578. Знайти ортогональну проекцію $M(1,3,5)$ на пряму $l: \begin{cases} 2x+y+z-1=0 \ (\beta) \\ 3x+y+2z-3=0 \ (\gamma) \end{cases}$ С.к. дек.

Можна перейти до параметричних рівнянь l і далі робити як у 583. Або: площина α, що $\ni M$ і $\perp l$ паралельна до в. нормалі β і γ, тому її рівн.: $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$,

$$x-1-(y-3)-(z-5)=0$$

$$x-y-z+7=0$$

Її перетин з l: $\left.\begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ 3x+y+2z-3=0 \\ x-y-z+7=0 \end{cases}\right\} + : 3x+6=0, x=-2$

$\begin{cases} y+z-5=0 \\ y+2z-9=0 \end{cases} - : z-4=0, z=4, y=1$. Пр.: $(-2,1,4)$.

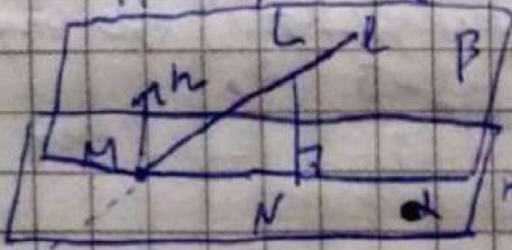
587. Знайти ортогональну проекцію прямої l: $\begin{cases} x = 3+5t \\ y = -1+t \\ z = 4+t \end{cases}$ на площину α: $2x-2y+3z-5=0$. С.к. дек.

l перетинає α (бо $2\cdot5-2\cdot1+3\cdot1 \neq 0$). Точка перетину M:

$$2(3+5t)-2(-1+t)+3(4+t)-5=0$$

$$11t+15=0$$

$t = -\frac{15}{11}$, $M\left(-\frac{42}{11}, -\frac{26}{11}, \frac{29}{11}\right)$



Тоді проекція m проходить через M і N — проекцію якоїсь т. $L \in l$ (наприклад, $L(3,-1,4)$) на α.

Інший спосіб: m — це перетин α і пл. β, що містить l і ортог. α, тобто $\parallel$ її в. нормалі $n = (2,-2,3)$:

$$\beta: \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-4 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$5(x-3) - 13(y+1) - 12(z-4) = 0.$$

$$m: \begin{cases} 2x - 2y + 3z - 5 = 0 \\ 5x - 13y - 12z + 20 = 0 \end{cases}$$

605. α відсікає на Ox, Oy, Oz відрізки, що пропорційні $1, 2, 3$ відп., $d((3,5,7), \alpha) = 4$. Знайти α. С.к. дек.

Тобто перетини з осями - це $(a,0,0)$, $(0,2a,0)$, $(0,0,3a)$.

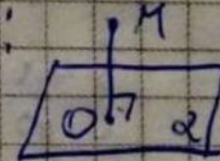
Рівн. у відрізках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} + \frac{z}{3a} = 1 \quad \Big| \cdot 6a$$

$$6x + 3y + 2z - 6a = 0.$$

Відстань від $M(x_0, y_0, z_0)$ до α: $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d(M, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Отже, $4 = \dfrac{|6\cdot 3 + 3\cdot 5 + 2\cdot 7 - 6a|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \dfrac{|47 - 6a|}{7}$

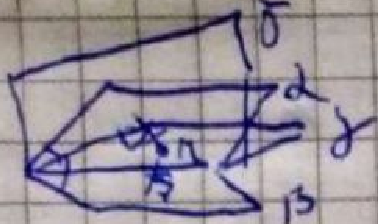
$$|47 - 6a| = 28$$

$47 - 6a = 28$, $6a = 19$: $\quad 6x + 3y + 2z - 19 = 0$

$47 - 6a = -28$, $6a = 75$: $\quad 6x + 3y + 2z - 75 = 0$.

610. Знайти рівняння бісекторної площини гострого кута між α: $2x - 3y + 6z - 6 = 0$ і $\beta = Oyz$. С.к. дек.

M належить до біс. пл. між α і β $\Leftrightarrow$ $d(M, \alpha) = d(M, \beta)$.



