Основи алгебраїчної топології

Петров Є.В.

18 лютого 2025 р.

Зміст

Алгебраїчна (алгебрична) топологія – це розділ топології, що вивчає інваріанти алгебраїчної природи: групи, кільця, векторні простори тощо, які певним чином визначаються даним топологічним простором. Найчастіше вони є інваріантами відносно слабшого за гомеоморфність відношення еквівалентності – гомотопічної еквівалентності. Алгебраїчна топологія як предмет систематичного вивчення виникла у кінці дев'ятнадцятого сторіччя у роботах Анрі Пуанкаре (як і два основні підходи, яким ми приділятимемо увагу – гомотопічний і гомологічний), але й досі займає центральне місце в топології та її застосуваннях. Ми почнемо з деяких важливих для неї загальнотопологічних понять.

1 Гомотопія

У цьому розділі ми побачимо, що топологія встановлює відношення еквівалентності не тільки між просторами, а й між відображеннями. Поняття гомотопії формалізує інтуїтивне уявлення про "деформацію" одного відображення в інше. Нагадаємо, що літерою I традиційно позначається відрізок $[0, 1]$.

Означення 1.1. Нехай $f, g\colon X \to Y$ – неперервні відображення топологічних просторів. *Гомотопією* f і g зветься неперервне відображення $F\colon X \times I \to Y$ таке, що $F(x, 0) = f(x)$ і $F(x, 1) = g(x)$ для будь-якої $x \in X$. Гомотопія F відображень f і g зветься A*-гомотопією*, де $A \subset X$ – деяка підмножина, якщо крім цього $F(x, s) = f(x) = g(x)$ для будь-яких $x \in A$ і $s \in I$. Якщо існує гомотопія (відповідно, A-гомотопія) f і g, то говорять, що f *гомотопне* (A*-гомотопне*) g і пишуть $f \sim g$ ($f \underset{A}{\sim} g$).

Зауваження. Тут на $X \times I$ вводиться, як зазвичай, топологія прямого добутку. A-гомотопію ще називають гомотопією, що *зв'язана на* A. З означення випливає, що для її існування необхідне співпадіння f і g на A: $f|_A = g|_A$. "Звичайна" гомотопія (т. зв. *вільна*) – це $\varnothing$-гомотопія.

Твердження 1.1. *A-гомотопність відображень є відношенням еквівалентності на $\{f \in C(X, Y) \mid f|_A = f_A\}$ (підмножині неперервних відображень з X у Y, що збігаються на A з деяким фіксованим f_A). Зокрема, гомотопність – відношення еквівалентності на $C(X, Y)$.*

Доведення. Перевіримо виконання аксіом еквівалентності для A-гомотопності (звичайно, вони тоді будуть виконуватися й у частковому випадку гомотопності).

- $f \underset{A}{\sim} f$ для будь-якого f з $f|_A = f_A$: неважко перевірити, що $F(x,s) \coloneqq f(x)$ задає потрібну A-гомотопію.

- Якщо $f \underset{A}{\sim} g$ і F – відповідна A-гомотопія, то визначимо $G\colon X \times I \to Y$ умовою $(x,s) \mapsto F(x, 1-s)$. Воно неперервне як композиція неперервних відображень, $G(x,0) = F(x,1) = g(x)$, $G(x,1) = F(x,0) = f(x)$ для $x \in X$, $G(x,s) = F(x,1-s) = f_A(x) = f(x) = g(x)$ для $x \in A$, $s \in I$, тому G – A-гомотопія g і f. Отже, $g \underset{A}{\sim} f$.

- Нехай $f \underset{A}{\sim} g$, $g \underset{A}{\sim} h$. Зауважимо, що при цьому $h|_A = g|_A = f|_A = f_A$ за означенням A-гомотопності. Нехай F і G – відповідні A-гомотопії. Визначимо $H\colon X \times I \to Y$ умовою

  $$H(x,s) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} F(x,2s), & s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ G(x, 2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

  Це відображення коректно визначене, бо при $s = \frac{1}{2}$ маємо $F(x,1) = g(x) = G(x,0)$ за умовою. Його неперервність випливає з неперервності F і G (аналогічно до неперервності добутку шляхів; див. також [3, с. 63-64]). При цьому $H(x,0) = F(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = G(x,1) = h(x)$ для $x \in X$ і $H(x,s) = f_A(x) = f(x) = h(x)$ для $x \in A$, $s \in I$ за властивостями F і G. Отже, H – A-гомотопія, тобто $f \underset{A}{\sim} h$.

■

Зауваження. Гомотопія F задає для кожного $s \in I$ відображення $f_s \coloneqq F(\cdot, s)\colon X \to Y$ (тобто $f_s(x) = F(x,s)$ для $x \in X$), що є неперервним як композиція неперервних $x \mapsto (x,s)$ (перевірте, що таке відображення $X \to X \times I$ дійсно неперервне) і F. Тобто гомотопію можна розуміти як "неперервну сім'ю" відображень $\{f_s\}_{s \in I} \subset C(X,Y)$ або як "шлях" $I \to C(X,Y)\colon s \mapsto f_s$. При цьому за означенням $f_0 = f$ і $f_1 = g$, тобто цей "шлях" з'єднує f і g у $C(X,Y)$.

Виникає природне запитання: чи можна ввести топологію на $C(X,Y)$ так, щоби гомотопії дійсно були шляхами у цьому просторі? Відповідь міститься у наступній вправі (див. також [2, с. 145-148], [3, с. 145-148, 186-187] або [10, с. 281-290]).

Вправа 1.1. Нехай X та Y – топологічні простори. Для будь-яких компактної $K \subset X$ і відкритої $U \subset Y$ позначимо

$$W(K,U) \coloneqq \{f \in C(X,Y) \mid f(K) \subset U\}.$$

1. Показати що $\{W(K,U)\}$ (для усіх пар K і U) є передбазою деякої топології на $C(X,Y)$. Вона зветься *компактно-відкритою.*

2. Показати, що якщо X компактний а Y метричний з метрикою ρ, то компактно-відкрита топологія на $C(X,Y)$ породжується метрикою *рівномірної збіжності*

$$\sigma(f,g) \coloneqq \max_{x\in X} \{\rho(f(x),g(x))\}.$$

   Показати, що для $Y=\mathbb{R}$ (з евклідовою метрикою) збіжність послідовності функцій у цій метриці рівносильна рівномірній збіжності (хоча б для випадку $X=I$).

3. Показати, що якщо X локально компактний та хаусдорфовий, то шляхи у $C(X,Y)$ з компактно-відкритою топологією – це в точності відображення вигляду $s \mapsto F(\cdot,s)$, де F – деяка гомотопія.

Зауваження. З аналогічних міркувань випливає, що для кожної $x\in X$ відображення $I\to Y\colon s\mapsto F(x,s)$ неперервне, а отже є шляхом, що з'єднує точки $F(x,0)=f(x)$ і $F(x,1)=g(x)$. Зокрема, $f(x)$ і $g(x)$ повинні тоді лежати в одній компоненті лінійної зв'язності Y (в силу твердження 28.2 лекцій з топології).

Наслідок 1.1. *Якщо $f,g\colon X\to Y$ гомотопні, то для будь-якої $x\in X$ її образи $f(x)$ і $g(x)$ лежать в одній компоненті лінійної зв'язності Y.*

Приклад 1.1. Нехай $X=\{x\}$ – одноточковий простір. Будь-які відображення $f,g\colon X\to Y$ у довільний простір Y мають вигляд $f\colon x\mapsto f(x)$, $g\colon x\mapsto g(x)$ (і автоматично є неперервними як постійні). Якщо f і g гомотопні, то $f(x)$ і $g(x)$ можна з'єднати шляхом в Y за попереднім наслідком. Неважко побачити, що в даному випадку вірне й обернене: якщо $h\colon I\to Y$ – шлях, що з'єднує $f(x)$ і $g(x)$, то $F(x,s)\coloneqq h(s)$ задає гомотопію f і g.

