Многовиди кривини, що обмежена зверху

Тут знову (M,g) - n-вим. ℓ-гл. рім. мн., $n \geq 2$, $\ell \geq 4$, ∇, R etc. - як раніше.

__Пр.__ Якщо секційна кривина рім. многовида (M,g) недодатна ($K \leq 0$ у точках покр.), то $\forall$ його геодезична не містить спряжених точок.

$\triangleright$ Нехай γ - геод. (M,g), Y - поле Якобі уздовж γ, $f := |Y|^2 = g(Y,Y)$.

Тоді $f'' = (2g(\nabla_{\gamma'}Y, Y))' \underset{\text{(узгодж. зв'язності з } g)}{=} 2g(\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}Y, Y) + 2g(\nabla_{\gamma'}Y, \nabla_{\gamma'}Y) =$

$= \left[\begin{matrix}\text{рівняння}\\ \text{полів Якобі}\end{matrix}\right] = -2g(R(Y,\gamma')\gamma', Y) + 2|\nabla_{\gamma'}Y|^2 \geq 0$, бо $\forall t$ з області визн. γ значення першого доданку в t - це або 0, коли $Y(t)$ і $\gamma'(t)$ колінеарні, або $-2K_{\gamma(t)}(\sigma(t)) \cdot (g_{\gamma(t)}(Y(t),Y(t)) \cdot g_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t)) - g_{\gamma(t)}(Y(t),\gamma'(t))^2) \geq 0$ в іншому випадку, де $\sigma(t) := \mathrm{span}\{Y(t), \gamma'(t)\}$ - площина у $T_{\gamma(t)}M$ за __def__ секц. кривини та умовою. Отже для $(\ell-1)$-гл. f маємо $f \geq 0$, $f'' \geq 0$ - ф-ція опукла, і тоді якщо $\exists\ t_0 \neq t_1$ такі, що $Y(t_0) = Y(t_1) = 0$, то $f(t_0) = f(t_1) = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow Y = 0$, тому спряж. точок γ не існує. $\blacktriangle$

Def. Якщо повний однозв'язний рімановий многовид (M, g) має недодатню секц. кривину ($K \leq 0$), він зветься простором Адамара.

Ex. $M^n(k)$ при $k \leq 0$ й; поверхні в E^3: гіперболічний параболоїд, повні однозв'язні мінімальні поверхні (наприклад, гелікоїд).

Th. [redacted] (Картан-Адамар). Якщо (M, g) – n-вимірний простір Адамара, то M дифеоморфний $\mathbb{R}^n$, причому в якості дифеоморфізма можна взяти $\exp_p : T_pM \to M$ $\forall p \in M$.

Крім того, $\forall$ геодезична $\gamma : [0, a] \to M$ – це єдина (з точністю до заміни параметра) найкоротша, що з'єднує $\gamma(0)$ і $\gamma(a)$.

Rem. Однозв'язність тут суттєва, як знову ж демонструє приклад плаского циліндра $S^1 \times \mathbb{R}$: він задовольняє всім умовам крім однозв'язності (хоча є зв'язним), і у ньому не кожний геодезичний шлях – найкоротша (крім того, між деякими точками найкоротша не єдина). Це приклад обмеження на глобальну топологію многовида.

▷ $\forall\, p \in M$ з повноти і Th. Х.-Р.-К.-Ф. випливає геодезична повнота у p: $\exp_p : T_pM \to M$ визначене (і є С-гл.) на усьому T_pM. З тієї ж Th. повноти і зв'язності випливає, що $\forall\, q \in M$ $\exists$ найкоротша геодезична $\gamma : [0, a] \to M$ така що $\gamma(0) = p$, $\gamma(a) = q$. Тут і далі вважаємо усі геод. з постійною довжиною дотичного вектора, якщо не вказане інше, параметризованими.

Тоді $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ $\forall\, t$, де $v = \gamma'(0)$, зокрема $q = \exp_p(av)$.

Т.ч., $\exp_p : T_pM \to M$ — гладка сюр'єкція.

В силу попер. Рч. і Рч. 5. теми "Поля Якобі...", оскільки $\forall$ геодезичної $\nexists$ спряжених точок, $d_v \exp_p$ невироджений $\forall\, v \in T_pM$, тобто $\exp_p$ — лок. дифеоморфізм в околі $\forall\, v \in T_pM$. Щоб показати, що це дифеоморфізм, тоді достатньо показати, що це гомеоморфізм (Впр.). У свою чергу, за властивостями накрить і в силу однозв'язності M, для цього достатньо показати, що $\exp_p$ — накриття.