У нас, т.ч., дві біс. площини задаються рівн.:

$$\frac{|2x-3y+6z-6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}}$$

(бо рівн. β: $x=0$).

$$|2x-3y+6z-6| = 7|x|.$$

Кут між в. нормалей α і β $(2,-3,6)$ і $(1,0,0)$ відп. гострий (бо ск. добуток $2\cdot 1-3\cdot 0+6\cdot 0 = 2>0$). Тому, як-но до прямих у площині, потрібний кут

відп. різним знакам розкриття модулів:

$$2x-3y+6z-6 = -7x$$

$$9x-3y+6z-6=0$$

$$3x-y+2z-2=0.$$

612. Знайти центр та радіус кулі, що вписана в тетраедр, який обмежений площинами координат і пл. б: $11x-10y-2z-57=0$
С.к.-декартова.

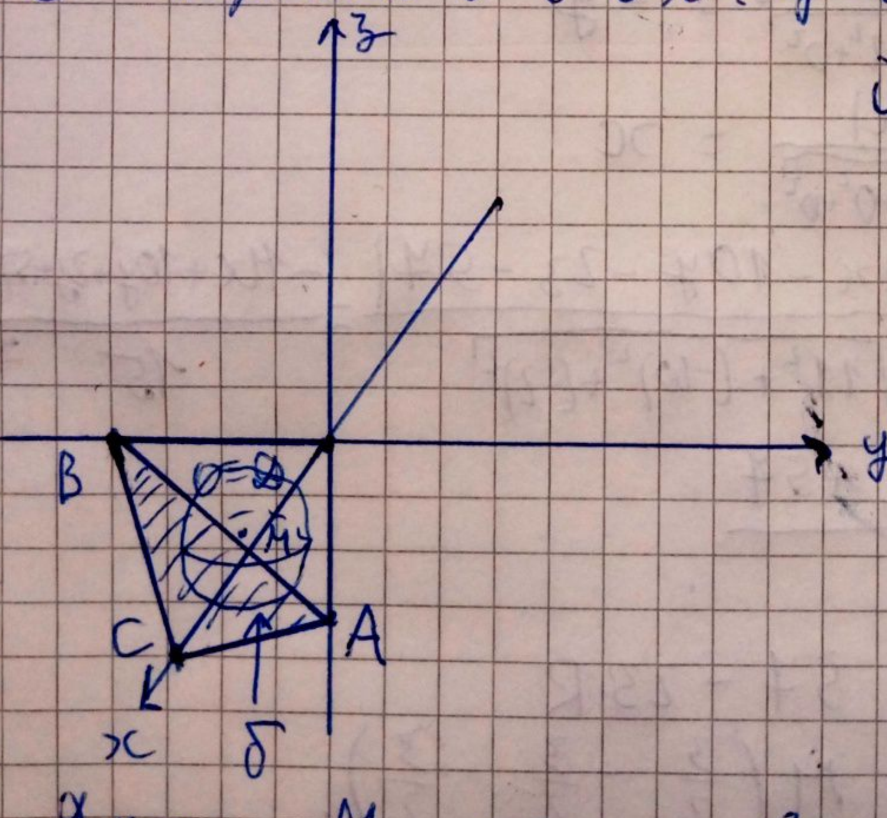
Вершини тетраедра - це перетини б і осей координат, тобто:

A - перетин б і Oz: $x=0, y=0 \Rightarrow z=-\frac{57}{2}$

B - перетин б і Oy: $x=0, z=0 \Rightarrow y=-\frac{57}{10}$

C - перетин б і Ox: $y=0, z=0 \Rightarrow x=\frac{57}{11}$.

і $D(0,0,0)$ - поч. коорд.
$\overset{\parallel}{O}$



Якщо M - центр вписаної кулі радіуса R, то відстані від M до граней тетраедра, тобто до площин $\alpha = Oxy$, $\beta = Oxz$, $\gamma = Oyz$, б дорівнюють R.