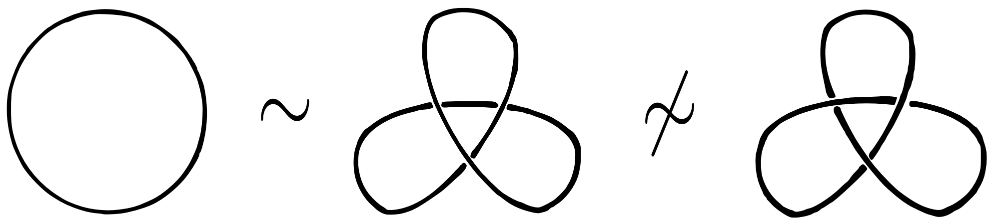
Приклад 1.2. Нехай $Y\subset\mathbb{R}^n$ – опукла підмножина. Тоді для будь-яких топологічного простору X, підмножини $A\subset X$ і відображень $f,g\in C(X,Y)$ таких, що $f|_A=g|_A$, маємо $f\underset{A}{\sim} g$. Дійсно, відображення $F\colon X\times I\to Y$, що визначене умовою $F(x,s)\coloneqq(1-s)\,f(x)+s\,g(x)$ (тобто з'єднує $f(x)$ і $g(x)$ відрізками, пор. з прикладом 23.7 лекцій з топології) є тоді неперервним і задовольняє означенню A-гомотопії f і g.

Вправа 1.2. Показати, що те ж саме вірне для зірчатої $Y\subset\mathbb{R}^n$ і $A=\varnothing$ (тобто для вільних гомотопій).

Приклад 1.3. Нехай тепер $Y \subset S^n$ – відкрита напівсфера n-вимірної сфери для $n \geqslant 1$, тобто її перетин з відкритим напівпростором $\mathbb{R}^{n+1}$ відносно деякої гіперплощини, що проходить через початок координат (центр сфери), а простір X довільний. Аналогічно до минулого прикладу можна показати, що тоді будь-які $f, g \in C(X, Y)$ є A-гомотопними (звичайно, якщо $f|_A = g|_A$). Гомотопія F при цьому будується за допомогою менших дуг великих кіл сфери (випишіть її явно, використовуючи формулу з прикладу 23.8 лекцій з топології).

Зауваження. Інколи розглядають гомотопії між відображеннями, що задовольняють деяким додатковим обмеженням, такі, що усі "проміжні" відображення f_s задовольняють тим же обмеженням. У цьому випадку гомотопію зазвичай називають *ізотопією*.

Приклад 1.4. *Вузлом* називається вкладення кола S^1 у $\mathbb{R}^3$ (тобто будь-яке ін'єктивне неперервне відображення $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ в силу компактності кола і наслідку 20.4 курсу топології). *Ізотопією* вузлів f і g зветься їх гомотопія $F \in C(S^1 \times I, \mathbb{R}^3)$ така, що $f_s = F(\cdot, s)\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ – вузол для кожного $s \in I$. Якщо існує ізотопія вузлів, вони називаються *ізотопними*. Нижче зображені т. зв. *тривіальний вузол*, вузол, що ізотопний тривіальному, і вузол, що їм не ізотопний – *трилисник* (але доведення цієї неізотопності потребує спеціальних інваріантів). Детальніше див., наприклад, у [5, с. 213-239], [6] та [9, с. 209-238, с. 239-271 перекладу].



Розглянемо цікавий приклад застосування гомотопії до задачі продовження відображень (іншими прикладами цього класу топологічних задач є теорема Тітце з курсу топології та вправа 2.3 далі). Нагадаємо, що межею стандартної замкненої кулі є стандартна сфера: $\partial D^n = S^{n-1}$.

Твердження 1.2. *Нехай Y – топологічний простір і $n \geqslant 1$. Неперервне відображення $f\colon S^{n-1} \to Y$ продовжується до неперервного $\overline{f}\colon D^n \to Y$ (тобто $\overline{f}|_{S^{n-1}} = f$) тоді й тільки тоді, коли воно гомотопне постійному відображенню.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай $f \in C(S^{n-1}, Y)$ продовжується до $\overline{f} \in C(D^n, Y)$. Виберемо $x_0 \in S^{n-1}$ і покладемо $F(x,s) \coloneqq \overline{f}((1-s)\,x + s\,x_0)$. Таке $F\colon S^{n-1}\times I \to Y$ коректно визначене в силу опуклості D^n, неперервне як композиція неперервних, $F(\cdot,0) = \overline{f}|_{S^{n-1}} = f$ і $F(\cdot,1) = \overline{f}(x_0) = f(x_0)$ – постійне відображення. Тобто F і буде потрібною гомотопією.

$\underline{\Leftarrow}$ Тепер нехай існує гомотопія F відображення f і постійного відображення S^{n-1} у точку $y_0 \in Y$. Побудуємо $\overline{f}\colon D^n \to Y$ наступним чином:

$$\overline{f}(x) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} y_0, & |x| \in [0, \frac{1}{2}]; \\ F\left(\frac{x}{|x|}, 2-2|x|\right), & |x| \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array}\right.$$

Зауважимо, що $\overline{f}$ коректно визначене і неперервне, оскільки при $|x| = \frac{1}{2}$ маємо $F\left(\frac{x}{|x|}, 1\right) = y_0$. При цьому для $|x| = 1$ (тобто $x \in S^{n-1}$) за побудовою $\overline{f}(x) = F(x,0) = f(x)$. Таким чином, $\overline{f}|_{S^{n-1}} = f$.

■

2 Гомотопічна еквівалентність. Ретракти. Стяжність

Відношення еквівалентності між топологічними просторами не обмежуються гомеоморфністю. Розглянемо більш загальне відношення, що є основним саме для алгебраїчної топології.

Означення 2.1. Нехай X та Y – топологічні простори. Неперервні відображення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$ звуться *гомотопічно оберненими* одне до одного, якщо $g \circ f \sim id_X$ і $f \circ g \sim id_Y$. Якщо такі f і g існують, то X та Y називають *гомотопічно еквівалентними* й пишуть $X \sim Y$.

Лема 2.1. *Нехай $f_0, f_1\colon X \to Y$, $g_0, g_1\colon Y \to Z$ – неперервні відображення топологічних просторів, $A \subset X$, $B \subset Y$ – такі підмножини, що $f_0(A) = f_1(A) \subset B$, і $f_0 \underset{A}{\sim} f_1$, $g_0 \underset{B}{\sim} g_1$. Тоді $g_0 \circ f_0 \underset{A}{\sim} g_1 \circ f_1$.*

Доведення. З умови випливає, що $f_0|_A = f_1|_A$ і $g_0|_B = g_1|_B$, тому $(g_0 \circ f_0)|_A = (g_1 \circ f_1)|_A$. Якщо F – A-гомотопія f_0 і f_1, а G – B-гомотопія g_0 і g_1, то $H(x,s) \coloneqq G(F(x,s),s)$ визначає A-гомотопію $g_0 \circ f_0$ і $g_1 \circ f_1$. Дійсно, це неперервне відображення $X \times I \to Z$ як композиція неперервних, $H(x,0) = G(F(x,0),0) = G(f_0(x),0) = g_0(f_0(x))$ та аналогічно для $s = 1$, і $H(x,s) = G(F(x,s),s) = G(f_0(x),s) = g_0(f_0(x)) = g_1(f_1(x))$ для $x \in A$ та довільного $s \in I$, бо $f_0(x) \in B$.

■

Твердження 2.1. *Гомотопічна еквівалентність є відношенням еквівалентності топологічних просторів.*

Доведення. Перевіримо аксіоми еквівалентності.

- $X \sim X$ для будь-якого простору X: достатньо взяти $f = g = id_X$.

- Умови $X \sim Y$ та $Y \sim X$ еквівалентні за означенням (воно симетричне відносно X та Y).

- Покажемо тепер транзитивність. Нехай $X \sim Y$ та $Y \sim Z$, тобто існують $f \in C(X,Y)$, $g \in C(Y,X)$, $h \in C(Y,Z)$ і $k \in C(Z,Y)$ такі, що $f \circ g \sim id_Y$, $g \circ f \sim id_X$, $h \circ k \sim id_Z$ і $k \circ h \sim id_Y$. Тоді $h \circ f \in C(X,Z)$ і $g \circ k \in C(Z,X)$ гомотопічно обернені:

$$(h \circ f) \circ (g \circ k) = h \circ (f \circ g) \circ k \sim h \circ id_Y \circ k = h \circ k \sim id_Z,$$

$$(g \circ k) \circ (h \circ f) = g \circ (k \circ h) \circ f \sim g \circ id_Y \circ f = g \circ f \sim id_X,$$

  де перші гомотопності в кожному рядку випливають з умови та попередньої леми для випадку вільних гомотопій (застосованої двічі, до кожної з композицій). Таким чином, $X \sim Z$.

