30.D Нехай $F: X\times I \to Y$ (X, Y – ТП), і $\forall z \in I$ $f_z = F(\cdot, z)$: $x \mapsto F(x,z)$ неперервне $X \to Y$. Чи обов'язково F неперервне?

Ні. Можна взяти, наприклад, $F(x,z) = g(z)$, де $g: I \to Y$ – не неперервне. Тоді $\forall z$ f_z – постійне у $g(z) \Rightarrow$ непер.
g – не непер. $\Rightarrow \exists$ відкр. $U \subset Y$: $g^{-1}(U)$ не відкр. Але $F^{-1}(U) = X \times g^{-1}(U)$ тоді теж не відкр. $\Rightarrow F$ не непер.

30.Q,R (Впр. 1.1. (3) з лекцій).
Нехай X, Y – ТП, $C(X;Y)$ – з компактно-відкритою топ.
$\forall F: X \times I \to Y$ поставимо у відп. $h: I \to C(X,Y)$:
$h(z)(x) := F(x,z)$ (і навпаки, h відповідає F)
($\forall z \in I, x \in X$). Тоді:
- $F \in C(X\times I, Y) \Rightarrow h \in C(I, C(X,Y))$, тобто $\forall$ гомотопії відображень $f_0 = F(\cdot, 0)$ і $f_1 = F(\cdot, 1)$ відповідає шлях у $C(X,Y)$, що з'єднує $h(0) = f_0$ і $h(1) = f_1$.
- Якщо X лок. компактний і хаусдорфовий, то вірно й $\Leftarrow$.

$\Rightarrow$ Отже, нехай F непер. $\Leftrightarrow$ $\forall$ відкр. $U \subset Y$ $F^{-1}(U)$ відкр. у $X \times I$.

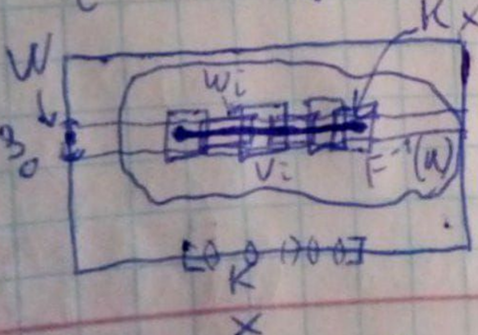
Треба довести: h непер. $\Leftrightarrow$ прообраз $\forall$ відкр. $C(X,Y)$ відкр. $\Leftrightarrow$ $\forall$ компактної $K \subset X$ і відкр. $U \subset Y$ $h^{-1}(W(K,U))$ відкр. в I, бо $\{W(K,U)\}$ утворюють передбазу $C(X,Y)$: $\forall$ відкр. у $C(X,Y)$ має вигляд $\bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i=1}^{n_\alpha} W(K_{\alpha i}, U_{\alpha i})$ $\Rightarrow$ її прообраз $\bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i=1}^{n_\alpha} h^{-1}(W(K_{\alpha i}, U_{\alpha i}))$.

При цьому $W(K,U) = \{f \in C(X,Y) \mid f(K) \subset U\}$ $\Rightarrow$

$$h^{-1}(W(K,U)) = \{s \in I \mid h(s)(K) \subset U\} = \{s \in I \mid \forall x \in K \ F(x,s) \in U\} =$$

$F(K,s) = F(K \times \{s\})$

$$= \{s \in I \mid K \times \{s\} \subset F^{-1}(U)\}.$$



Нехай $s_0 \in h^{-1}(W(K,U)) \Leftrightarrow K \times \{s_0\} \subset F^{-1}(U)$.

$F^{-1}(U)$ відкр. $\Rightarrow$ $\forall x \in K$ $\exists$ відкр. $V_x \subset X$, $W_x \subset I$: $(x, s_0) \subset V_x \times W_x \subset F^{-1}(U)$. Тоді

$\{V_x \times W_x\}_{x \in K}$ – відкр. покриття компакта $K \times \{s_0\} \cong$ $\cong K$ $\Rightarrow$ $\exists$ скінч. підпокриття $\{V_i \times W_i\}_{i=1}^{n}$.