Знаки відхилення M від пл-ті як, що у протилежних вершин:

$\alpha = Oxy : z = 0$. Відх. $A(0, 0, -\frac{57}{2}) < 0$

$\beta = Oxz : y = 0$. Відх. $B(0, -\frac{57}{10}, 0) < 0$

$\gamma = Oyz : x = 0$. Відх. $C(\frac{57}{11}, 0, 0) > 0$

$\delta : 11x - 10y - 2z - 57 = 0$. Відх. $D(0,0,0) < 0$.

Отже, для $M(x, y, z)$:

$$R = d(M, \alpha) = \frac{|z|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = -z$$

$$R = d(M, \beta) = \frac{|y|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = -y$$

$$R = d(M, \gamma) = \frac{|x|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = x$$

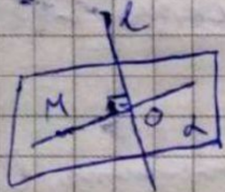
$$R = d(M, \delta) = \frac{|11x - 10y - 2z - 57|}{\sqrt{11^2+(-10)^2+(-2)^2}} = \frac{-11x+10y+2z+57}{15} =$$

$$= \frac{-11R - 10R - 2R + 57}{15}.$$

$$15R = 57 - 23R$$

$$R = \frac{57}{38} = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

577. Знайти рівняння і довжину d перпендикуляра, що опущений з точки $M(-3,13,7)$ на пряму l: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{1}$. С.к. дек.



Перпендикуляр - це пряма MO, де $O\in l$: $MO\perp l$, тобто O - проекція M на l.

Як у задачі 583, знайдено O, наприклад, провівши пл. α через M ортогонально l. α: $3(x+3)-4(y-13)+1(z-7)=0$

$$3x-4y+z+54=0.$$

Тоді O - перетин l і α:

$$3(1+3t)-4(2-4t)+3+t+54=0$$

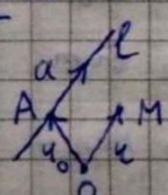
$$26t+52=0$$

$t=-2$: $O(-5,10,1)$. Тоді перпендикуляр:

$$MO:\ \frac{x+5}{-3+5}=\frac{y-10}{13-10}=\frac{z-1}{7-1}$$

$$\frac{x+5}{2}=\frac{y-10}{3}=\frac{z-1}{6}$$

$d=MO=\sqrt{(-3+5)^2+(13-10)^2+(7-1)^2}=7$. Також підраховано d за ф-лою:



Відстань від т. M з радіус-вектором r до прямої l, що прох. через т. з радіус-вектором r_0 у напрямку в. a: $d(M,l)=\frac{|[r-r_0,a]|}{|a|}$

У нас $r=(-3,13,7)$, $r_0=(1,2,3)$, $a=(3,-4,1)$, тому $r-r_0=(-4,11,4)$,

$[r-r_0,a]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 11 & 4 \\ 3 & -4 & 1\end{vmatrix}=(27,16,-17)$, $|[r-r_0,a]|=\sqrt{27^2+16^2+(-17)^2}=\sqrt{1274}=7\sqrt{26}$.

$|a|=\sqrt{3^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{26}$, отже $d=\frac{7\sqrt{26}}{\sqrt{26}}=7$.

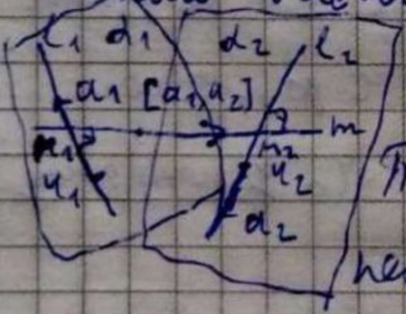
585. Знайти рівняння спільного перпендикуляра прямих

$$l_1: \frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1} \qquad l_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1},$$

знайти точки його перетину з цими прямими і відстань d між ними. (с.к. дек.)

