Лекції з топології

Петров Є.В.

25 листопада 2024 р.

Зміст

Топологія – це частина математики, що вивчає загальне поняття неперервності, відношення еквівалентності, що будуються за допомогою неперервних відображень, та інваріанти цих відношень. Стандартним підходом до введення цих концепцій є використання поняття топологічного простору.

1 Топологічний простір. Околи

Означення 1.1. Нехай X – довільна множина. *Топологією* на X зветься сукупність $\mathcal{T}$ підмножин X, що задовольняє наступним властивостям:

1. Об'єднання будь-якої сукупності підмножин з $\mathcal{T}$ належить до $\mathcal{T}$, тобто якщо $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T}$, то $\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

2. Перетин будь-якої скінченної сукупності підмножин з $\mathcal{T}$ належить до $\mathcal{T}$, тобто якщо $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

3. Порожня множина і сама множина X належать до $\mathcal{T}$: $\varnothing, X \in \mathcal{T}$.

Пара $(X, \mathcal{T})$, що складається з множини та топології на ній, зветься *топологічним простором*. Підмножини X, що належать до $\mathcal{T}$, називаються *відкритими* підмножинами цього простору (або відкритими в X відносно топології $\mathcal{T}$).

Зауваження. У позначеннях вище A – множина індексів (довільної потужності), n – натуральне число. Перераховані вимоги 1.–3. часто називають *аксіомами топології*. Інколи аксіому 3. виводять з перших двох, використовуючи стандартні узгодження теорії множин про об'єднання і перетин порожньої сукупності множин. Якщо зрозуміло, про яку топологію на множині X йдеться, ми будемо опускати її явне позначення і говорити просто про топологічний простір X. Елементи топологічного простору традиційно називають його *точками*.

Означення 1.2. Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір. Підмножина $V \subset X$ називається *околом* точки $x \in X$, якщо існує відкрита підмножина U (тобто $U \in \mathcal{T}$) така, що $x \in U \subset V$.

Має місце наступний простий критерій відкритості множини:

Твердження 1.1. *Підмножина $U \subset X$ відкрита тоді й тільки тоді, коли вона є околом кожної своєї точки $x \in U$.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Необхідність очевидна, оскільки для будь-яких $U \in \mathcal{T}$ і $x \in U$ маємо $x \in U \subset U$.

$\underline{\Leftarrow}$ Перевіримо достатність. Нехай для кожної точки $x \in U$ множина U є околом x, тобто існує відкрита $U_x \in \mathcal{T}$ така, що $x \in U_x \subset U$. Об'єднання усіх таких множин міститься в U, бо кожна з них міститься в U:

$$\bigcup_{x \in U} U_x \subset U.$$

З іншого боку, кожна точка $x \in U$ міститься у відповідній множині: $x \in U_x \subset \bigcup\limits_{x \in U} U_x$, тому маємо обернене включення:

$$U \subset \bigcup_{x \in U} U_x.$$

Отже,

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x \in \mathcal{T}$$

відкрита як об'єднання відкритих підмножин за аксіомою <u>1.</u>

■

Зауваження. У деяких джерелах поняття "окіл x" означає "відкритий окіл x", тобто, в силу попереднього твердження, будь-яку відкриту множину, що містить x. Як правило, у всіх означеннях і твердженнях, що використовують ці поняття, вони взаємозамінні (перевірка цього у кожному конкретному випадку може розглядатися як нескладна вправа).

Наведемо деякі класичні приклади топологій та відповідних топологічних просторів.

Приклад 1.1. Нехай X – довільна множина. В якості системи підмножин виберемо $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$. Ясно, що аксіоми <u>1.</u>–<u>3.</u> для такої сукупності виконані, і вона утворює топологію на X, що зветься *тривіальною* або *антидискретною* топологією на X.

Приклад 1.2. Нехай X – довільна множина. В якості сукупності підмножин $\mathcal{T}$ виберемо систему всіх підмножин X (інколи це позначають $\mathcal{T} = 2^X$). Так само очевидно, що аксіоми <u>1.</u>–<u>3.</u> виконані, і система $\mathcal{T}$ утворює топологію на X. Її називають *дискретною* топологією на X.

Приклад 1.3. Нехай множина X складається з двох точок: $X = \{x, y\}$. Неважко встановити, що існують всього 4 сукупності підмножин X, які задовольняють аксіомам топології:

- $\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, \{x, y\}\}$ – тривіальна;
- $\mathcal{T}_2 = \{\varnothing, \{x, y\},\ \{x\},\ \{y\}\}$ – дискретна;
- $\mathcal{T}_3 = \{\varnothing, \{x, y\},\ \{x\}\}$;
- $\mathcal{T}_4 = \{\varnothing, \{x, y\},\ \{y\}\}$.

Системи $\mathcal{T}_3$ і $\mathcal{T}_4$ звуться топологіями *зв'язної двокрапки.*

Вправа 1.1. Описати всі топології на триточковій множині $X = \{x, y, z\}$.