Покр. $W := \bigcap_{i=1}^{n} W_i$ — відкр. окіл z_0. $\forall z \in W$ $\forall x \in K$ $\exists i : (x, z_0) \in V_i \times W_i \subset F^{-1}(U) \Rightarrow (x, z) \in V_i \times W \subset$ $\subset V_i \times W_i \subset F^{-1}(U)$. Тобто $z \in h^{-1}(W(K,U))$. Т.ч. $W \subset h^{-1}(W(K,U))$. Звідси $h^{-1}(W(K,U))$ — відкрита.

$\Leftarrow$. Нехай X — лок. компактний і хаусдорфовий. За def., X — лок. комп. $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ $\exists$ відкр. $V \ni x$: $\overline{V}$ компактне.

Рч. X — лок. комп. і хаусд. $\Rightarrow$ $\forall x \in X$ і $\forall$ відкр. $U \ni x$ $\exists$ відкр. $W \ni x$: $\overline{W} \subset U$ і $\overline{W}$ компактне.

(З цієї умови випл. лок. компактність при $U = X$, але необов'язково хаусдорфовість).

▶ Отже, $x \in U$ — відкр. За умовою $\exists$ V — відкр. : $x \in V$ і $\overline{V}$ комп.

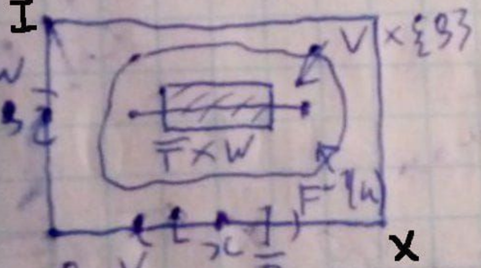
$\overline{V} \setminus U = \overline{V} \cap (X \setminus U)$ — замкнена в індукованій топ. компактного $\overline{V}$ $\Rightarrow$ компакт (у $\overline{V}$, але в X також).

X — хаусд. $\Rightarrow$ $\forall y \in \overline{V} \setminus U$ $\exists$ відкр. (в топ. X) $W_y \ni x$,

$V_y \ni y$: $W_y \cap V_y = \emptyset$ (бо $y \neq x$) Також можемо вважати, що $W_y \subset U \cap V$ $\forall y$: за необхідності, замінимо на $W_y \cap U \cap V$ - відкр. $\ni x$.
$\{V_y\}_{y \in \overline{V} \setminus U}$ - відкр. покр. компакта $\overline{V} \setminus U$ $\Rightarrow \exists$ скінч. підпокриття $\{V_{y_i}\}_{i=1}^{n}$. Покладемо $W := \bigcap_{i=1}^{n} W_{y_i}$ - відкр. (у топ. X), $x \in W \subset U \cap V$. За побудовою, $W \cap \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} = \emptyset$, де відкр. $\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \supset \overline{V} \setminus U$. Тому $\overline{W} \cap \overline{V} \setminus U = \emptyset$ (кожна $y \in \overline{V} \setminus U$ має відкр. окіл $\bigcup_{1}^{n} V_{y_i}$, що не містить точок $W \Rightarrow y \notin \overline{W}$). З іншого боку, $W \subset V \Rightarrow \overline{W} \subset \overline{V}$. Тому $\overline{W} \subset U$. Крім того, $\overline{W}$ - замкнена підмн. компактного $\overline{V} \Rightarrow$ компакт (в $\overline{V}$, а отже в X). ▲

<u>Сл.</u> X лок. комп. і хаусд. $\Rightarrow X$ регулярний.
▲ X - хаусд. $\Rightarrow X - T_1$. Тому треба перевірити, що $X - T_3 \Leftrightarrow$ $\forall x \in X$: $\forall$ відкр. $U \ni x$ $\exists$ відкр. $W \ni x$: $\overline{W} \subset U$. Це вип. з Л. ▲
Повернемося до задачі. Отже, відомо, що $F : X \times I \to Y$ таке, що відповідне $h : I \to C(X, Y) : s \mapsto F(\cdot, s)$ неперервне.
Треба довести, що F - непер., тобто що $\forall$ відкр. $U \subset Y$ $F^{-1}(U)$ відкр.