Лок. дифеоморфізм $\exp_p$ є, зокрема, занурення, тому його I фунд. форма $\exp_p^* g =: h$ є рімановою м-кою на T_pM, і за побудовою $\forall v \in T_pM$ $d_v \exp_p$ – лін. ізометрія $(T_v(T_pM), h_v)$ і $(T_{\exp_p(v)}M, g_{\exp_p(v)})$, тобто $\exp_p$ – лок. ізометрія в околі $\forall v \in T_pM$. Зокрема, $\forall$ кривої γ у T_pM і $\mu := \exp_p \circ \gamma$ $|\mu'| = |\gamma'|$ і μ - геод. $\Leftrightarrow$ γ - геод. (Впр.). Тоді $\forall w \in T_pM$, оскільки $\gamma : t \mapsto tw$ переходить у геод. $\mu : t \mapsto \exp_p(tw)$, γ є повною ($\mathbb{R} \to T_pM$) геодезичною ріманового многовида (T_pM, h), що проходить через 0 у напр. w. Тому (T_pM, h) геод. повний в 0 $\Rightarrow$ повний за Тh. Х.-Р.: К.-Ф. (бо зв'язний)

Далі усі кулі та сфери – відн. внутрішніх метрик T_pM і M, що відповідають рімановим (позначатимемо просто $d := d_{\ell_h}$ на T_pM і $= d_{\ell_g}$ на M).

Нехай $q \in M$. В силу лок. дифеоморфності, $\forall v \in \exp_p^{-1}(q)$ $\exists \delta > 0$ таке, що $\exp_p : B_\delta(v) \to \exp_p(B_\delta(v))$ – дифео-зм, зокрема, $\exp_p^{-1}(q) \cap$ $\cap B_\delta(v) = \{v\}$, тому $\exp_p^{-1}(q)$ – дискретна (має дискретну індуковкку топологію). Оскільки T_pM гомеоморфний $\mathbb{R}^n$, тоді $\exp_p^{-1}(q)$ – не більше ніж зліченна [бо у кожній гомеоморфному образі $B_\delta(v)$ $\exists$ точка з раціональними координатами, і ці точки різні для різних околів). Позначимо тоді $\exp_p^{-1}(q) = \{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ або $\{v_m\}_{m=1}^{s}$ (де v_m – попарно різні). (Впр.)

$\exists\, \varepsilon > 0$ таке, що $B_\varepsilon(q)$ – кульовий нормальний окіл q. Покажемо, що тоді $\forall m$ $\exp_p : B_\varepsilon(v_m) \to B_\varepsilon(q)$ – біекція. Тоді з того, що це лок. дифеоморфізм в околі $\forall$ точки випливатиме, що це дифео-зм, зокрема, гомеоморфізм (Впр.).

$\forall\, w \in B_\varepsilon(v_m)$ в силу повноти T_pM і зв'язності і Th. Х.-Р.-К.-Ф. $\exists$ найкоротша [натурально парам.] геодезична $\gamma : [0,a] \to T_pM$ така, що $\gamma(0) = v_m$, $\gamma(a) = w$, причому $a = l(\gamma) = d(v_m, w) < \varepsilon$, і $\forall t \in [0,a]$ $d(v_m, \gamma(t)) = l(\gamma|_{[0,t]}) = t \le a < \varepsilon$ (бо відрізки найкоротших – теж найкор., а парам. натуральна), тоді $\gamma([0,a]) \subset B_\varepsilon(v_m)$. В силу сказаного вище про власт. $\exp_p$, тоді $\mu := \exp_p \circ \gamma$ – теж нат. парам. геодезична, і $\forall t \in [0,a]$

$d(q, \mu(t)) \leq \left[\begin{array}{l} \mu|_{[0,t]} \text{ з'єднує } \mu(0) = \exp_p(\gamma(0)) = \\ = \exp_p(v_m) = q \text{ і } \mu(t), \text{ за \underline{def.}} \\ \text{внутрішньої метрики} \end{array}\right] \leq \ell(\mu|_{[0,t]}) = t \leq a < \varepsilon$,

тобто $\mu([0,a]) \subset B_\varepsilon(q)$, зокрема $\exp_p(w) = \mu(a) \in B_\varepsilon(q)$. Отже, $\exp_p(B_\varepsilon(v_m)) \subset B_\varepsilon(q)$. Нехай $\exp_p(B_\varepsilon(v_m)) \neq B_\varepsilon(q)$, тобто включення строге. Тоді $\exists\, w \in S_\varepsilon(v_m) = \partial B_\varepsilon(v_m)$ така, що $\exp_p(w) \in B_\varepsilon(q)$ (\underline{Вкл}). Знову побудуємо натурально парам. найкоротшу геод. $\gamma : [0,\varepsilon] \to T_pM$ таку, що $\gamma(0) = v_m$, $\gamma(\varepsilon) = w$. Тоді для нат. парам геод. $\mu := \exp_p \circ \gamma$ $\forall\, t \in [0,\varepsilon)$ $\mu(t) \in \exp_p(B_\varepsilon(v_m)) \subset B_\varepsilon(q)$ (як вище), і $\mu(\varepsilon) = \exp_p(w) \in B_\varepsilon(q)$ за припущенням. Т.ч., $\mu([0,\varepsilon]) \subset B_\varepsilon(q)$, що є кульовим норм. околом q. За власт. таких околів, μ тоді найкоротша: $d(q, \exp_p(w)) = \ell(\mu) = \varepsilon$, тобто $\exp_p(w) \notin B_\varepsilon(q)$ $\lightning$. Отже, $\exp_p(B_\varepsilon(v_m)) = B_\varepsilon(q)$.