—

Нехай мимобіжні прямі l_1 і l_2 прох. через точки з радіусами-



векторами r_1 і r_2 у напр. векторів a_1 і a_2 відп. Тоді $[a_1,a_2]$ – напр. вектор іскомого спільного перпендикуляра m. Сама пряма m є перетином площини α_1, що проходить через l_1 паралельно $[a_1,a_2]$ і пл. α_2, що прох. через l_2 парал. $[a_1,a_2]$:

$$m: \begin{cases} (r-r_1, a_1, [a_1,a_2]) = 0 \\ (r-r_2, a_2, [a_1,a_2]) = 0. \end{cases}$$

—

У нас $r_1 = (1,2,3)$, $r_2 = (1,0,-1)$, $a_1 = (8,4,1)$, $a_2 = (2,-2,1)$. Перевіримо мимобіжність:

$$(r_1 - r_2, a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2\cdot 6 + 4\cdot(-24) = -108 \neq 0$$

Напр. вектор m:

$$[a_1,a_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (6,-6,-24) \sim (1,-1,-4).$$

Площина α_1 (замість $[a_1, a_2]$ беремо колінеарний):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 8 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad -15(x-1)+33(y-2)-12(z-3)=0$$

$$5(x-1)-11(y-2)+4(z-3)=0$$

$$5x-11y+4z+5=0$$

α_2 (так само):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad 9(x-1)+9(y)+0\cdot(z+1)=0$$

$$x+y-1=0.$$

Отже, спільний перп. m:

$$\begin{cases} 5x-11y+4z+5=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

(Канонічне: $y=1-x$, $5x-11+11x+4z+5=0$, $16x+4z-6=0$,
$x=-\frac{4z-6}{16}=-\frac{z-\frac{3}{2}}{4}$; $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-\frac{3}{2}}{4}$).

Точка M_1 перетину l_1 і m – це т. перетину l_1 і α_2 (бо $m \subset \alpha_2$):

$$(1+8t)+(2+4t)-1=0$$

$$12t+2=0$$

$t=-\frac{1}{6}$, $M_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{17}{6}\right)$.

Ан-но, т. M_2 перетину l_2 і m – це т. перетину l_2 і α_1:

$$5(1+2t)-11(-2t)+4(-1+t)+5=0$$

$$36t+6=0$$

$t=-\frac{1}{6}$, $M_2\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{7}{6}\right)$. m також можна знайти як M_1M_2.

Відстань між l_1 і l_2 – це M_1M_2:

$$d = M_1M_2 = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{17}{6}+\frac{7}{6}\right)^2} = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2}.$$

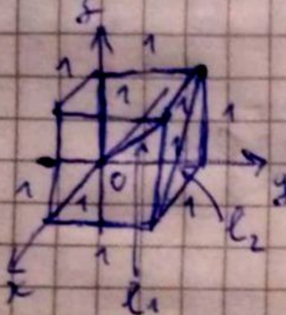
Або можна підрахувати за загальною ф-лою (у позначеннях як вище):

$$d = d(l_1, l_2) = \frac{|(M_1-M_2, a_1, a_2)|}{|[a_1, a_2]|} = \frac{|-108|}{|(6,-6,-24)|} = \frac{108}{6\sqrt{1+1+16}} = \frac{18}{3\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

621. Відстань між паралельними прямими – це відстань від будь-якої точки першої до другої.

622. Знайти відстань між діагоналлю куба з ребром 1 і діагоналлю грані, що її не перетинає.

З міркувань симетрії, це можуть бути $\forall$ такі дві діагоналі.



Крім того, куб може бути розташований як завгодно у просторі, скажімо, так, що одна з його вершин – початок $(0,0,0)$ декартової с.к., а ребра, що виходять з неї, направлені вздовж осей координат. Тоді можна взяти діагональ куба l_1, що прох. через $(0,0,0)$ і $(1,1,1)$: $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ і діагональ ребра l_2, що прох. через $(0,1,1)$ і $(1,1,0)$: $\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{1-1}=\frac{z-1}{0-1}$, $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{-1}$.

У позначеннях як у 585: $r_1=(0,0,0)$, $r_2=(0,1,1)$, $a_1=(1,1,1)$, $a_2=(1,0,-1)$,

$$(r_1-r_2, a_1, a_2)=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0+1\cdot(-2)-1\cdot(-1) = -1 \ (\neq 0, \text{ дійсно мимобіжні}),$$

$$[a_1, a_2]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1),$$

$$d(l_1, l_2)=\frac{|-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$