Геометрія многовидів

Гладкі многовиди і гладкі відображення

Література:

1. М. М. Постников. Гладкие многообразия (Лекции по геометрии, семестр III)

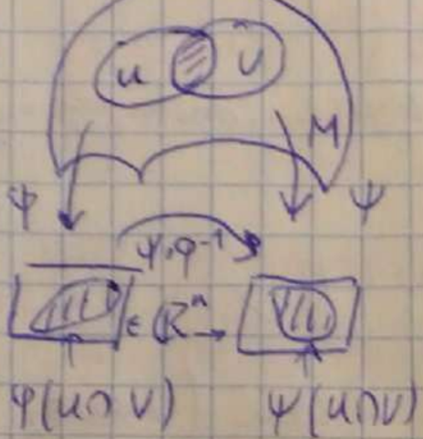
2. М. Милнор, А. Уоллес. Дифференциальная топология. Начальный курс.

3. М. Хирш. Дифференциальная топология.

4. В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс. Начальный курс топологии. Геометрические главы.

def n-вимірним ($n \in \mathbb{Z}_+$) многовидом (топологічним) будемо називати хаусдорфовий з ($\le$) зліченною

базою топологічний простір M такий, що $\forall p \in M$
$\exists$ відкрита $U \ni p$ і гомеоморфізм $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$
(n наз. вимірністю M: $n = \dim M$)
Rem. $\mathbb{R}^n$ тут можна замінити на відкр. кулю $B^n \subset$
$\mathbb{R}^n$ (або на будь-яку відкриту $V \subset \mathbb{R}^n$: V гомеоморфна $\mathbb{R}^n$),
отримаємо екв. означення.
def. Пара (U, φ) з попереднього def. зветься картою
M, U - носієм карти (координатним околом), φ - коорд.
відображенням, якщо $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, $x^i: U \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$
звуться локальними координатами, що відповідають
цій карті. Набір карт $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ зветься
атласом M, якщо $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$
def. Нехай (U, φ), (V, ψ) - карти M. $U \cap V \neq \varnothing$. Відображення переходу (заміни координат) від першої
карти до другої зветься $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$



def. Атлас $\mathcal{A}$ зветься k-гладким (де $k \in \mathbb{Z}_+$ або $k = \infty$), якщо $\forall\, (U,\varphi), (V,\psi) \in \mathcal{A}$ таких, що $U \cap V \neq \emptyset$,

$$\psi \circ \varphi^{-1} \in C^k(\varphi(U\cap V), \psi(U \cap V))$$

Rem. Це буде k-дифеоморфізм відкр. підмножин $\mathbb{R}^n$.

def. Два k-гл. атласи $\mathcal{A}$ і B многовиду M наз. еквівалентними, якщо $A \cup B$ — k-гл. атлас.

Впр. Це відношення еквівалентності.

def. k-гладкою структурою на многовиді M зветься клас еквівалентності k-гл. атласів M. Пара $(M, [\mathcal{A}])$, де $[\mathcal{A}]$ — k-гл. структура на многовиді M, зветься k-гладким многовидом.

Rem. $\forall$ k-гл. стр. (атлас, многовид) є l-гладкою для $l \leq k$, зокрема $\forall$ многовида $\exists$ (тривіальна) 0-гл. стр.

∀ атлас - 0-гл. і ∀ два еквівалентні

Ex. 1. $\mathbb{R}^n$ - n-вимірний ∞-гл, $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$ задає стандартну гладку стр.

2. S^n - n-вимірний ∞-гл.: $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$, стандартна гл. стр. задається атласом з 2 карт (стереогр. проекції)

3. M, N - k-гладкі многовиди => M × N - k-гл. многовид (Впр.) Наприклад, n-вимірний тор $T^n := \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ - ∞-гладкий (і взагалі $\dim M \times N = \dim M + \dim N$),

4. M - n-вимірний k-гладкий, $U \subset M$ - відкрита => U - n-вимірний k-гладкий многовид (Впр.)

5. $\mathbb{RP}^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (n-вимірний дійсний проективний простір) - простір прямих, що проходять через 0.

