cos t \\ x^2 = r\sin t \\ x^3 = ht \end{cases}, \ t \in (0, 2\pi)$

7) $\gamma: \begin{cases} x^1 = a\cos \alpha t \\ x^2 = a\sin \alpha t \\ x^3 = b\cos \beta t \\ x^4 = b\sin \beta t \end{cases}, \ t \in (A, B)$

Зауваження. Довжину кривої не завжди можна обчислити за допомогою елементарних функцій. Наприклад, обчислення довжини еліпса в загальному випадку потребує використання спеціальних функцій – еліптичних інтегралів / еліптичних функцій.

Задача 2.5.*

1) Для трактриси обчисліть довжину відрізку дотичної прямої від точки дотику прямої з трактрисою до точки перетину прямої з вертикальною координатною віссю x^2 (асимптотою трактриси) і доведіть, що вказана довжина є постійною. Чи існують інші криві на площині, крім трактриси, що мають таку саму властивість?

2) Для гвинтової лінії в $\mathbb{R}^3$ обчисліть кут, під яким дотична пряма нахилена до горизонтальної координатної площини x^1x^2 і доведіть, що кут нахилу є постійним ненульовим. Чи існують інші криві в просторі $\mathbb{R}^3$, крім гвинтової лінії, що мають таку саму властивість?

3) Для «гвинтової» кривої в $\mathbb{R}^4$ обчисліть кути, під якими дотична пряма нахилена до горизонтальної координатної площини x^1x^2 і горизонтальної координатної площини x^3x^4 і доведіть, що вказані кути є постійними. Чи існують інші криві в просторі $\mathbb{R}^4$, крім гвинтової лінії, що мають таку саму властивість?

Задача 2.6.*

Як зміниться довжина кривої, якщо застосувати наступне перетворення в обхопному просторі $I\!R^n$: 1) паралельний перенос, 2) обертання, 3) гомотетія з коефіцієнтом λ?

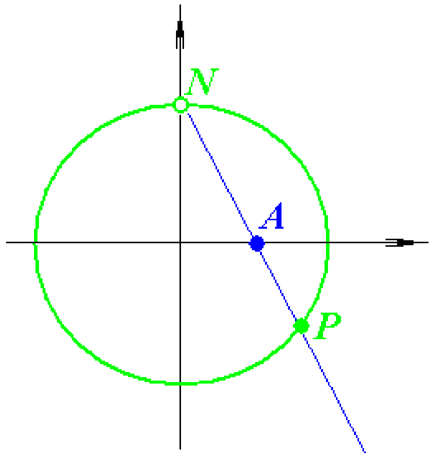
Задача 2.7.* Розглянемо коло γ одиничного радіусу з центром в початку координат:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0$$

З «північного полюсу» $N(0,1)$ проведемо промінь, який перетинає горизонтальну координатну вісь в точці $A(t,0)$.

Обчисліть координати точки P, в якій згаданий промінь перетинає коло γ.

Як буде рухатись точка P по колу γ, коли точка A буде рухатись по горизонтальній координатній осі x^1 від $-\infty$ до $+\infty$?



Задача 2.8.* Обчислити довжину параметрично заданої кривої

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = \dfrac{2r^2 t}{r^2 + t^2} \\ x^2 = \dfrac{r(t^2 - r^2)}{r^2 + t^2} \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

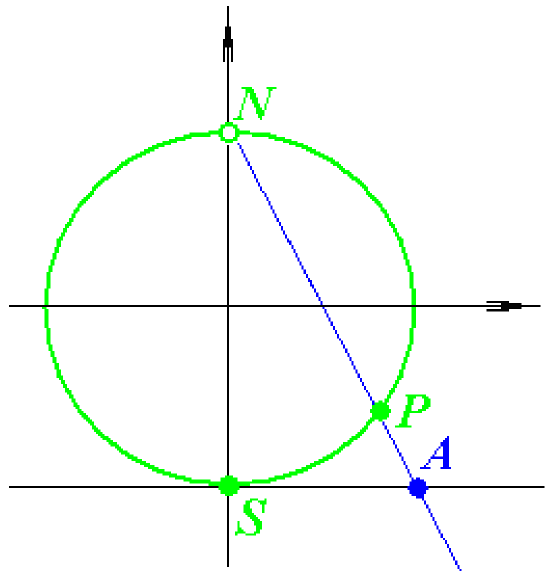
Відповідь: *l(γ) = 2πr*

Зауваження – перевірте отриманий аналітичний результат, побудувавши криву γ і пересвідчившись, що задана крива насправді є колом радіуса r з центром в початку координат, з якого виколотий північний полюс.

Задача 2.9.* Розглянемо коло γ одиничного радіусу з центром в початку координат:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0$$

Проведемо дотичну пряму до кола в «південному полюсі» – точці $S(0,-1)$, це буде горизонтальна пряма $x^2 = -1$.



З «північного полюсу» $N(0,1)$ проведемо промінь, який перетинає побудовану вище дотичну пряму в точці $A(t,-1)$.

Обчисліть координати точки P, в якій згаданий промінь перетинає коло γ

Як буде рухатись точка P по колу γ, коли точка A буде рухатись по горизонтальній координатній осі x^1 від $-\infty$ до $+\infty$?

Задача 2.10.* Розглянемо коло γ одиничного радіусу з центром в початку координат: $(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0$.

Запишіть параметризацію кола, породжену попередньою Задачею 2.9, і обчисліть довжину кола у вказаній параметризації.