■

Приклад 2.1. Якщо $f\colon X \to Y$ – гомеоморфізм, то f і f^{-1} неперервні та гомотопічно обернені (бо вони просто обернені). Отже, гомеоморфні простори гомотопічно еквівалентні.

Приклад 2.2. Простір $\mathbb{R}^n$ гомотопічно еквівалентний одноточковому простору $\{y\}$. Дійсно, вибір відображень тут невеликий: нехай $f\colon \mathbb{R}^n \to \{y\}$ переводить всі точки $\mathbb{R}^n$ в y, а $g\colon \{y\} \to \mathbb{R}^n$ переводить y в якусь $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Обидва ці відображення постійні, а отже неперервні. Тоді $f \circ g = id_{\{y\}}$ і $(g \circ f)(x) = x_0$ для будь-якої $x \in \mathbb{R}^n$. З прикладу 1.2 випливає, що постійне відображення $g \circ f$ опуклої $\mathbb{R}^n$ в себе гомотопне $id_{\mathbb{R}^n}$ (при цьому $F(x,s) = (1-s)\,x_0 + s\,x$ задає потрібну гомотопію). Отже, f і g гомотопічно обернені. Також зауважимо, що в силу транзитивності тоді $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^m$ для будь-яких $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Далі цей приклад узагальнимо у прикладі 2.4.

Вправа 2.1. Показати, що з $X \sim Y$ і $Z \sim W$ випливає $X \times Z \sim Y \times W$. Так, в силу попереднього прикладу, циліндр гомотопічно еквівалентний колу: $S^1 \times \mathbb{R} \sim S^1 \times \{y\} \cong S^1$.

Зауваження. Ці приклади демонструють, зокрема, що гомотопічна еквівалентність є слабшим за гомеоморфність відношенням еквівалентності: класи гомотопічної еквівалентності, взагалі кажучи, ширші. Вона не зберігає компактність і навіть потужність множини (але зберігає зв'язність та лінійну зв'язність, див. наступну вправу). Далі ми наведемо ще декілька прикладів гомотопічних еквівалентностей, що пов'язані з поняттям ретракції.

Вправа 2.2. Показати, що якщо $X \sim Y$ і простір X зв'язний (відповідно, лінійно зв'язний), то й простір Y (лінійно) зв'язний. Більш того, у загальному випадку гомотопічно еквівалентні X та Y мають однакові кількості компонент зв'язності та лінійної зв'язності відповідно. Чи вірні аналогічні твердження для властивостей локальних зв'язності та лінійної зв'язності?

Означення 2.2. *Ретракцією* топологічного простору X на його підмножину $A \subset X$ зветься будь-яке неперервне відображення $f\colon X \to A$ таке, що $f|_A = id_A$, тобто $f(x) = x$ для будь-якої $x \in A$. Множину A у цьому випадку звуть *ретрактом* X.

Приклад 2.3. Будь-яка одноточкова підмножина $\{x\} \subset X$ будь-якого простору є його ретрактом: відповідною ретракцією є постійне відображення у x.

Вправа 2.3. Показати, що $A \subset X$ є ретрактом простору X тоді й тільки тоді, коли будь-яке неперервне відображення $g\colon A \to Y$ можна продовжити неперервним $\overline{g}\colon X \to Y$.

Означення 2.3. Ретракція простору X на $A \subset X$ зветься *деформаційною* (відповідно, *строгою деформаційною*), якщо вона гомотопна (A-гомотопна) тотожному відображенню id_X. У цьому випадку A називають *(строгим) деформаційним ретрактом* X.

Зауваження. Тут, коли йдеться про гомотопність ретракції $f\colon X \to A$ і тотожного $id_X\colon X \to X$, фактично мається на увазі не f, а його композиція з включенням $i\colon A \to X$.

Твердження 2.2. *Якщо $A \subset X$ – деформаційний ретракт топологічного простору X, то $X \sim A$.*

Доведення. Дійсно, нехай $f\colon X \to A$ – деформаційна ретракція, а $i\colon A \to X$ – відображення включення. Тоді $f \circ i = id_A$ та $i \circ f \sim id_X$ за умовою (див. попереднє зауваження). Отже, ці відображення гомотопічно обернені, тому $X \sim A$.

■

Приклад 2.4. Всі ретракти будь-якої опуклої підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$, зокрема, всі одноточкові підмножини $\{x\} \subset X$, є строгими деформаційними. Дійсно, якщо A – ретракт X, то відповідна ретракція f та id_X збігаються на A (обидва дорівнюють id_A), а тому A-гомотопні за прикладом 1.2. Аналогічно, всі ретракти будь-якої зірчатої $X \subset \mathbb{R}^n$ є деформаційними в силу вправи 1.2. Тоді з попереднього твердження випливає, що, зокрема, $X \sim \{x\}$ для будь-якої зірчатої (зокрема опуклої) $X \subset \mathbb{R}^n$ і кожної $x \in X$.

Приклад 2.5. Аналогічно до попереднього прикладу, всі ретракти будь-якої відкритої напівсфери S^n для $n \geqslant 1$ є строгими деформаційними в силу прикладу 1.3. Зокрема, така напівсфера гомотопічно еквівалентна кожній своїй точці.

Приклад 2.6. Сфера S^{n-1} є строгим деформаційним ретрактом простору $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (тут $n \geqslant 1$). Дійсно, $f(x) := \frac{x}{|x|}$, очевидно, визначає ретракцію. При цьому $F(x,s) := (1-s)\,\frac{x}{|x|} + s\,x$ задає неперервне відображення $F\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (бо відрізок $\left[\frac{x}{|x|}, x\right]$ не проходить через 0), $F(\cdot, 0) = f$, $F(\cdot, 1) = id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ і $F(x,s) = x$ для будь-яких $x \in S^{n-1}$, $s \in I$. Отже, F є S^{n-1}-гомотопією, тому ретракція f – строга деформаційна. Зокрема, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$ за попереднім твердженням. Інший спосіб це побачити – використати вправу 2.1: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, як пам'ятаємо, гомеоморфний $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ (ми використовували цей факт у прикладі 23.11 з курсу топології), що, у свою чергу, гомотопічно еквівалентний $S^{n-1} \times \{y\} \cong S^{n-1}$.

Означення 2.4. Топологічний простір X зветься *стяжним*, якщо він гомотопічно еквівалентний одноточковому простору: $X \sim \{y\}$.

Твердження 2.3. *Топологічний простір X стяжний тоді й тільки тоді, коли існує $x_0 \in X$ така, що $\{x_0\}$ – деформаційний ретракт X.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Нехай X стяжний, тобто існують гомотопічно обернені $f\colon X \to \{y\}$ і $g\colon \{y\} \to X$. Це постійні відображення (пор. з прикладом 2.2), зокрема, g переводить y у якусь $x_0 \in X$. Тоді $g \circ f\colon x \mapsto x_0$ – ретракція X на $\{x_0\}$, і $g \circ f \sim id_X$ за умовою, тобто ця ретракція деформаційна.

$\underline{\Leftarrow}$ Достатність тут випливає з твердження 2.2.

■

Зауваження. Насправді в якості x_0 можна використати будь-яку точку X (перевірте; це випливає з наступного твердження і того, що будь-які два постійні відображення у лінійно зв'язний простір гомотопні за прикладом 1.1). З прикладів 2.4 і 2.5 випливає, що зірчаті (зокрема опуклі) підмножини $\mathbb{R}^n$ та відкриті напівсфери S^n (при $n \geqslant 1$) стяжні. Іншим прикладом стяжного простору є скінченне зв'язне дерево, яке можна побудувати, послідовно склеюючи відрізки кінцями. Наступне твердження легко виводиться з вправи 2.2, але ми доведемо його безпосередньо.

Твердження 2.4. *Будь-який стяжний топологічний простір є лінійно зв'язним.*

Доведення. Нехай X стяжний. З попереднього твердження випливає, що ретракція f на деяку $\{x_0\} \subset X$ гомотопна id_X. В силу наслідку 1.1, тоді для будь-якої $x \in X$ точки $x_0 = f(x)$ та $x = id_X(x)$ лежать в одній компоненті лінійної зв'язності X. Це й означає, що цей простір лінійно зв'язний.