Нехай $(x,z) \in F^{-1}(U)$. $h(z) = F(\cdot, z) \in C(X,Y)$
і $h(z)(x) = F(x,z) \in U \Rightarrow \exists$ відкр. $V \ni x$ у X:
$U \supset h(z)(V) = F(V \times \{z\})$. X - лок. комп. і хаусд. $\Rightarrow$
за Pr. $\exists$ відкр. $T \ni x$: $\overline{T} \subset V$ і $\overline{T}$ - компакт. Зокрема,
$h(z)(\overline{T}) \subset h(z)(V) \subset U \Rightarrow h(z) \in W(\overline{T}, U)$. За непер.
h $\exists$ відкр. $W \ni z$: $h(W) \subset W(\overline{T}, U)$ (бо $W(\overline{T}, U)$ - відкр.).
Т.ч., $W \subset h^{-1}(W(\overline{T}, U)) \Leftrightarrow$ (як вище) $\Leftrightarrow \overline{T} \times W \subset F^{-1}(U)$.



Отже, $T \times W$ - відкр., і $(x,z) \in T \times W \subset \overline{T} \times W \subset F^{-1}(U)$. Це й значить, що $F^{-1}(U)$ - відкр., F - непер.

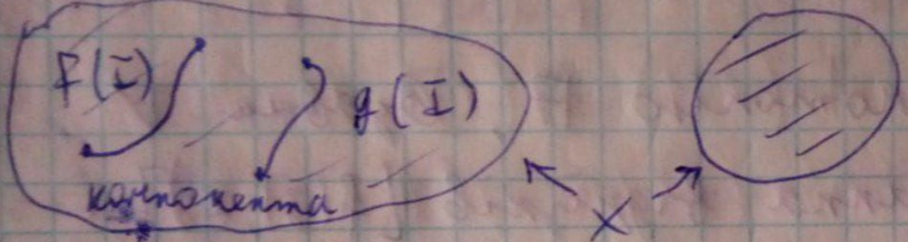
Це все залишиться вірним, якщо замінити I на довільний Z.

30.3 (30.9, Впр. 3.1 з лекцій).

Шляхи $f, g : I \to X$ гомотопні $\Leftrightarrow f(I), g(I)$ лежать в одній комп. лін. зв'язності X.

I - лін. зв., f, g - непер. $\Rightarrow f(I), g(I)$ лін. зв. $\Rightarrow$ лежать у деяких комп. лін. зв. (але, можливо, різних).

$\underline{\Rightarrow}$. $f \sim g \Rightarrow \exists$ гомотопія $F \in C(I \times I, X)$:
$F(\cdot, 0) = f$, $F(\cdot, 1) = g$. $I \times I$ лін. зв., F непер. $\Rightarrow$
$F(I \times I)$ лін. зв. $\Rightarrow$ $F(I \times I)$ лежить у деякій комп. лін. зв.
$X \Rightarrow f(I) = F(I \times \{0\}) \subset F(I \times I)$ і $g(I) = F(I \times \{1\}) \subset$
$\subset F(I \times I)$ лежать в тій же.