Перевіримо тепер ін'єктивність. Нехай $w_1, w_2 \in B_\varepsilon(v_m)$ і $\exp_p(w_1) = \exp_p(w_2) = u$. Знову побудуємо нат. парам. найкоротші геод. $\gamma_1 : [0,a_1] \to T_pM$ і $\gamma_2 : [0,a_2] \to T_pM$ такі, що $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = v_m$, $\gamma_1(a_1) = w_1$, $\gamma_2(a_2) = w_2$. Тоді, ан-но міркуванням вище, $\gamma_1([0,a_1]) \subset B_\varepsilon(v_m)$

$\gamma_2([0,a_2]) \subset B_\varepsilon(v_m)$, а тоді $\mu_1 := \exp_p \circ \gamma_1$, $\mu_2 := \exp_p \circ \gamma_2$ – нат. пар. геодезичні у $B_\varepsilon(q)$ такі, що $\mu_1(0)=\mu_2(0)=q$, $\mu_1(a_1)=\mu_2(a_2)=r$. Оскільки $B_\varepsilon(q)$ – кульовий норм. і в силу вибору параметризації, тоді $\mu_1=\mu_2$ (зокрема $a_1=a_2$), бо це єдина найкоротша, що з'єднує q і r. Оскільки тоді $d_{v_m}\exp_p(\gamma_1'(0)) = \mu_1'(0)=\mu_2'(0) = d_{v_m}\exp_p(\gamma_2'(0))$, а $d_{v_m}\exp_p$ – невироджений, маємо $\gamma_1'(0)=\gamma_2'(0)$ (і $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=v_m$), тому за єдиністю геод. $\gamma_1=\gamma_2$, зокрема $w_1=\gamma_1(a_1)=\gamma_2(a_2)=w_2$.

Т.ч., дійсно $\forall m$ $\exp_p: B_\varepsilon(v_m)\to B_\varepsilon(q)$ – бієкція $\Rightarrow$ дифео-зм (зокрема гомео-зм).

З $\exp_p(B_\varepsilon(v_m)) = B_\varepsilon(q)$ $\forall m$ випливає $\bigcup_m B_\varepsilon(v_m) \subset \exp_p^{-1}(B_\varepsilon(q))$.

Нехай тепер $w \in \exp_p^{-1}(B_\varepsilon(q))$, тобто $r := \exp_p(w) \in B_\varepsilon(q)$. Оскільки $B_\varepsilon(q)$ – кульовий норм. окіл, $\exists!$ нат. парам. найкоротша геод. $\mu:[0,a]\to B_\varepsilon(q)$ з $\mu(0)=q$, $\mu(a)=r$. Випустимо з w геодезичну $\gamma: \mathbb{R}\to T_pM$ таку, що $\gamma(a)=w$ і $\gamma'(a) = (d_w \exp_p)^{-1}(\mu'(a))$, що існує в силу повноти T_pM (див. вище, повнота $\Rightarrow$ геод. повнота у w за Th. Х.-Р.-К.-Р.).

Оскільки $d_w \exp_p$ - лок. ізометрія, $|\gamma'(a)| = |\mu'(a)| = 1$, тому γ - нат. параметризована. Тоді, у свою чергу, $\exp_p \circ \gamma$ - нат. парам. геод. у (M, g), $(\exp_p \circ \gamma)(a) = \exp_p(w) = v = \mu(a)$, і $(\exp_p \circ \gamma)'(a) = \mu'(a)$ за побудовою. В силу єдиності геод., $\mu = \exp_p \circ \gamma|_{[0,a]}$, зокрема $q = \mu(0) = \exp_p(\gamma(0))$, тобто $\gamma(0) \in \exp_p^{-1}(q)$: $\exists\, m$ таке, що $\gamma(0) = v_m$.

Тоді за натуральністю парам. і def. внутр. м-ки

$$d(v_m, w) \leq \begin{bmatrix} \gamma(0) = v_m \\ \gamma(a) = w \end{bmatrix} \leq \ell(\gamma|_{[0,a]}) = a = \ell(\mu) = \begin{bmatrix} \mu \text{ - най-} \\ \text{коротша} \end{bmatrix} = d(q, v) < \varepsilon,$$

тобто $w \in B_\varepsilon(v_m)$. Т.ч., $\exp_p^{-1}(B_\varepsilon(q)) = \bigcup_m B_\varepsilon(v_m)$.

Нарешті, покажемо, що це об'єднання - диз'юнктне. Я це не так: $\exists\, m_1 \neq m_2$ такі, що $\exists\, w \in B_\varepsilon(v_{m_1}) \cap B_\varepsilon(v_{m_2})$. Будемо діяти ан-но до доведення інї вище: $\exists$ нат. парам. найкоротші геод. γ_1, γ_2, що з'єднують v_{m_1}, v_{m_2} з w відп. $\Rightarrow \mu_i := \exp_p \circ \gamma_i$, $i = 1, 2$ - нат. парам. геод. у $B_\varepsilon(q)$, що з'єднують $\exp_p(v_{m_1}) = \exp_p(v_{m_2}) = q$ з $\exp_p(w) \Rightarrow \begin{bmatrix} B_\varepsilon(q) \text{ - нульова нопм.,} \\ \text{це єдина найкоротша} \end{bmatrix} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l}\text{використовуємо єдиність} \\ \text{геод. як у дов. ігу}\end{array}\right] \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 \Rightarrow v_{m_1} = v_{m_2} \Rightarrow m_1 = m_2$ ↯.