■

3 Гомотопії шляхів

Наступна вправа демонструє, що поняття гомотопності шляхів у топологічному просторі є не дуже змістовним без додаткових обмежень. Це мотивує наступне за цією вправою означення.

Вправа 3.1. Показати, що шляхи $f, g\colon I \to X$ у топологічному просторі X гомотопні (вільно, тобто у сенсі означення 1.1 при $A = \varnothing$) тоді й тільки тоді, коли $f(I)$ та $g(I)$ лежать в одній компоненті лінійної зв'язності X.

Означення 3.1. Шляхи f і g у топологічному просторі X зі спільними початком та кінцем ($f(0) = g(0)$ і $f(1) = g(1)$) будемо називати *гомотопними*, якщо вони $\{0,1\}$-гомотопні. Класи еквівалентності шляхів відносно цього відношення еквівалентності (тобто $\{0,1\}$-гомотопності) звуться їх *гомотопічними класами.*

Зауваження. Тобто f і g гомотопні, якщо існує $\{0,1\}$-гомотопія (або *гомотопія з закріпленими кінцями*) – відображення $F \in C(I \times I, X)$ таке, що $F(t,0) = f(t)$, $F(t,1) = g(t)$, $F(0,s) = f(0) = g(0)$ і $F(1,s) = f(1) = g(1)$ для будь-яких $t, s \in I$. Зокрема, для кожного s відображення $f_s = F(\cdot, s)$ (див. зауваження після твердження 1.1) теж буде шляхом з тими ж початком та кінцем, що f і g. Нагадаємо, що $\{0,1\}$-гомотопність є відношенням еквівалентності в силу твердження 1.1. У подальшому гомотопність шляхів будемо завжди розуміти саме в сенсі цього нового означення, при цьому писатимемо просто $f \sim g$, а описану вище $\{0,1\}$-гомотопію F будемо називати *гомотопією шляхів* f і g. Гомотопічний клас шляху f позначатимемо через $[f]$ (тобто $[f] = [g]$ означає, що $f \sim g$).

Приклад 3.1. З прикладу 1.2 випливає, що у опуклій підмножині $X \subset \mathbb{R}^n$ будь-які два шляхи зі спільними початком та кінцем гомотопні (це вірно й для зірчатої X, і взагалі для будь-якого стяжного простору, як покажемо далі у твердженні 6.1).

Приклад 3.2. Аналогічно, будь-які два шляхи зі спільними початком та кінцем у відкритій напівсфері S^n для $n \geqslant 1$ гомотопні за прикладом 1.3 (звичайно, така напівсфера теж стяжна).

Лема 3.1. *Нехай $f_0, f_1, g_0, g_1 \colon I \to X$ – шляхи у просторі X, причому $f_0(0) = f_1(0) = x$, $f_0(1) = f_1(1) = g_0(0) = g_1(0) = y$, $g_0(1) = g_1(1) = z$. Якщо $f_0 \sim f_1$ і $g_0 \sim g_1$, то $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$.*

Доведення. Нехай F, G – гомотопії f_0 і f_1, g_0 і g_1 відповідно. Визначимо відображення $H \colon I \times I \to X$ умовою

$$H(t,s) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} F(2t,s), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ G(2t-1,s), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Воно коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{1}{2}$ маємо $F(1,s) = y = G(0,s)$ для будь-якого $s \in I$ за умовою. При цьому $H(\cdot,0) = f_0 * g_0$, $H(\cdot,1) = f_1 * g_1$, $H(0,\cdot) = F(0,\cdot) = x$ і $H(1,\cdot) = G(1,\cdot) = z$. Отже, H – гомотопія шляхів $f_0 * g_0$ і $f_1 * g_1$.

■

Зауваження. Нагадаємо, що, взагалі кажучи, $(f * g) * h \neq f * (g * h)$, тобто добуток шляхів не є асоціативним (перевірте це; у яких випадках така асоціативність все ж має місце?). Але він є таким "у гомотопічному сенсі", як демонструє наступна лема.

Лема 3.2. *Нехай $f, g, h \colon I \to X$ – шляхи у просторі X такі, що $f(1) = g(0) = y$, $g(1) = h(0) = z$. Тоді $(f * g) * h \sim f * (g * h)$.*

Доведення. За означенням добутку шляхів маємо

$$((f * g) * h)(t) = \left[\begin{array}{ll} f(4t), & t \in [0, \frac{1}{4}]; \\ g(4t-1), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ h(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Аналогічно,

$$(f*(g*h))(t) = \left[\begin{array}{ll} f(2t), & t\in[0,\frac{1}{2}]; \\ g(4t-2), & t\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]; \\ h(4t-3), & t\in[\frac{3}{4},1]. \end{array}\right.$$

Визначимо відображення $F\colon I\times I\to X$ умовою

$$F(t,s) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} f\left(\frac{4t}{1+s}\right), & t\in[0,\frac{s+1}{4}]; \\ g(4t-s-1), & t\in[\frac{s+1}{4},\frac{s+2}{4}]; \\ h\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right), & t\in[\frac{s+2}{4},1]. \end{array}\right.$$

Це відображення коректно визначене і неперервне, бо при $t=\frac{s+1}{4}$ і $t=\frac{s+2}{4}$ маємо $f(1)=y=g(0)$ і $g(1)=z=h(0)$ відповідно. Крім того, $F(\cdot,0)=(f*g)*h$, $F(\cdot,1)=f*(g*h)$, $F(0,\cdot)=f(0)$, $F(1,\cdot)=h(1)$. Отже, F – потрібна гомотопія шляхів.

$\blacksquare$

Зауваження. Зокрема, звідси випливає, що для гомотопічних класів шляхів можна писати $[f*g*h]$, не розставляючи дужки (замість $[(f*g)*h]=[f*(g*h)]$). За індукцією отримуємо, що це так і для довільної скінченної кількості шляхів.

Лема 3.3. *Нехай $f\colon I\to X$ – шлях у просторі X з початком $f(0)=x$ та кінцем $f(1)=y$. Тоді $e_x*f\sim f\sim f*e_y$.*

Доведення. Нагадаємо, що постійний шлях e_x – це просто постійне відображення I в точку x. Доведемо другу гомотопність, перша доводиться аналогічно (зробіть це). За означенням добутку шляхів:

$$(f*e_y)(t) = \left[\begin{array}{ll} f(2t), & t\in[0,\frac{1}{2}]; \\ y, & t\in[\frac{1}{2},1]. \end{array}\right.$$

Визначимо відображення $F\colon I\times I\to X$ умовою

$$F(t,s) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} f\left(\frac{2t}{1+s}\right), & t\in[0,\frac{s+1}{2}]; \\ y, & t\in[\frac{s+1}{2},1]. \end{array}\right.$$

Воно коректно визначене і неперервне, бо при $t=\frac{s+1}{2}$ маємо $f(1)=y$, і $F(\cdot,0)=f*e_y$, $F(\cdot,1)=f$, $F(0,\cdot)=f(0)=x$, $F(1,\cdot)=y$. Таким чином, F – потрібна гомотопія шляхів.

$\blacksquare$

Лема 3.4. *Нехай $f\colon I\to X$ – шлях у просторі X з початком $f(0)=x$ та кінцем $f(1)=y$. Тоді $f*\overline{f}\sim e_x$ і $\overline{f}*f\sim e_y$.*

Доведення. Згадаймо, що обернений шлях $\overline{f}$ визначений умовою $\overline{f}(t) = f(1-t)$. Зауважимо, що друга гомотопність випливає з першої (просто поміняємо f та $\overline{f}$ місцями і помітимо, що $\overline{\overline{f}} = f$), отже достатньо довести першу. За означенням добутку:

$$(f * \overline{f})(t) = \left[\begin{array}{ll} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ f(2-2t), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

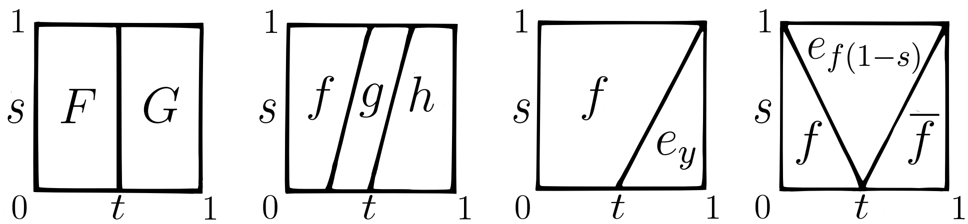
Визначимо відображення $F\colon I \times I \to X$ умовою

$$F(t,s) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} f(2t), & t \in [0, \frac{1-s}{2}]; \\ f(1-s), & t \in [\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}]; \\ f(2-2t), & t \in [\frac{1+s}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Це відображення коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{1-s}{2}$ і $t = \frac{1+s}{2}$ маємо одне й те саме значення $f(1-s)$. При цьому $F(\cdot, 0) = f * \overline{f}$, $F(\cdot, 1) = e_x$, $F(0, \cdot) = F(1, \cdot) = f(0) = x$. Отже, F – потрібна гомотопія шляхів.