$\mathbb{RP}^n = \{(x^1 : \ldots : x^{n+1})\}$, де $(x^1 : \ldots : x^{n+1}) = [(x^1, \ldots, x^{n+1})]$.

$(x^1 : \ldots : x^{n+1}) = (\lambda x^1 : \ldots : \lambda x^{n+1})$ $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Або: $\mathbb{RP}^n = S^n / \mathbb{Z}_2$:  – простір пар діаметрально протилежних точок S^n.

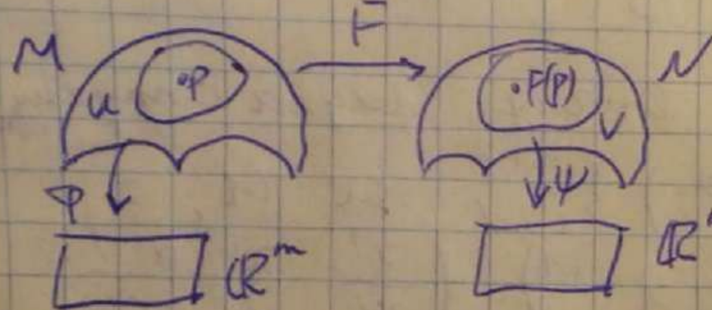
Це n-вимірний ∞-гл. многовид, станд. гладка структура задається атласом $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$, де $U_i = \{(x^1 : \ldots : x^{n+1}) \mid x^i \neq 0\}$, $\varphi_i(x^1 : \ldots : x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right)$.

(комплексний проективний простір)

Впр. Перевірити, що це ∞-гл. атлас. Що таке $\mathbb{CP}^n$? Чи є воно гл. многовидом? Якої вимірності?

def. Нехай M, N – k-гл. многовиди. Неперервне $F: M \to N$ наз. k-гладким, якщо $\forall p \in M$ і $\forall$ карт (U, φ) і (V, ψ) із якихось атласів гладких структур M і N відповідно таких, що $p \in U$, $F(p) \in V$ відображення $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ – k-гладке.

Rem. $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ наз. локальним заданням F у відп. парі карт (у відп. локальних координатах). Це відображення підмножин $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{R}^n$, де $m = \dim M$, $n = \dim N$



(Впр. Яких підмножин?)

Якщо $(x^1, \dots, x^m)$, $(y^1, \dots, y^n)$ - лок. коорд., що відповідають (U, φ) та (V, ψ), то його можна записати у вигляді:

$$y^1 = F^1(x^1, \dots, x^m)$$
$$\dots$$
$$y^n = F^n(x^1, \dots, x^m)$$

Rem. В силу означення гладкої структури, гладкість достатньо перевірити лише для однієї пари карт (U, φ), (V, ψ) в околі кожної $p \in M$ (Впр.)

Множина k - гл. відображень $M \to N$ позначається $C^k(M, N)$. Очевидно,

$C^k(M,N) \subset C^{k-1}(M,N) \subset \ldots \subset C^0(M,N) = C(M,N)$.
Крім того, $F \in C^k(M,N)$, $G \in C^k(L,M) \mapsto F \circ G \in C^k(L,N)$ (Впр.)

Ex. 1. k-гладкі криві $\gamma \in C^k((a,b), M)$, де $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

2. k-гладкі функції $f \in C^k(M) := C^k(M, \mathbb{R})$.

3. k-дифеоморфізми:

def $F: M \to N$ наз. k-дифеоморфізмом, якщо F - біє,
$F \in C^k(M,N)$, $F^{-1} \in C^k(N,M)$. Якщо існує такий
диф-зм, M і N наз. k-дифеоморфними ($M \cong N$)

Впр. Це відношення еквівалентності.
Впр. $\forall$ карти (U, φ) (з атласу k-гл. стр. M) $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ - k-дифео-зм
Rem. Зокрема, F - дифеоморфізм $\Rightarrow$ F - гомеоморфізм $\Rightarrow$
$\dim M = \dim N$.