Т.ч. $\forall q \in M$ $\exists$ відкр. $B_\varepsilon(q) \ni q$ така, що $exp_p^{-1}(B_\varepsilon(q)) = \bigsqcup\limits_m B_\varepsilon(v_m)$ (диз'юнктне), де усі $B_\varepsilon(v_m)$ - відкр., і $\forall m$ $exp_p : B_\varepsilon(v_m) \to B_\varepsilon(q)$ - гомеоморфізм. Отже, exp_p (що є, зокрема, непер. і знч) - накриття і тому, як було пояснено вище, дифеоморфізм $T_pM \to M$. Зокрема, $\forall p, q \in M$ $q \in B_\varepsilon(p)$, де $0<\varepsilon$ - будь-яке $> d(p,q)$, і $B_\varepsilon(p)$ - нульовий норм. окіл p (бо exp_p: $exp_p^{-1}(B_\varepsilon(p)) \to B_\varepsilon(p)$ - дифео-зм). За властивостями такого околу, $\exists$ і єдина з точністю до заміни параметра найкоротша геодезична, що з'єднує p і q. Якщо $p = \gamma(0)$ і $q = \gamma(a)$ для геод. $\gamma : [0,a] \to M$, то це і є γ. △ (монотонно після заміни параметра), де $\varepsilon : \gamma([0,a]) \subset B_\varepsilon(p)$,

Інші теореми про кривину, що обмежена зверху (ріманові)

Тh (Прессман).

1. Якщо (M, g) - рімановий многовид з $K \leq 0$, M компактний

і зв'язний, то фундаментальна група $\pi_1(M)$ не містить елементів скінченного порядку.

7. Якщо (M,g) - рім. мн. з $K<0$, M компактний і зв'язний, то будь-яка нетривіальна абелева підгрупа $\pi_1(M)$ ізоморфна $\mathbb{Z}$.

▷ Б. - 3. △

<u>Th</u> (про сферу, Берже-Клінгенберг (1960, гомеоморфність) - Брендле (2007) $\underbrace{}_{\text{- Шоен}}$). і $K_0 \equiv const$

Якщо (M,g) - повний однозв'язний n-вимірний рімановий многовид, і $\frac{1}{4}K_0 < K \leq K_0$ для гладкої ф-ції $K_0 > 0$, то M дифеоморфний S^n.

▷ Див. початок історії у Б. - 3 або Скворцов - Еван, і далі оригінальні статті △.

<u>Rem.</u> У випадку, коли маємо обмеження з двох боків, говорять, що кривина защіплена (pinched), зокрема, у <u>Th</u> про сферу вона $\frac{1}{4}$ - защіплена. Див. також М. Громов, Знак и геометрический смысл кривизны.

Порівняння трикутників та простори з внутрішньою метрикою обмеженої кривини

<u>Теореми порівняння трикутників</u>

Тут знову усі рім. многовиди — вимірності ≥ 2 і гладкості ≥ 4, d позначає внутр. м-ку рім. многовида.

<u>def.</u> Трикутником у рімановому многовиді називатимемо набір з 3 точок (вершин) і 3 найкоротших, що попарно їх поєднують (сторін).

<u>Rem.</u> Далі будемо позначати сторони тр-ка Δpqr з вершинами p, q, r просто через pq, qr, rp, навіть якщо вони не визначені однозначно вершинами, просто вважаємо їх фіксованими для даного тр-ка.

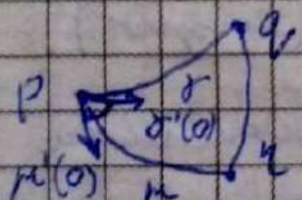
<u>Th.1</u> (Александров)

Нехай (M, g) - рім. многовид з кривиною $K \leq k \in \mathbb{R}$, і Δpqr — трикутник у ньому такий, що $\forall$ двох точок на його сторонах $\exists$ найкоротша, що їх поєднує. При $k > 0$ нехай, крім того,

і єдина з точністю до заміни параметра

$d(p,q)+d(q,r)+d(r,p) \le \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$. Тоді для трикутника $\Delta \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ у $M^2(k)$ з тими ж довжинами відп. сторін (тобто $d(p,q) = d(\tilde{p},\tilde{q})$, $d(q,r)=d(\tilde{q},\tilde{r})$, $d(r,p)=d(\tilde{r},\tilde{p})$) його кути у $\tilde{p},\tilde{q},\tilde{r}$ не менші за кути Δpqr у p,q,r відповідно.