■

Зауваження. Деяке уявлення про логіку побудови гомотопій в цих лемах дають наступні діаграми, де область визначення $I \times I$ розділена на частини, кожна з яких позначена символом відображення, що "відповідає" за гомотопію на цій підмножині:



Доповнення. Необхідні відомості з алгебри

У цьому розділі будуть наведені потрібні для цього курсу початкові відомості з теорії груп. Детальніше викладення міститься, наприклад, у [4] або частині I книги [7] (гл. 1–3). Зокрема, там можна знайти доведення викладених тут тверджень, але більшість з них неважко перевірити самостійно, що й рекомендується робити у якості вправ.

Означення А.1. *Групою* зветься множина G разом з бінарною *груповою операцією*, тобто відображенням $G \times G \to G\colon (a, b) \mapsto ab$, що задовольняє наступним умовам:

- $(ab)c = a(bc)$ для будь-яких $a, b, c \in G$ (*асоціативність* операції);
- існує *нейтральний елемент* (або *одиниця групи*) e такий, що $ae = ea = a$ для будь-якого $a \in G$;
- для будь-якого $a \in G$ існує *обернений елемент* $a^{-1} \in G$ такий, що $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Якщо крім того групова операція *комутативна*, тобто $ab = ba$ для будь-яких $a, b \in G$, то групу G називають *абелевою*.

Як бачимо, групова операція виглядає як множення чисел. Ці позначення називаються *мультиплікативними*, і саме їх ми й будемо тут використовувати. Як і у цьому означенні, одиницю групи будемо у загальному випадку позначати через e. Натомість, для абелевих груп часто застосовують *адитивні* позначення, тобто групова операція виглядає як додавання ($(a, b) \mapsto a + b$), нейтральний елемент позначається нулем ($a + 0 = a$ для будь-якого $a \in G$), а обернений виглядає як протилежний (для будь-якого $a \in G$ існує $-a \in G$ такий, що $a + (-a) = 0$). Такий вибір позначень мотивується, зокрема, наступними прикладами. Виконайте для них усі необхідні перевірки самостійно.

Приклад А.1. *Тривіальною* зветься група $\{e\}$, що складається лише з одиниці.

Приклад А.2. Усі цілі числа з операцією додавання утворюють абелеву групу $\mathbb{Z}$. Це ж вірно для множини дійсних $\mathbb{R}$ чисел з цією операцією, а також для множин елементів будь-якого поля та будь-якого векторного простору з їх відповідними операціями додавання.

Приклад А.3. Усі ненульові дійсні числа з операцією множення теж утворюють абелеву групу $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Це ж вірно для множини ненульових елементів будь-якого поля з його операцією множення (т. зв. *мультиплікативна група поля*). Крім того, абелеву групу утворюють усі додатні дійсні числа з тією ж операцією множення.

Приклад A.4. Для будь-якого натурального n будемо вважати цілі числа k і l еквівалентними, якщо вони рівні за модулем n: $k \equiv l \mod n$, тобто $k-l$ кратне n. Відповідна множина класів еквівалентності позначається $\mathbb{Z}_n$. У якості її елементів зручно розглядати класи еквівалентності перших n цілих невід'ємних чисел: $\mathbb{Z}_n = \{[0], \ldots, [n-1]\}$, де $[k]$ складається з усіх цілих чисел, що мають залишок k при діленні на n. Тоді коректно визначена операція додавання $[k] + [l] := [k+l]$, що перетворює $\mathbb{Z}_n$ на абелеву групу з n елементів. Вона зветься *групою залишків за модулем* n. Звичайно, група $\mathbb{Z}_1$ тривіальна.

Приклад A.5. Для натурального n усі перестановки множини $\{1, \ldots, n\}$ з операцією композиції утворюють скінченну *симетричну групу* S_n. При $n \geqslant 3$ вона є неабелевою.

Приклад A.6. Ще одним прикладом неабелевої (за умови $n \geqslant 2$) групи є *вільна група з* n *твірними* для натурального n. Так зветься фактормножина множини скінченних слів, що складаються з символів $a_1, \ldots, a_n$, $a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}$ за відношенням еквівалентності, що задане умовами

$$W_1\, a_i\, a_i^{-1}\, W_2 \sim W_1 W_2, \quad W_1\, a_i^{-1} a_i\, W_2 \sim W_1 W_2$$

для будь-якого i та довільних слів W_1 і W_2 (включно з порожніми). Групова операція визначається за допомогою послідовного записування слів з точністю до відношення еквівалентності: добутком класів еквівалентності слів W_1 і W_2 буде клас еквівалентності слова $W_1 W_2$. У подальшому будемо для спрощення позначень замість класів еквівалентності слів записувати самі слова у якості елементів групи (але пам'ятати, що вони представляють відповідний клас, тому, наприклад, $W_1\, a_i\, a_i^{-1}\, W_2 = W_1 W_2$). Групова операція коректно визначена та асоціативна, а нейтральним елементом є порожнє слово (тобто його клас еквівалентності). Також неважко переконатися у тому, що обернений елемент до довільного слова $W = b_1 \ldots b_m$ має вигляд

$$W^{-1} = (b_1 \ldots b_m)^{-1} := (b_m)^{-1} \ldots (b_1)^{-1},$$

де вважаємо $(a_i)^{-1} = a_i^{-1}$ і $(a_i^{-1})^{-1} = a_i$. Тому це дійсно група. Позначатимемо її через $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, а елементи $a_1, \ldots, a_n$ (тобто слова з одного символа) будемо звати *твірними* (або *породжуючими елементами*) групи. При $n = 1$ ця група ізоморфна $\mathbb{Z}$ (див. доведення цього у прикладі A.15 нижче), а при $n \geqslant 2$ дійсно є неабелевою, бо, наприклад, $a_1 a_2 \neq a_2 a_1$ за побудовою. Подальшу інформацію див. у [4, с. 64-70].

Означення A.2. Відображення груп $\alpha\colon G \to H$ зветься їх *гомоморфізмом*, якщо зберігає групову операцію: $\alpha(ab) = \alpha(a)\,\alpha(b)$ для будь-яких $a, b \in G$.

З означення також випливає, що гомоморфізм зберігає одиницю групи та обернені елементи: $\alpha(e) = e$ (зауважимо, що тут e зліва й справа позначає, взагалі кажучи, різні елементи: одиниці G і H відповідно), $\alpha(a^{-1}) = \alpha(a)^{-1}$ для будь-якого $a \in G$ (перевірте це).

Приклад A.7. *Тривіальний* гомоморфізм $G \to H$ визначений для будь-яких груп G і H як постійне відображення, що переводить кожний елемент G у одиницю $e \in H$. Він очевидним чином задовольняє попередньому означенню.

Означення A.3. Гомоморфізм груп зветься їх *ізоморфізмом*, якщо він є біекцією. Якщо існує ізоморфізм $\alpha\colon G \to H$, то говорять, що група G ізоморфна групі H (або що групи G і H ізоморфні). Ми позначатимемо це $G \simeq H$.

Відображення груп, що обернене до ізоморфізма, теж є ізоморфізмом, зокрема гомоморфізмом, в силу означень. Ізоморфність є відношенням еквівалентності на множині груп (перевірте це) та означає, що їх структури фактично однакові з алгебраїчної точки зору. Зокрема, ізоморфізм зберігає абелевість групи.

Приклад A.8. Відображення $x \mapsto \ln x$ є ізоморфізмом між групами додатних дійсних чисел з операцією множення та усіх дійсних чисел з операцією додавання, що розглядалися у прикладах A.3 і A.2 відповідно (перевірте це).