Впр. Якщо $[A]$ і $[B]$ - k-гл. стр. на M, то $id_M: (M,[A]) \to$
$(M,[B])$ - k-дифеоморфізм $\Leftrightarrow$ $[A] = [B]$.

Rem. Якщо розглядати не id_M, а якесь довільне $F: M \to M$
отримаємо означення еквівалентності гладких структур на M.

Дотичний простір і диференціал

Нехай M - k-гладкий многовид, $k \geq 1$, $n = \dim M$.

<u>def</u> Дотичним вектором M в $p \in M$ будемо називати відображення

$$v : \begin{bmatrix} \text{карти } (U,\varphi) \text{ з} \\ \text{гладкої структури } M \\ \text{такі, що } p \in U \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

таке, що якщо $v((U,\varphi)) = (v^1, \dots, v^n)$, а $v((\tilde{U},\tilde{\varphi})) = (\tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^n)$, то $\forall\, i = \overline{1,n}$

$$\tilde{v}^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p)\, v^j \qquad (*)$$

далі не пишемо

де $(x^1, \dots, x^n)$, $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ - лок. коорд., що відп. (U,φ) і $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$ відповідно, а $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p) := \frac{\partial (\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1})^i}{\partial x^j}(\varphi(p))$ - часткові похідні відображень переходу.

<u>Rem.</u> Тобто $(\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n) = (\tilde{x}^1(x^1, \dots, x^n), \dots, \tilde{x}^n(x^1, \dots, x^n))$

Rem 3 (*) випливає що значення v достатньо задати в одній карті (при цьому значення в $\forall$ парі карт узгоджені за правилом (*) - Вправа), зокрема, якщо це значення $=0$ в одній карті, воно $=0$ і $\forall$ іншої (і в цьому випадку пишемо $v=0$)

def Лінійні операції над дотичними векторами в p задаються наступним чином:

$$(v+w)((U,\varphi)) := v((U,\varphi)) + w((U,\varphi)),$$

$$(\lambda v)((U,\varphi)) := \lambda \cdot v((U,\varphi)),$$

де v, w - дот. вектори в p, $\lambda \in \mathbb{R}$, (U,φ) - карта з $p \in U$

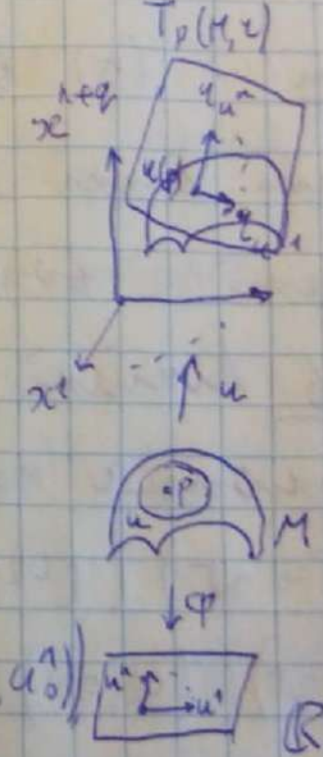
Rem. В силу лінійності (*) $v+w$ і λv - також дотичні вектори в p (коректно визначені).

Cor. Дотичні вектори в p утворюють векторний простір (підпростір у просторі всіх відображень з множини карт в околі p у $\mathbb{R}^n$)

def Цей простір зветься дотичним простором (до) M у

p і позначається T_pM.

Ex. Нехай $\psi \in C^k(M, \mathbb{R}^{n+q})$, $q \in \mathbb{Z}_+$, $p \in M$, (U, φ) - карта з $p \in U$ і лок. коорд. $(u^1, \dots, u^n)$.



Тоді $id \circ \psi \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}$ - лок. задання ψ:

$(u^1, \dots, u^n) \mapsto (x^1(u^1, \dots, u^n), \dots, x^{n+q}(u^1, \dots, u^n))$.