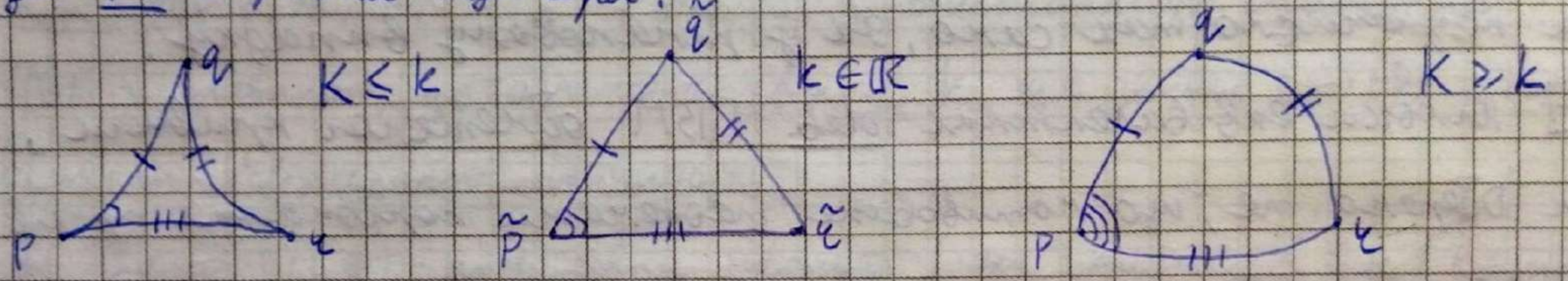
<u>Rem.</u> Тут маються на увазі внутрішні кути між сторонами як між регулярними кривими (тобто, якщо, наприклад, pq –



це $\gamma:[0,a]\to M$, де $\gamma(0)=p$, $\gamma(a)=q$, а pr – це $\mu:[0,b]\to M$, де $\mu(0)=p$, $\mu(b)=r$, то це кут між $\gamma'(0)$ і $\mu'(0)$).

<u>Rem.</u> У $M^2(k)$ тр-к $\Delta\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ однозначно (з точністю до ізометрій $M^2(k)\to M^2(k)$) визначений довжинами сторін (точніше, при $k>0$, тобто для сфери, це так в силу обмеження на периметр з умови <u>Th.1.</u>), а отже визначені і кути. При $k\le 0$ умова з'єднуваності $\forall$ пари точок на сторонах

Єдиного найкоротшого відрізка для повного однозв'язного (M,g) за Тм. Картана-Адамара.



Тм.2 (Александров при $n=2$, Топоногов при $n \geq 3$).
Нехай (M,g) – повний рімановий многовид з кривиною $K \geq k \in \mathbb{R}$.
Тоді $\forall$ тр-ка Δpqr у (M,g) $\exists$ тр-к $\Delta \tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ у $M^2(k)$ з тими ж довжинами сторін (як у Тм.1), і його кути у $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$ не більші за кути Δpqr у p, q, r відповідно.

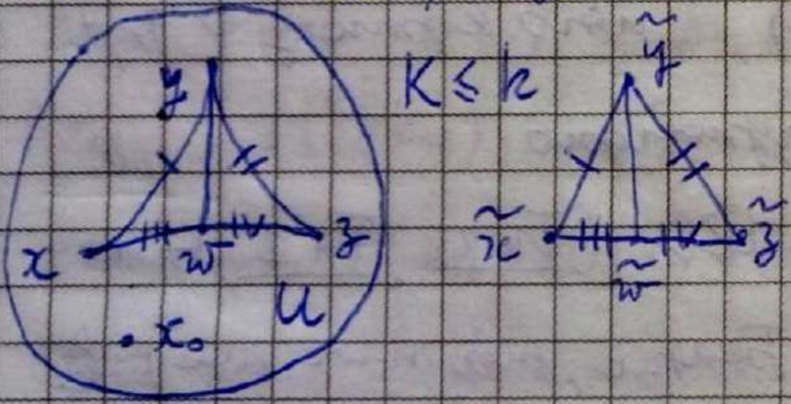
$\triangleright$ Обидві – у Б.-З., також у Cheeger-Ebin (Тм.2, Тм.1 є наслідком теореми порівняння Рауха [illegible], див. там все) $\triangleleft$

Узагальнення на метричні простори

Нехай тепер (X, Γ, ℓ) – ПВМ, $d = d_\ell$ – його внутрішня метрика. Трикутники, усі вершини та сторони визначаємо та позначаємо так само, як у рімановому випадку.

$\exists$ кілька еквівалентних озн. ПВМ обмеженої кривини, ми оберемо те, що мотивоване теоремами порівняння тр-ків. Усі деталі, доведення, приклади, огляд інших означень і подальша інформація – у Бураго-Бураго-Іванов (див. також Громов).

Озн. ПВМ X зветься простором кривини, що обмежена зверху (відп., знизу) числом $K \in \mathbb{R}$, якщо $\forall\, x_0 \in X$ $\exists$ відкр. $U \ni x_0$ така, що в U $\forall$ дві



точки можна з'єднати найкоротшою, і (носія) $\forall\, x, y, z, w \in U$ таких, що w належить до (якоїсь) найкоротшої xz (і $d(x,y)+d(y,z)+d(z,x) < \frac{2\pi}{\sqrt{K}}$ при $K>0$) і $\forall\, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w} \in M^2(K)$ таких, що $d(\tilde{x},\tilde{y}) = d(x,y)$, $d(\tilde{y},\tilde{z}) = d(y,z)$, $d(\tilde{z},\tilde{x}) = d(z,x)$, $\tilde{w}$ належить до (носія) найкоротшої $\tilde{x}\tilde{z}$, $d(\tilde{x},\tilde{w}) = d(x,w)$ виконано

$d(y,w) \le d(\tilde{y},\tilde{w})$ (відп. $d(y,w) \ge d(\tilde{y},\tilde{w})$).