Означення A.4. *Прямим добутком* груп G_1 і G_2 зветься їх прямий декартовий добуток $G_1 \times G_2$ з почленно визначеною груповою операцією: $(a_1, a_2)(b_1, b_2) \coloneqq (a_1 b_1, a_2 b_2)$ для будь-яких $a_1, b_1 \in G_1$ і $a_2, b_2 \in G_2$.

Перевірте, що така операція дійсно перетворює $G_1 \times G_2$ на групу і що прямий добуток груп асоціативний, тобто $(G_1 \times G_2) \times G_3 = G_1 \times (G_2 \times G_3)$ для будь-яких груп G_1, G_2 і G_3, тобто відповідні групові структури на $G_1 \times G_2 \times G_3$ збігаються. Більш того, ця конструкція очевидним чином узагальнюється на довільну скінченну кількість множників (див. також [4, с. 100-101]). Зауважимо крім того, що добуток будь-якої групи G на тривіальну групу ізоморфний G (запишіть відповідний ізоморфізм), а добуток абелевих груп абелевий в силу означень. Прямий добуток скінченної кількості абелевих груп $G_1, \ldots, G_n$ ще називають їх *прямою сумою* і позначають $G_1 \oplus \ldots \oplus G_n$.

Приклад А.9. Прямий добуток будь-якого натурального числа n копій групи $\mathbb{Z}$ (відповідно, $\mathbb{R}$) з прикладу А.2 будемо позначати через $\mathbb{Z}^n$ ($\mathbb{R}^n$). У позначеннях прямої суми це виглядає як $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n}$ та $\underbrace{\mathbb{R} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}}_{n}$ відповідно. Таким чином, $\mathbb{Z}^n$ і $\mathbb{R}^n$ – абелеві групи з операціями покомпонентного додавання: $(x^1, \ldots, x^n) + (y^1, \ldots, y^n) = (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n)$.

Означення А.5. Нехай G – деяка група. Підмножина $H \subset G$ зветься *підгрупою* G, якщо $ab \in H$ і $a^{-1} \in H$ для будь-яких $a, b \in H$.

Будь-яка підгрупа H групи G містить одиницю $e \in G$ (покажіть це) і з обмеженням на H групової операції сама перетворюється на групу, бо для неї виконані умови означення А.1. Дві умови попереднього означення часто записують як одну: $ab^{-1} \in H$ для будь-яких $a, b \in H$, що є еквівалентною до них (чому?).

Означення А.6. Підгрупа H групи G називається *нормальною*, якщо $aba^{-1} \in H$ для будь-яких $a \in G$ і $b \in H$.

Приклад А.10. Будь-яка група G містить *тривіальні* підгрупи $\{e\}$ (див. приклад А.1) та G, що є, очевидно, нормальними.

Усі підгрупи будь-якої абелевої групи є нормальними, бо в цьому випадку $aba^{-1} = b \in H$ для усіх $a \in G$, $b \in H$.

Приклад А.11. Додатні дійсні числа утворюють підгрупу групи ненульових дійсних чисел з прикладу А.3, бо добуток двох додатних чисел і обернене до додатного є додатними. Аналогічним чином підмножина $\mathbb{Z}^n$ у $\mathbb{R}^n$ з прикладу А.9 (зокрема $\mathbb{Z}$ у $\mathbb{R}$) є підгрупою. Усі ці підгрупи нормальні в силу абелевості.

Приклад А.12. Будь-який елемент a довільної групи G визначає *спряження* (*внутрішній автоморфізм*)

$$C_a \colon G \to G \colon b \mapsto aba^{-1},$$

що є ізоморфізмом G на себе (тобто дійсно *автоморфізмом*). Зокрема, він переводить кожну підгрупу $H \subset G$ у *спряжену* до неї підгрупу

$$aHa^{-1} \coloneqq C_a(H) = \{aba^{-1} \mid b \in H\}.$$

Перевірте ці твердження, друге з яких можна вивести з більш загального факту: будь-який ізоморфізм переводить підгрупи у підгрупи. Згідно з попереднім означенням, нормальні підгрупи G – це в точності ті, що зберігаються при усіх внутрішніх автоморфізмах, тобто ті підгрупи $H \subset G$, для яких $aHa^{-1} = H$ для будь-яких $a \in G$. Якщо G абелева, то всі її внутрішні автоморфізми є тотожними відображеннями. Див. також деяку подальшу інформацію у [4, с. 60-62].

Означення A.7. Нехай H – підгрупа групи G. Для кожного елемента $a \in G$ підмножини $aH \coloneqq \{ab \mid b \in H\} \subset G$ та $Ha \coloneqq \{ba \mid b \in H\} \subset G$ звуться відповідно *лівим* та *правим класами суміжності* a за H.

При цьому належність елементів групи до одного лівого або правого класу суміжності є відношенням еквівалентності (перевірте це, а також те, що ліві та праві класи суміжності – це орбіти деяких правої та лівої дій H на G відповідно, див. розділ 18 курсу топології). Таким чином, у загальному випадку виникають дві фактормножини G за цими відношеннями еквівалентності, між якими, втім, існує біекція (яка саме?). Але якщо H нормальна, то можна говорити про однозначно визначену фактормножину:

Твердження A.1. *Нехай H – нормальна підгрупа групи G. Тоді для кожного $a \in G$ його ліві та праві класи суміжності за H збігаються: $aH = Ha$. При цьому бінарна операція*

$$G/H \times G/H \to G/H \colon (aH, bH) \mapsto aH\, bH \coloneqq ab\, H$$

на множині G/H класів суміжності G за H коректно визначена і задає на цій фактормножині структуру групи.

Означення A.8. Множина G/H (одночасно лівих та правих) класів суміжності групи G за її нормальною підгрупою H з груповою структурою, що описана у попередньому твердженні, зветься *факторгрупою* G за H.

Факторгрупа будь-якої абелевої групи є абелевою за побудовою.

Приклад A.13. Факторгрупа довільної групи G за тривіальною підгрупою $\{e\}$ ізоморфна G, бо кожен клас суміжності складається з одного елемента, а за тривіальною підгрупою G – ізоморфна $\{e\}$, бо єдиним класом суміжності буде сама G (перевірте це, явно записавши відповідні ізоморфізми).

Означення A.9. Нехай G і H – деякі групи, а відображення $\alpha \colon G \to H$ – їх гомоморфізм. Його *ядром* зветься

$$\operatorname{Ker} \alpha \coloneqq \{a \mid \alpha(a) = e\} \subset G,$$

а *образом* –

$$\operatorname{Im} \alpha \coloneqq \alpha(G) = \{\alpha(a) \mid a \in G\} \subset H.$$

Тут і в наступному твердженні через e знову позначаємо одиниці обох цих груп.

Твердження А.2 (Властивості ядра та образу)**.** *Нехай* $\alpha\colon G \to H$ *– деякий гомоморфізм груп.*

1. $\operatorname{Ker}\alpha$ *– нормальна підгрупа* G *і* α *– ін'єкція (мономорфізм) тоді й тільки тоді, коли* $\operatorname{Ker}\alpha = \{e\}$*;*

2. $\operatorname{Im}\alpha$ *– підгрупа* H *і* α *– сюр'єкція (епіморфізм) тоді й тільки тоді, коли* $\operatorname{Im}\alpha = H$*;*

3. *Відображення*

$$G/\operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Im}\alpha\colon a\operatorname{Ker}\alpha \mapsto \alpha(a)$$

коректно визначене і є ізоморфізмом груп.

Таким чином, пункт 3. цього твердження (що називають ще *першою теоремою Ньотер про ізоморфізм*) означає, що $G/\operatorname{Ker}\alpha \simeq \operatorname{Im}\alpha$ для будь-якого гомоморфізма $\alpha\colon G \to H$.

Приклад А.14. Для натурального n розглянемо відображення

$$\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n\colon k \mapsto [k]$$

абелевих груп з прикладів А.2 та А.4 відповідно. Оскільки

$$\alpha(k+l) = [k+l] = [k] + [l] = \alpha(k) + \alpha(l)$$

для будь-яких $k, l \in \mathbb{Z}$ за побудовою структури групи на $\mathbb{Z}_n$, α є гомоморфізмом. Він сюр'єктивний, бо $[k] = \alpha(k)$ для будь-якого $[k] \in \mathbb{Z}_n$, тобто $\operatorname{Im}\alpha = \mathbb{Z}_n$. Ядро цього гомоморфізма має вигляд

$$\operatorname{Ker}\alpha = \{k \in \mathbb{Z} \mid [k] = [0]\} = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \equiv 0 \mod n\} = \{nq \mid q \in \mathbb{Z}\},$$

тобто складається з усіх кратних n цілих чисел. Позначимо цю підмножину через $n\mathbb{Z}$. Неважко безпосередньо перевірити, що це нормальна (хоча б у силу абелевості) підгрупа $\mathbb{Z}$, як і повинно бути за пунктом 1. попереднього твердження. Тоді за його ж пунктом 3. маємо

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n,$$

де ізоморфізм задається умовою $k + n\mathbb{Z} \mapsto \alpha(k) = [k]$ для кожного $k + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (де використовуємо адитивні позначення також і для класів суміжності).

