

Домашнє завдання до заняття 18.02.25

- (30.5) Довести, що будь-яке неперервне відображення зірчатої підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$ у довільний топологічний простір Y гомотопне постійному.
- (30.13) Нехай X – довільний топологічний простір, а $f, g: X \rightarrow S^n$ – неперервні відображення такі, що евклідова відстань $|f(x) - g(x)| < 2$ для будь-якої $x \in X$. Довести, що тоді f і g гомотопні.
- (30.14) Довести, що якщо неперервне відображення $f: S^n \rightarrow S^n$ не має нерухомих точок, тобто $f(x) \neq x$ для будь-якої $x \in S^n$, то f гомотопне центральній симетрії сфери $x \mapsto -x$.
- (30.K) Довести, що неперервні відображення топологічних просторів $f, g: X \rightarrow Y \times Z$ гомотопні тоді й тільки тоді, коли гомотопні відображення у парах $p_Y \circ f, p_Y \circ g$ та $p_Z \circ f, p_Z \circ g$, де $p_Y: Y \times Z \rightarrow Y$ і $p_Z: Y \times Z \rightarrow Z$ – канонічні проєкції.

Додаткові задачі (не оцінюються)

- (25.Ix) Нехай X – компактний топологічний простір, а Y – метричний простір. Довести, що метрична топологія метрики рівномірної збіжності на $C(X, Y)$ є компактно-відкритою (деталі див. у вправі 1.1 лекцій).
- (30.6) За якої (топологічної) необхідної та достатньої умови на топологічний простір Y будь-які два неперервні відображення зірчатої підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$ у Y гомотопні (див. задачу 30.5)?
- (30.10) Нехай x_1, \dots, x_k – попарно різні точки \mathbb{R}^n . Знайти кількість класів (вільної) гомотопії неперервних відображень з m -елементної множини з дискретною топологією у $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ (у залежності від m, n і k).
- (31.1) Нехай $f, g, h: I \rightarrow X$ – шляхи у деякому хаусдорфовому топологічному просторі X такі, що $f(1) = g(0)$, $g(1) = h(0)$. Довести, що $(f * g) * h = f * (g * h)$ тоді й тільки тоді, коли кожен з цих шляхів постійний.
- (31.2) Навести приклад непостійних шляхів $f, g, h: I \rightarrow X$ у просторі X з антидискретною топологією таких, що $f(1) = g(0)$, $g(1) = h(0)$ і $(f * g) * h = f * (g * h)$.