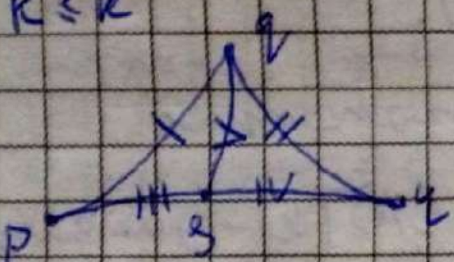
<u>Rem.</u> Знову ж, тр-к у $M^2(k)$ $\exists!$ з точністю до ізометрії.

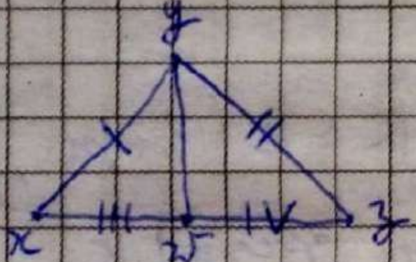
ПВМ з кривиною, що обмежена <u>зверху</u> k, ще звуть $CAT(k)$-простори (Cartan - Alexandrov - Toponogov).

<u>Pr.</u> Якщо (M,g) - рімановий многовид (секц.) кривина $K \le k$ (відп. $K \ge k$), $k \in \mathbb{R}$, то це - ПВМ кривини, що обмежена зверху (відп. знизу) k.

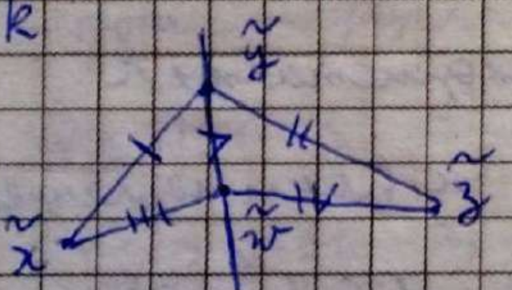
$\triangleright$ Покажемо для $K \le k$, для $K \ge k$ ан-но (але з використанням "локальної версії" <u>Th. 2</u>, що не вимагає повноти). За власт. нормальних околів, $\forall p_0 \in M$ $\exists$ відкр. $U \ni p_0$ така, що $\forall p \in U$ $U \subset B^N_\varepsilon(p)$ (кульовий норм. окіл; тут $\varepsilon > 0$ фіксоване для U), тому в U між $\forall$ двома точками $\exists!$ (з точністю до заміни параметра) геод., найкоротша. Нехай $p, q, r \in U$, s належить до (носія) найкоротшої pr. Побудуємо два набори точок у $M^2(k)$: x, y, z, w і $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}$ так, що:

$K \le k$





k



$d(p,q)=d(x,y)=d(\tilde x,\tilde y)$, $d(q,r)=d(y,z)=d(\tilde y,\tilde z)$, $w \in$ (носій) найкор. xz, $d(p,r)=d(x,z)$, $d(p,s)=$ $=d(x,w)$ ($\Rightarrow d(s,r)=d(w,z)$), $\tilde x$ і $\tilde z$ лежать по різні боки від (повної) геодезичної $M^2(k)$, що проходить через $\tilde y$ і $\tilde w$, і $d(p,s)=$ $=d(\tilde x,\tilde w)$, $d(s,r)=d(\tilde w,\tilde z)$, $d(q,s)=d(\tilde y,\tilde w)$.

Використаємо наступний спільний факт евклідової, гіперболічної та сферичної двовимірних геометрій:

<u>Лем</u> (Александров). Якщо $x,y,z,w,\tilde x,\tilde y,\tilde z,\tilde w \in M^2(k)$, $\tilde x$ і $\tilde z$ лежать по різні боки від (повної) геодезичної, що проходить через $\tilde y$ і $\tilde w$, $\tilde w$ належить до (носія) найкоротшої xz, і $d(x,y)=d(\tilde x,\tilde y)$, $d(y,z)=$ $=d(\tilde y,\tilde z)$, $d(x,w)=d(\tilde x,\tilde w)$, $d(w,z)=d(\tilde w,\tilde z)$, то:

$$\angle \tilde x\tilde w\tilde y + \angle \tilde z\tilde w\tilde y \le \pi \iff d(\tilde y,\tilde w) \ge d(y,w),$$

$\angle \tilde{x}\tilde{w}\tilde{y} + \angle \tilde{z}\tilde{w}\tilde{y} \geq \pi \Leftrightarrow d(\tilde{y},\tilde{w}) \leq d(y,w)$,

і так само для строгих нерівностей.