Якщо гомоморфізм груп $\alpha\colon G \to H$ ін'єктивний, то з прикладу А.13 і пунктів 1. та 3. твердження А.2 маємо

$$G \simeq G/\{e\} = G/\operatorname{Ker}\alpha \simeq \operatorname{Im}\alpha = \alpha(G),$$

більш того, відповідним ізоморфізмом $G \to \alpha(G)$ буде саме α (чому?), що неважко перевірити й безпосередньо.

Наслідок А.1. *Будь-який ін'єктивний гомоморфізм груп є ізоморфізмом на свій образ.*

Продовжимо розмову про вільну групу з n твірними $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$, що була розпочата у прикладі А.6, використовуючи ті ж позначення, що там. Нехай тепер $\{r_1, \ldots, r_m\}$ – якась скінченна множина слів, що складаються з тих же символів $a_1, \ldots, a_n$, $a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}$. Змінимо наше відношення еквівалентності на множині усіх скінченних слів, додавши до перелічених у прикладі А.6 умови

$$W_1\, r_j\, W_2 \sim W_1W_2, \quad W_1\, r_j^{-1}\, W_2 \sim W_1W_2$$

для будь-якого $j = \overline{1, m}$ та довільних слів W_1 і W_2 (включно з порожніми). Тут обернене слово r_j^{-1} визначається за звичними правилами: якщо $r_j = b_1 \ldots b_m$, то $r_j^{-1} = (b_m)^{-1} \ldots (b_1)^{-1}$, де $(a_i)^{-1} = a_i^{-1}$ і $(a_i^{-1})^{-1} = a_i$. Далі розглядаємо фактормножину множини слів саме за цим відношенням еквівалентності й так само у якості елементів цієї множини записуємо самі слова. Введемо на отриманій таким чином фактормножині групову операцію як у випадку вільної групи, послідовно записуючи слова з точністю до відношення еквівалентності: добутком класів еквівалентності слів W_1 і W_2 є клас еквівалентності слова W_1W_2. Перевірте, що введена таким способом операція коректно визначена й асоціативна. Нейтральним елементом є клас еквівалентності порожнього слова, який ми далі позначатимемо через e. Наприклад, $a_ia_i^{-1} = e$ або $r_j = e$ для будь-яких i та j. Обернені елементи можна знаходити так, як вказано вище для r_j (чому?). Тому це дійсно група.

Означення А.10. Описану вище групу будемо називати *групою з твірними* $a_1, \ldots, a_n$ *та співвідношеннями* $r_1, \ldots, r_m$. Вона позначається через $\langle a_1, \ldots, a_n \mid r_1, \ldots, r_m\rangle$. Якщо якась група G ізоморфна $\langle a_1, \ldots, a_n \mid r_1, \ldots, r_m\rangle$, то будемо говорити, що вона має опис у термінах твірних $a_1, \ldots, a_n$ та співвідношень $r_1, \ldots, r_m$ (або *копредставлення* $\langle a_1, \ldots, a_n \mid r_1, \ldots, r_m\rangle$).

Співвідношення часто для наочності записують у вигляді рівностей: $r_j = e$ замість просто r_j. Також часто частину співвідношення переносять вправо: якщо $r_j = c_j\, d_j^{-1}$ для деяких слів c_j і d_j, то пишуть $c_j = d_j$ замість r_j. З опису відношення еквівалентності випливає, що у цьому випадку

$$W_1\, c_j\, W_2 = W_1\, c_j\, d_j^{-1}\, d_j\, W_2 = W_1\, r_j\, d_j\, W_2 = W_1\, d_j\, W_2$$

для будь-яких слів W_1 і W_2. Також у подальшому будемо використовувати очевидні спрощені позначення для степенів: писати a_i^k замість $\underbrace{a_i \dots a_i}_{k}$ і a_i^{-k} замість $\underbrace{a_i^{-1} \dots a_i^{-1}}_{k}$ для усіх натуральних k та будь-якого i. Під a_i^0 при цьому будемо розуміти одиницю групи e. Множина співвідношень не визначена групою однозначно: до їх списку без зміни групи можна додавати, наприклад, $a_i a_i^{-1}$ для довільних i та інші вирази, що є одиничними за побудовою. На практиці список співвідношень намагаються зробити мінімальним. Встановлення ізоморфності або неізоморфності двох груп, що задані твірними та співвідношеннями, є у загальному випадку доволі складною комбінаторною задачею (при цьому множина твірних теж не визначена класом ізоморфності групи однозначно).

Приклад A.15. Група з твірними $a_1, \dots, a_n$ і без співвідношень за побудовою є просто вільною групою $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ з твірними $a_1, \dots, a_n$. Зокрема, "групою без твірних" вважатимемо тривіальну: $\langle \rangle = \{e\}$.

Тепер розглянемо групу з однією твірною $\langle a \rangle$. Її довільний елемент з урахуванням введених вище позначень однозначно представляється у вигляді a^n для деякого $n \in \mathbb{Z}$, який можна отримати, "приводячи подібні" літери a і a^{-1}, якщо вони стоять поруч (чому таке представлення однозначне?). При цьому $a^n\, a^m = a^{n+m}$ для будь-яких $n, m \in \mathbb{Z}$. Перевірте це, розглянувши різні варіанти знаків у цілих чисел n, m і $n+m$. Тому бієктивне відображення $\langle a \rangle \to \mathbb{Z}\colon a^n \to n$ є гомоморфізмом, а отже ізоморфізмом груп: $\langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

Приклад A.16. Розглянемо групу $\langle a \mid a^n \rangle$, де $n \geqslant 2$ натуральне (при $n = 0$ в силу наших домовленостей про позначення це $\langle a \rangle$, а при $n = 1$ – тривіальна група $\{e\}$). Аналогічним до $\langle a \rangle$ чином встановлюємо, що довільний елемент цієї групи має вигляд a^i для деякого $i = \overline{0, n-1}$. Дійсно, спочатку, як у попередньому прикладі, отримаємо вираз a^j для деякого цілого j, а потім, враховуючи рівність $a^n = e$, перепишемо його як a^i, де i – залишок від ділення j на n. І взагалі, $a^i = a^j$ тоді й тільки тоді, коли $i \equiv j \mod n$. Оскільки при цьому $a^i\, a^j = a^{i+j}$, відображення

$\langle a \mid a^n \rangle \to \mathbb{Z}_n \colon a^i \to [i]$ у групу $\mathbb{Z}_n$ з прикладу A.4 є бієктивним (чому?) гомоморфізмом, тобто ізоморфізмом груп, і $\langle a \mid a^n \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$. Групи з однією твірною, що розглядалися у цьому та попередньому прикладах, тобто (з точністю до ізоморфізма) нескінченна $\mathbb{Z}$ та скінченні $\mathbb{Z}_n$, звуться ще *циклічними* (див. також [4, с. 30-32]).