Позначимо

$$\psi_{u^i}(p) := \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)) = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i}(u_0^1, \dots, u_0^n), \dots, \frac{\partial x^{n+q}}{\partial u^i}(u_0^1, \dots, u_0^n)\right)$$

де $(u_0^1, \dots, u_0^n) = \varphi(p)$ - координати p ($\psi_{u^i}(p) \in \mathbb{R}^{n+q}$)

Будемо розглядати такі ψ, для яких $\forall\, p \in M$ і $\forall$ карти (U, φ) в околі p вектори $\{\psi_{u^1}(p), \dots, \psi_{u^n}(p)\}$ лінійно незалежні в $\mathbb{R}^{n+q}$. У цьому випадку ψ зветься регулярним (або занурення), а пара (M, ψ) - підмноговидом у $\mathbb{R}^{n+q}$ (пізніше ми дамо відповідні загальні означення). Наприклад, при $n=2, q=1$ ця умова еквівалентна $[\varphi_{u^1}(p), \varphi_{u^2}(p)] \neq 0$. У заг. випадку вона також еквівалентна умові $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i}(\varphi(p))\right)_{\substack{a=\overline{1,n+k} \\ i=\overline{1,n}}} = n$ (м-ця Якобі лок. задання φ).

Нехай тепер $p \in U \cap \tilde{U}$, де $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ – якась інша карта з лок. коорд. $(\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n)$. Тоді $\forall\ i = \overline{1,n}$:

$$\varphi_{\tilde{u}^i}(p) = \frac{\partial(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{\varphi}(p)) = \frac{\partial(\varphi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \tilde{\varphi}^{-1})}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{\varphi}(p)) = \left[\begin{smallmatrix}\text{похідна}\\ \text{компо-}\\ \text{зиції}\end{smallmatrix}\right] =$$

$$= \frac{\partial(\varphi \circ \phi^{-1})}{\partial u^j}(\phi(p))\, \frac{\partial(\phi \circ \tilde{\varphi}^{-1})^j}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{\varphi}(p)) = \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{u}^1_0, \dots, \tilde{u}^n_0) \cdot \varphi_{u^j}(p),$$

де $(\tilde{u}^1_0, \dots, \tilde{u}^n_0) = \tilde{\varphi}(p)$ – нові координати p, і $\left(\frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{\varphi}(p))\right)^n_{i,j=1}$ – м-ця Якобі відобр. переходу $\phi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ у $\tilde{\varphi}(p)$. Оскільки це відобр. – дифеоморфізм, ця м-ця невироджена. Тому система $\{\varphi_{\tilde{u}^1}(p), \dots, \varphi_{\tilde{u}^n}(p)\}$ також лін. незалежна (тобто умову регулярності достатньо перевірити в одній карті), і лінійна оболонка

$span\{\varphi_{\tilde{u}^1}(p), .., \varphi_{\tilde{u}^n}(p)\} = span\{\varphi_{u^1}(p), .., \varphi_{u^n}(p)\}$ – залежить лише від (M, φ) і p. Назвемо цей підпростір $\mathbb{R}^{n+q}$ $T_p(M, \varphi) := span\{\varphi_{u^i}(p)\}_{i=1}^n$ дотичним підпростором (M, φ) у p. Відповідний афінний підпростір, що проходить через $\varphi(p)$, назвемо аф. дотичним підпростором (M, φ) у p. Тоді $\{\varphi_{u^i}(p)\}_{i=1}^n$ – його базис.

Для $M = (a, b) \subset \mathbb{R}$ і кривої $\varphi = \gamma \in C^k((a, b), \mathbb{R}^{n+q})$
$\varphi_t(t_0) = \gamma'(t_0) = ((\gamma^1)'(t_0), .., (\gamma^{n+q})'(t_0))$ – дотичний вектор, і умова регулярності означає $\gamma'(t_0) \neq 0 \ \forall t_0 \in (a, b)$
Тоді $T_{t_0}((a, b), \gamma)$ – це пряма, натягнута на $\gamma'(t_0)$, а відп. аф. підпростір – дотична до γ у $\gamma(t_0)$.