⊙ Впр. ◭

У нашому випадку усі ці умови виконані, і $\angle \tilde{x}\tilde{w}\tilde{y} + \angle \tilde{z}\tilde{w}\tilde{y} \geq$

$\geq \left[\begin{array}{l} \underline{\text{Тв. 1}} \text{ для } \Delta pzq \text{ і} \\ \Delta uzq \text{ в силу} \\ \quad k \geq K \end{array}\right] \geq \angle pzq + \angle uzq = \angle pzu = \pi \Rightarrow [\underline{\text{Лем.}} \text{ Александрова}] \Rightarrow$

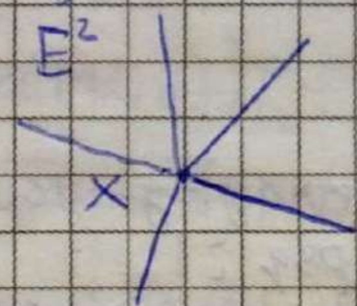
$\Rightarrow d(y,w) \geq d(\tilde{y},\tilde{w}) = d(q,z)$, що й означає, що M як ПВМ-кривини, що обмежена зверху k (у термінах <u>def.</u> вище x, y, z, w - це наші $p, q,$ u, z, а $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}$ - наші x, y, z, w відп.) ◭

<u>Rem.</u> Вірно й обернене, і обидві ці умови ($K \leq k$ або $K \geq k$ у рімановому та метричному сенсах) екв-ні твердженням відп. теорем порівняння тр-ків (їхніх "локальних версій"), що залишаються вірними і у ПВМ для правильного визначення кутів (через <u>Тв.</u> посилання)

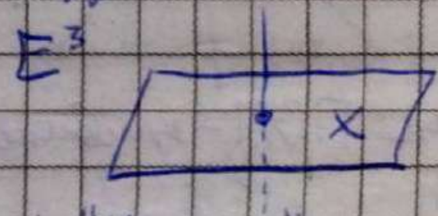
<u>def.</u> ПВМ зветься простором Адамара, якщо він CAT(0) (тобто кривина ≤ 0) повний та однозв'язний.

Ex.1. Ріманові простори Адамара (за попер. Рч.).

2. "Вентилятори": об'єднання променів зі спільним початком у E^2 з індукованого внутр. м-ного: (Впр.).

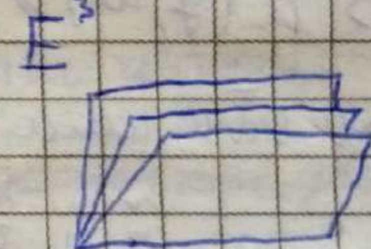


3. Об'єднання Oxy і Oz у E^3 з індукованого внутр. м-ного:



(Впр.)

4. "Книги": об'єднання напівплощин по спільній прямій у E^3 з індук. внутр. м-ного (Впр.):



(такі приклади мотивують поняття "метричного склеювання" просторів - див. Б.Б.І.)

Тп. (узагальнена Картана-Адамара).

У просторі Адамара X $\forall$ геодезична $\gamma : [0,a] \to X$ - єдина (з точністю до заміни параметра) найкоротша, що з'єднує

$\gamma(0)$ і $\gamma(a)$. Крім того, $\forall\, x, y \in X$ $\exists$ найкоротша, що з'єднує x і y.

Rem. Для локально компактних X існування найкоротших випливає з Th. Х.-Р.-К.-Ф., повноти і зв'язності, але пр-ри Адамара не обов'язково лок. компактні.

$\triangleright$ Див. Б.-Б.-І. Ідея: $\forall\, x \in X$ позначимо $X_x := \{\gamma \in C([0,1], X) \mid$ параметризована "майже натурально": $\forall t\ l(\gamma|_{[0,t]}) = \lambda t$ ($\lambda \geq 0$, таке, що...), $\gamma(0) = x$, γ - геодезична$\}$. Введемо на X_x топологію за допомогою м-ки $\rho(\gamma, \mu) = \max\limits_{t \in [0,1]} d(\gamma(t), \mu(t))$ і розглянемо аналог експоненційного відображення: $\exp_x : X_x \to X : \gamma \mapsto \gamma(1)$. Воно неперервне (Впр.) і зим за другою частиною теореми (у вип. лок. компактності - за Th. Х.-Р.-К.-Ф.). Тоді доводиться, що $\exp_p$ - накриття (при цьому, так само як у р.м. випадку, будується внутр. м-ка на X_x така, що $\exp_x$ - ізометрія в околі $\forall$ точки - в аналогах нормальних околів), а отже гомеоморфізм, бо X однозв'язний. Т.ч., $\forall\, y \in X$ $\exists$!

прообраз у X_x, що і буде єдиною найкоротшою геод. $\triangle$

Th. (про глобалізацію у просторах Адамара)

Якщо ПВМ X – $CAT(k)$, $k \leq 0$, і простір Адамара, то умова на X з def. кривини, що обмежена зверху k, виконана для будь-яких трикутників.

Th. (Топоногова про глобалізацію)

Якщо ПВМ X – кривини, що обмежена знизу k і повний, то умова на X з def. кривини, що обмежена знизу k, виконана для будь-яких трикутників.

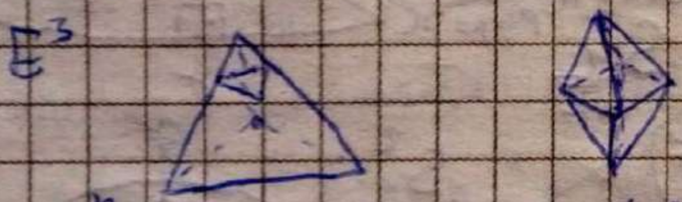
Rem. У таких випадках говорять, що X – глобально ("в цілому") обмеженої кривини. Пор. формулювання другої з цих теорем з Th. г. Топоногова про порівняння трикутників.

def. ПВМ зветься простором Александрова, якщо воно і кривини, що обмежена знизу k, повний, зв'язний і при $k > 0$ не ізометричний $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, відрізку довжини $> \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ і колу довжини $> \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$.