Приклад A.17. Єдине співвідношення групи $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ згідно з домовленостями вище зручно буде переписати у вигляді $ab = ba$. Звідси, переходячи до обернених елементів, отримаємо $b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, а домножаючи зліва і справа на a^{-1} і b^{-1} – $ba^{-1} = a^{-1}b$ і $b^{-1}a = ab^{-1}$ відповідно. Враховуючи ці співвідношення, у довільному слові з символів a, b, a^{-1}, b^{-1} можна їх переставляти, допоки не отримаємо $a^n b^m$ для деяких $n, m \in \mathbb{Z}$, і різні пари n, m відповідають різним елементам групи (чому?). Крім того, в силу тих же співвідношень $a^n b^m \, a^k b^l = a^{n+k} b^{m+l}$ для будь-яких $n, m, k, l \in \mathbb{Z}$. Тому відображення $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \to \mathbb{Z}^2 \colon a^n b^m \to (n, m)$ у групу $\mathbb{Z}^2$ з прикладу A.9 є бієктивним гомоморфізмом, а отже ізоморфізмом груп: $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}^2$. Аналогічним способом можна описати у термінах твірних та співвідношень групу $\mathbb{Z}^n$ і для довільного n (зробіть це). Таким чином, додавання співвідношень вигляду $aba^{-1}b^{-1}$ дозволяють перетворити вільну групу на абелеву. Тому $\mathbb{Z}^n$ ще називають *вільною абелевою групою з n твірними.*

Приклад A.18. Для будь-якої скінченної групи G розглянемо групу $\langle a,\ a \in G \mid abc^{-1},\ a, b, c \in G \colon ab = c \rangle$, твірними якої є елементи G, а співвідношення визначені таблицею множення G (тут у рівності $ab = c$ елементи a і b множаться у G). Покажіть, що відображення $a \mapsto a$ задає ізоморфізм G на описану вище групу. Таким чином, будь-яку скінченну групу можна описати у термінах твірних та співвідношень, хоча це буде, взагалі кажучи, доволі неекономний опис. Більш того, якщо у означенні A.10 дозволити довільну кількість твірних та співвідношень, зберігаючи вимогу на скінченну довжину слів, так можна описати взагалі будь-яку групу (перевірте, що ваше доведення залишається вірним і для цього випадку).

Твердження A.3. *Нехай N – найменша за включенням нормальна підгрупа групи $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$, що містить її елементи $s_1, \dots, s_l$ (у такому випадку говорять, що N породжена $s_1, \dots, s_l$). Тоді відображення*

$$G/N \to \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_l \rangle \colon W\,N \mapsto W$$

коректно визначене і є ізоморфізмом груп.

Тут нормальна підгрупа N, що породжена $s_1, \dots, s_l$, завжди існує (покажіть це; пор. також з доведенням твердження A.4 нижче) і єдина як найменший елемент частково впорядкованої множини (якої?). Іншими словами, факторизація G за N і дописування $s_1, \dots, s_l$ у список співвідношень G дають ізоморфні групи. Подальшу інформацію та приклади опису груп у термінах твірних та співвідношень можна знайти, наприклад, у [4, с. 70-72] і [7, с. 23-28, 215-221].

Один зі способів "прояснення" структури групи, зокрема, такої, що задана твірними та співвідношеннями – це перехід до зв'язаної з нею абелевої групи, що описаний у наступному означенні:

Означення A.11. Нехай G – деяка група. *Комутатором* двох елементів $a, b \in G$ зветься $aba^{-1}b^{-1} \in G$. *Комутантом* (або *першою похідною підгрупою*) групи G зветься підгрупа $G' \subset G$, що породжена усіма комутаторами, тобто найменша за включенням підгрупа G, що містить вирази $aba^{-1}b^{-1}$ для усіх $a, b \in G$. Факторгрупа G/G' зветься *абеліанізацією* G.

Твердження A.4. *Факторгрупа G/G' коректно визначена (тобто підгрупа G' коректно визначена і є нормальною) та абелева.*

Доведення. З опису у означенні випливає, що G' складається з усіх можливих добутків елементів вигляду $aba^{-1}b^{-1}$ (і обернених до них, але обернені мають той же вигляд), тобто його довільний елемент дорівнює $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1}$. Це підгрупа G (чому?) і будь-яка підгрупа, що містить усі комутанти, повинна містити й усі добутки такого вигляду, тобто включати всю G'. Тому вона і є найменшою за включенням з такою властивістю (єдиною такою як найменший елемент частково впорядкованої множини). При цьому для будь-якого $c \in G$

$$ca_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1}c^{-1} = (ca_1c^{-1})(cb_1c^{-1})(ca_1c^{-1})^{-1}(cb_1c^{-1})^{-1} \dots$$

$$\dots (ca_kc^{-1})(cb_kc^{-1})(ca_kc^{-1})^{-1}(cb_kc^{-1})^{-1} \in G',$$

що й демонструє нормальність G'.

За означенням факторгрупи G/G', довільний її елемент – це суміжний клас aG', де $a \in G$, а комутатор будь-яких двох елементів дорівнює

$$aG'\, bG'\, (aG')^{-1}\, (bG')^{-1} = aba^{-1}b^{-1}G' = eG',$$

бо $aba^{-1}b^{-1} \in G'$ (тут $a, b \in G$). Зауважимо, що, як і завжди у факторгрупі, eG' – це нейтральний елемент G/G'. Тобто $aG'\, bG' = bG'\, aG'$ для будь-яких $aG', bG' \in G/G'$, що й означає абелевість G/G'.

■

Більш того, G' – це найменша за включенням нормальна підгрупа, факторизація за якою абелева (перевірте самостійно або див. [4, с. 75-76]). Зрозуміло також, що $G' = \{e\}$ тоді й тільки тоді, коли G абелева, і у цьому випадку абеліанізація G збігається з нею самою (точніше, канонічно ізоморфна). Крім того, якщо групи ізоморфні, то їхні комутанти та абеліанізації також ізоморфні (перевірте це).

Нехай $G = \langle a_1, \ldots, a_n \mid r_1, \ldots, r_m \rangle$. З узагальнення твердження А.3 на випадок, коли підгрупа може бути породжена нескінченним числом співвідношень (переконайтеся у тому, що таке узагальнення теж вірне) випливає, що

$$G/G' \simeq \langle a_1, \ldots, a_n \mid r_1, \ldots, r_m,\ W_1 W_2 W_1^{-1} W_2^{-1},\ W_1, W_2 \in G \rangle.$$

Серед комутаторів $W_1 W_2 W_1^{-1} W_2^{-1}$ є комутатори твірних $a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1}$ для $i, j = \overline{1, n}$. Більш того, решта співвідношень-комутаторів випливає з них. Дійсно, якщо твірні комутують, то, аналогічно до прикладу А.17, ми можемо довільним чином переставляти літери у будь-якому слові, зокрема, міняти підслова місцями, тоді $W_1 W_2 W_1^{-1} W_2^{-1} = W_1 W_1^{-1} W_2 W_2^{-1} = e$ для будь-яких W_1 і W_2 з G. Тому ці зайві співвідношення можна прибрати, і таким чином отримаємо наступне:

Наслідок А.2. *Якщо* $G = \langle a_1, \ldots, a_n \mid r_1, \ldots, r_m \rangle$, *то*

$$G/G' \simeq \langle a_1, \ldots, a_n \mid r_1, \ldots, r_m,\ a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1},\ i, j = \overline{1, n} \rangle.$$

Цю ізоморфність можна перевірити й безпосередньо, показавши, що відображення

$$G/G' \to \langle a_1, \ldots, a_n \mid r_1, \ldots, r_m,\ a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1},\ i, j = \overline{1, n} \rangle \colon W\, G' \mapsto W$$

коректно визначене і є ізоморфізмом груп (зробіть це). Зокрема, як згадано у прикладі А.17 та більш детально показано у доведенні наслідку 13.4, абеліанізація перетворює вільну групу з n твірними на вільну абелеву групу з n твірними, що ізоморфна $\mathbb{Z}^n$.

Література

[1] О.А. Борисенко. Диференціальна геометрія і топологія. Х.: Основа, 1995.

[2] Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. Введение в топологию. М.: Наука, 1995.

[3] О.Я. Виро, О.А. Иванов, Н.Ю. Нецветаев, В.М. Харламов. Элементарная топология. М.: МЦНМО, 2012.

[4] О.Г. Ганюшкін, О.О. Безущак. Теорія груп: навчальний посібник. Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2005.

[5] M.A. Armstrong. Basic Topology. Springer, 1983.

[6] R.H. Crowell, R.H. Fox. Introduction to Knot Theory. Springer, 2011. Переклад: Р. Кроуэлл, Р. Фокс. Введение в теорию узлов. М.: Мир, 1967.

[7] D.S. Dummit, R.M. Foote. Abstract Algebra. Third Edition. Wiley, 2004.

[8] A. Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2001. Переклад: А. Хатчер. Алгебраическая топология. М.: МЦНМО, 2011.

[9] C. Kosniowski. A First Course in Algebraic Topology. Cambridge University Press, 1980. Переклад: Ч. Коснёвски. Начальный курс алгебраической топологии. М.: Мир, 1983.

[10] J.R. Munkres. Topology. Second Edition. Prentice Hall, 2000.