Зауважимо, що $\varphi_{u^i}(p)$ – це дотичний вектор до кривої $t \mapsto (u_0^1, .., \overset{i}{t}, .., u_0^n) \overset{\varphi \circ \varphi^{-1}}{\longmapsto} (x^1(u_0^1, .., t, .., u_0^n), .., x^{n+q}(u_0^1, .., t, .., u_0^n))$ (i-тої координатної лінії (M, φ) у відп. лок. коорд.)

у $t_0 = u_0^i$. Нехай тепер $\gamma \in C^k((a,b), M)$ – крива в M.
Тоді $r \circ \gamma \in C^k((a,b), \mathbb{R}^{n+q})$ (як композиція гладких) –
гл. крива в $\mathbb{R}^{n+q}$. Нехай $\gamma(t_0) = p$. Тоді лок. задання
$\gamma : (\varphi \circ \gamma)(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ (воно визначене на
$\gamma^{-1}(U) \ni t_0$). Для $t \in \gamma^{-1}(U)$ $(r \circ \gamma)(t) = (r \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)(t) =$
$= (x^1(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)), \dots, x^{n+q}(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)))$, тому
$(r \circ \gamma)'(t_0) = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i}(\gamma^1(t_0), \dots, \gamma^n(t_0))(\gamma^i)'(t_0), \dots, \frac{\partial x^{n+q}}{\partial u^i}(\gamma^1(t_0), \dots, \gamma^n(t_0))(\gamma^i)'(t_0)\right) =$
$= (\gamma^i)'(t_0) \, r_{u^i}(p) \in T_p(M, r)$

Впр. Перевірити, що вірне і обернене включення, тобто
$T_p(M, r) = \{ (r \circ \gamma)'(t_0) \mid \gamma \in C^k((a,b), M) : \gamma(t_0) = p \}$.

Отже, дотичний підпростір – це множина усіх дотичних векторів до кривих, що проходять через p у M.
Відповідно, аф. дот. підпростір – це об'єднання дотичних до цих кривих.

Нехай $v \in T_p(M,\varphi)$. Розкладемо його по двох базисах:

$$v = v^i \varphi_{u^i}(p) = \tilde{v}^i \varphi_{\tilde{u}^i}(p) \ominus$$

З співвідношень вище:

$$\ominus\ \tilde{v}^i \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}(p)\, \varphi_{u^j}(p)$$

(тут повинно бути $\tilde{\varphi}(p)$, але ми спростили позначення)

Прирівнюючи коеф. при базисних векторах, отримаємо:

$$v^j = \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}(p)\, \tilde{v}^i \qquad j = \overline{1,n}$$

У ан-но: $\tilde{v}^j = \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i}(p)\, v^i$.

Ми отримали правило (*). Це мотивує наше означення і демонструє, що можна встановити лін. ізоморфізм між T_pM і $T_p(M,\varphi)$ для будь-якого регулярного $\varphi: M \to \mathbb{R}^{n+q}$: якщо (U,φ) - якась карта в околі p з лок. коорд. $(u^1,..,u^n)$, і $v((U,\varphi)) = (v^1,..,v^n)$, то $v \mapsto v^i \varphi_{u^i}(p)$.

Повернемося до загального випадку і розглянемо приклад дотичного вектора:

Ex. Нехай (U, φ) - карта в околі p з лок. коорд. $(x^1, .., x^n)$. Позначимо $\forall\ i = \overline{1,n}$ через $\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM$ вектор, що ставить у відповідність карті (U, φ) набір $(0, .., \underset{i}{1}, .., 0) \in \mathbb{R}^n$ (як ми зауважили, значення у будь-якій іншій карті знаходиться тоді зі допомогою $(*)$).

Rem. Якщо тепер $v \in T_pM$ і $v((U, \varphi)) = (v^1, .., v^n) = v^1(1, .., 0) + .. + v^n(0, .., 1)$, то $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. У якщо $v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$, то, розглянувши значення цього вектора в (U, φ), отримаємо $v^1 = .. = v^n = 0$. Тобто $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, .., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ - повна і лін. незалежна в T_pM.

Cor. $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, .., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ - базис T_pM. Зокрема, $\dim T_pM = n$.

Rem. У $T_p(M,\mathcal{A})$ вектору $\frac{\partial}{\partial x^i}$ відповідає $\gamma_{u^i}(p)$.