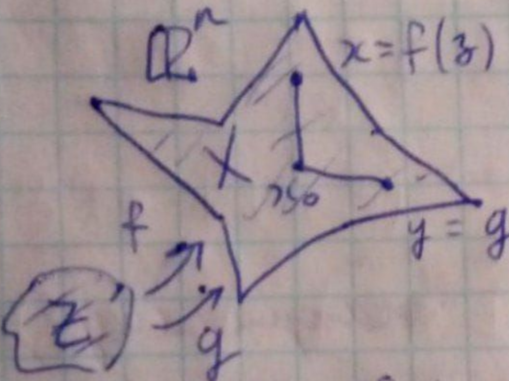
$\underline{\Leftarrow}$. Будь-який шлях гомотопний постійному: наприклад,
$f \sim e_{f(0)}$. Гомотопія:
$F(t, s) = f(ts)$ – непер. ($I \times I \xrightarrow{(s,t) \mapsto st} I \xrightarrow{f}$ – комп. непер.)
$F(t, 0) = f(0)\ \forall t$, $F(t, 1) = f(t)\ \forall t$, тому це потр.
гомотопія. Ан-но, $g \sim e_{g(0)}$.
За умовою, $f(0) \in f(I)$ і $g(0) \in g(I)$ лежать в одній
комп. лін. зв. $\Rightarrow \exists$ шлях $h: I \to X$: $h(0) = f(0)$,
$h(1) = g(0)$. Тоді $H(t, s) = h(s)$ – гомотопія $e_{f(0)}$ і $e_{g(0)}$.
(це Cor. 1.1. з лекцій).

Отже, $f \sim e_{f(0)} \sim e_{g(0)} \sim g$.

30.4. (Впр. 1.2. лекції)

$\forall$ неперервних $f, g : Z \to X$, де $X \subset \mathbb{R}^n$ – зірчата, $f \sim g$.

Нехай x_0 – центр X: $\forall x \in X$ $[x_0, x] \subset X$



Побудуємо гомотопію F, взявши $\forall$ $z \in Z$ об'єднання відрізків $[f(z), x_0]$ і $[x_0, g(z)]$:

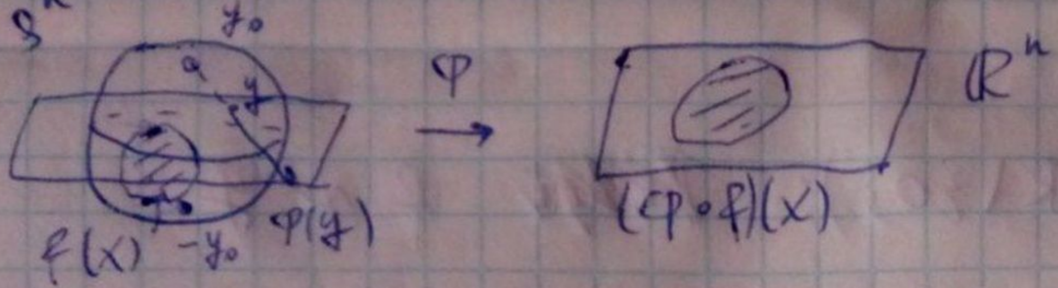
$$F(z,s) = \begin{cases} (1-2s)f(z) + 2s x_0, & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ (2-2s)x_0 + (2s-1)g(z), & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

; $F : Z \times I \to X$ за зірчатістю.

Непер. (з непер. f, g і лінійних відобр.); при $s = \frac{1}{2}$ маємо x_0), $F(z,0) = f(z)$, $F(z,1) = g(z)$ $\forall z$.

30.7. $f \in C(X, S^n)$, $n \geq 1$, f – не сюрʼєкт. Показати, що f гомотопне постійному.

За умовою, $\exists$ $y_0 \in S^n$: $y_0 \notin f(X)$.



Розглянемо стереогр. проекцію $\varphi: S^n \setminus \{y_0\} \to \mathbb{R}^n$. Це гомеоморфізм. Тоді визначене $\varphi \circ f \in C(X, \mathbb{R}^n)$. З опуклості $\mathbb{R}^n$ і попер. задачі, $\varphi \circ f$ гомотопне постійному, скажімо, e_0. Нехай F – відп. гомотопія: $F \in C(X \times I, \mathbb{R}^n)$, $F(\cdot, 0) = \varphi \circ f$, $F(\cdot, 1) = 0$. Тоді $\varphi^{-1} \circ F \in C(X \times I, S^n \setminus \{y_0\}) \subset C(X \times I, S^n)$, $\varphi^{-1} \circ F(\cdot, 0) = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f = f$, $\varphi^{-1} \circ F(\cdot, 1) = \varphi^{-1} \circ e_0 = e_{\varphi^{-1}(0)} = e_{-y_0}$.

Отже, це гомотопія, $f \sim e_{-y_0}$.