<u>Rem.</u> Тут $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$, відрізок, коло та їхні довжини - евклідові

<u>Ex. 1.</u> Ріманові мн. з $K \geq k$, повні та зв'язні (за <u>Pr.</u> вище; тут вимірність $n \geq 2$, тому це не пряма і не коло, і тим більше не $\mathbb{R}_+$ або відрізок)

<u>2.</u> Опуклі багатогранники у E^3 з індукованою внутр. м-кою - пр-ри Александрова кривини ≥ 0 (<u>Впр.</u> [redacted]):



(Є й більш загальне поняття опуклої поверхні).

<u>Rem.</u> Виключення у <u>def.</u> знадобилися, зокрема, для вірності наступного узагальнення (оскільки у випадку метричних просторів немає обмеження $n \geq 2$):

<u>Th.</u> (узагальнена Бонне)

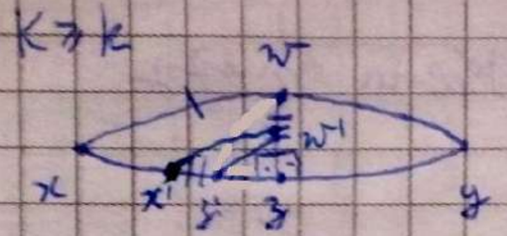
Якщо X – простір Александрова кривини, що обмежена знизу $k>0$, то його діаметр $\operatorname{diam} X \le \frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

<u>Rem.</u> Якщо при цьому X лок. компактний, то він компактний за <u>Th.</u> Х.-Р.-К.-Ф. аналогічно до ріманового випадку.

▷ Див. Б.-Б.-І. Ідея: ↗ $\operatorname{diam} X > \frac{\pi}{\sqrt{k}}$, тобто $\exists\, x, y \in X$ такі, що $d(x,y) > \frac{\pi}{\sqrt{k}}$. Тоді доводиться, що існує найкоротша xy, що їх з'єднує, а також точки z на (посер.) xy та $w \in X$ такі, що $d(x,z) > \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$, $d(z,y) > \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$, і $\angle wzx = \angle wzy = \frac{\pi}{2}$, що в даному випадку означає просто виконання "граничної" теореми Піфагора: $\lim\limits_{w',x'\to z} d(w',x')^2 - d(w',z)^2 - d(z,x')^2 = 0$, $\lim\limits_{w',y'\to z} d(w',y')^2 - d(w',z)^2 - d(z,y')^2 = 0$ для $w' \in wz$, $x' \in xz$, $y' \in yz$, що прямують до z. Саме на цьому етапі важливе виключення з просторів Александрова одновимірних випадків.

Тоді за <u>Th.</u> Топоногова про глобалізацію існує трикутник порівняння $\Delta \tilde{x}\tilde{z}\tilde{w}$ у $M^2(k) = S^2_{\frac{1}{\sqrt{k}}}$ з тими ж довжинами сторін:

$d(\tilde{x},\tilde{z}) = d(x,z) > \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$, $d(\tilde{x},\tilde{w}) = d(x,w)$, $d(\tilde{w},\tilde{z}) = d(w,z)$.



Тоді $\angle \tilde{w}\tilde{z}\tilde{x} \leq \angle wzx = \frac{\pi}{2}$. Це виглядає як узагальнення Th. 2. Топоногова на ПВМ, але є фактично переформулюванням def. обмеженої кривини. Дійсно, у нашому випадку нехай z'-якась точка на (най) $x'z$, а $\tilde{z}'$ — на (най) $\tilde{x}\tilde{z}$ такі, що $d(z',z) = d(\tilde{z}',\tilde{z})$ (де $x' \to z$). Тоді за def. $d(\tilde{w}',\tilde{z}') \leq d(w',z')$, отже $d(\tilde{w}',\tilde{z}')^2 \leq d(w',z')^2 =$ [умова на кут; теорема Піф.] $\underset{x',w' \to z}{=} d(w',z)^2 + d(z,z')^2 \underset{x',w' \to z}{=} d(\tilde{w}',\tilde{z})^2 + d(\tilde{z},\tilde{z}')^2$, а це й значить, що $\angle \tilde{w}\tilde{z}\tilde{x} \leq \frac{\pi}{2}$

Тоді $d(\tilde{x},\tilde{w}) < d(\tilde{x},\tilde{z})$. Дійсно, якщо $\tilde{x}$ - півн. полюс $S^2_{\frac{1}{\sqrt{k}}}$, то $\tilde{z}$ знах. під екватором (бо $d(\tilde{x},\tilde{z}) > \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$), і є строго найнижчою точкою великого кола, що прох. через $\tilde{z}$ і $\perp \tilde{x}\tilde{z}$. Тоді $\angle \tilde{w}\tilde{z}\tilde{x} \leq \frac{\pi}{2}$ означає, що $\tilde{w}$ - не нижче цього кола, тому строго ближче до $\tilde{x}$. Отже, $d(x,w) < d(x,z)$. Ан-но, $d(y,w) < d(y,z)$. Тому об'єднання найкоротших xw і wy має довжину $< l(xy)$! ↯ ▲