Def Похідною функції $f \in C^k(M)$ у напрямку вектора $v \in T_pM$ (у точці p) зветься

$$v(f) := v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \in \mathbb{R},$$

де $(x^1, \dots, x^n)$ – лок. координати деякої карти (U, φ), $p \in U$,

$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (як ми бачили, це $\Leftrightarrow v((U,\varphi)) = (v^1, \dots, v^n)$),

і $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))$ – спрощене позначення.

Рч. Це означення коректне, тобто не залежить від вибору карти в околі p.

▷ Нехай $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ – інша карта з лок. коорд. $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ і $v = \tilde{v}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}$. Тоді

$$\tilde{v}^i \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i}(p) = [(*)] = v^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p) \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i}(p) = \begin{bmatrix} \text{розписуємо} \\ \text{позначення} \end{bmatrix} =$$

$$= v^j \frac{\partial (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^i}{\partial x^j}(\varphi(p)) \cdot \frac{\partial (f \circ \tilde{\varphi}^{-1})}{\partial \tilde{x}^i}(\tilde{\varphi}(p)) = \begin{bmatrix} \text{диф.} \\ \text{композиції} \end{bmatrix} =$$

$$= v^j \frac{\partial (f \circ \cancel{\tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\varphi}} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p)) = v^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)$$ △

Rem. Зокрема, $\frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \delta^j_i \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$.

Rem. $\forall\, v \in T_pM$ визначає відображення $C^k(M) \to \mathbb{R}$: $f \mapsto v(f)$, що має наступні властивості:

1. Лінійність: $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$;

2. Правило Лейбніца: $v(fg) = v(f)\cdot g(p) + f(p)\cdot v(g)$;

$\forall\, f, g \in C^k(M)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Це випливає з def. і власт. частк. похідних.

Можна показати, що між простором таких відображень і T_pM ця відповідність встановлює природній ізоморфізм (тому ще говорять, що дотичний вектор — це диференціювання).

Ex. Якщо $M = \mathbb{R}^n$ або $M = U$ - відкрита підмножина $\mathbb{R}^n$, то $\forall\, p \in M$ у околі p існують глобальні координати $(x^1, \dots, x^n)$ простору і відп. базис $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ T_pM. Тоді ототожнимо T_pM з $\mathbb{R}^n$: $v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \leftrightarrow (v^1, \dots, v^n)$.

def. Нехай $\gamma \in C^k((a,b), M)$ – гладка крива в M, $t_0 \in (a,b)$: $\gamma(t_0) = p$. Тоді дотичним вектором γ в t_0 зветься

$$\gamma'(t_0) := (\gamma^i)'(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p M,$$

де $(x^1, \ldots, x^n)$ – лок. координати деякої карти (U, φ), $p \in U$, $(\gamma^1, \ldots, \gamma^n) := \varphi \circ \gamma : \gamma^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n$ – лок. задання γ

Якщо $\gamma'(t_0) \neq 0$, γ наз. регулярною в t_0 (і регулярною, якщо вона рег. $\forall t_0$)

Рч. Це озн. коректне, тобто не залежить від вибору карти в околі p.

▷ Нехай $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ – інша карта в околі p з лок. коорд. $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$, і $(\tilde{\gamma}^1, \ldots, \tilde{\gamma}^n) := \tilde{\varphi} \circ \gamma = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma$. Тоді $\forall\ i = \overline{1,n}$

$$(\tilde{\gamma}^i)'(t_0) = \frac{\partial (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^i}{\partial x^j} (\varphi(\underbrace{\gamma(t_0)}_{p})) ((\varphi \circ \gamma)^j)'(t_0) = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p) (\gamma^j)'(t_0)$$

тобто $\gamma'(t_0) : (U, \varphi) \mapsto ((\gamma^1)'(t_0), \ldots, (\gamma^n)'(t_0))$ задовольняє $(*)$ і визначає елемент $T_p M$ з розкладенням по $\frac{\partial}{\partial x^i}$ з **def.** ◁