Приклад 1.4. Розглянемо дійсну пряму $X = \mathbb{R}$. Визначимо сукупність її підмножин $\mathcal{T}$ умовою:

$$\mathcal{T} \coloneqq \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall\, x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0\colon (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U\}.$$

Тобто множина належить до $\mathcal{T}$ тоді й тільки тоді, коли кожна її точка входить до неї з деяким ε-околом. Перевіримо, що ця сукупність утворює топологію на $\mathbb{R}$:

1. Для довільної сукупності підмножин $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$ і довільної точки $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, оскільки $x \in U_\alpha$ для деякого індекса $\alpha \in A$, існує $\varepsilon > 0$ таке, що
$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$
Тому $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

2. Для довільної скінченної сукупності підмножин $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$ і довільної $x \in \bigcap\limits_{i=1}^n U_i$ маємо $x \in U_i$ для кожного $i = \overline{1, n}$. Тому для кожного i існує таке $\varepsilon_i > 0$, що $(x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subset U_i$. Покладемо $\varepsilon \coloneqq \min\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n > 0$. Тоді для усіх $i = \overline{1, n}$
$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subset U_i,$$
тому
$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i,$$
отже $\bigcap\limits_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

3. Для порожньої множини умова виконується тривіально; для будь-якої $x \in \mathbb{R}$ достатньо взяти $\varepsilon = 1$.

Ця топологія зветься *стандартною* (*природною*, *натуральною*, *евклідовою*) топологією прямої. Це приклад *метричної топології* (детальніше про це див. нижче у розділі 7).

Стандартним прикладом відкритої множини у цій топології є інтервал. Так, для довільної точки скінченного інтервала $x \in (a, b)$ можна взяти $\varepsilon \coloneqq \min\{x - a, b - x\}$, для напівнескінченних інтервалів усе ще простіше. З іншого боку, наприклад, напівінтервали не є відкритими: для будь-якого $\varepsilon > 0$ окіл $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ не міститься у $[a, b)$. Зауважимо, що $[a, b)$ можна представити у вигляді перетину зліченної кількості інтервалів: $[a, b) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$. Тому умова скінченності у аксіомі 2. топології для цього прикладу суттєва.

Важливість інтервала як приклада відкритої підмножини стандартної прямої підкреслюється наступною теоремою:

Теорема 1.1 (Опис відкритих підмножин прямої)**.** *Підмножина $U \subset \mathbb{R}$ дійсної прямої зі стандартною топологією є відкритою тоді й тільки тоді, коли вона є об'єднанням не більш ніж зліченної кількості інтервалів, що попарно не перетинаються.*

Зауваження. Вираз "не більш ніж зліченний" означає "скінченний або зліченний". Об'єднання підмножин, що попарно не перетинаються, зазвичай називають *диз'юнктним* і позначають знаком $\sqcup$. Отже, в теоремі стверджується, що відкриті підмножини прямої – це в точності ті, що мають вигляд

$$U = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i),$$

де замість ∞ може стояти натуральне n або 0 – для порожньої U, інтервали можуть мати нескінченні межі, й $(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \varnothing$ при $i \neq j$.

Доведення. $\underline{\Leftarrow}$ Достатність тут очевидна: ми вже встановили, що інтервали відкриті, а отже і їхні об'єднання.

$\underline{\Rightarrow}$ Покажемо зворотне. Нехай $U \subset \mathbb{R}$ – відкрита, і $x \in U$. За означенням, існує таке $\varepsilon_x > 0$, що $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subset U$. Покладемо:

$$a_x \coloneqq \inf\{a \mid \exists\, (a, b)\colon x \in (a, b) \subset U\};$$

$$b_x \coloneqq \sup\{b \mid \exists\, (a, b)\colon x \in (a, b) \subset U\}.$$

За побудовою, $a_x \leqslant x - \varepsilon_x < x$ і $b_x \geqslant x + \varepsilon_x > x$, тобто $x \in (a_x, b_x)$. З іншого боку, $(a_x, b_x) \subset U$. Дійсно, якщо $y \in (a_x, b_x)$ і, скажімо, $y \leqslant x$, то з $a_x < y$ і означення інфімума маємо, що існує інтервал (a, b) такий, що $x \in (a, b) \subset U$ і $a_x \leqslant a < y$. Тоді $y \in (a, x] \subset (a, b) \subset U$. Аналогічно отримуємо $y \in U$ і для випадку $y \geqslant x$ з властивостей супремума.

Вправа 1.2. Перевірити, що

$$(a_x, b_x) = \bigcup_{x \in (a,b) \subset U} (a, b),$$

і що (a_x, b_x) – найбільший за включенням інтервал, що містить x і міститься в U (це не буде потрібне для подальшого доведення).

Отже, оскільки для кожного $x \in U$ маємо $x \in (a_x, b_x) \subset U$, аналогічно до доведення попереднього твердження отримуємо, що

$$U = \bigcup_{x \in U} (a_x, b_x).$$

Нехай два таких інтервали (a_x, b_x) і (a_y, b_y) перетинаються, тобто мають спільний елемент $z \in (a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) \neq \varnothing$. Тоді, оскільки $z \in (a_x, b_x) \subset U$, $(a_x, b_x) \subset (a_z, b_z)$ за побудовою a_z і b_z. Зокрема, $x \in (a_x, b_x) \subset (a_z, b_z)$, тому, з аналогічних міркувань, $(a_z, b_z) \subset (a_x, b_x)$. Таким чином, $(a_x, b_x) = (a_z, b_z)$. Аналогічно, $(a_y, b_y) = (a_z, b_z)$, тому $(a_y, b_y) = (a_x, b_x)$. Отже, ми показали, що будь-які два побудовані нами інтервали або не перетинаються, або збігаються. Зауважимо, що межі цих інтервалів не обов'язково скінченні: можливо $a_x = -\infty$ або $b_x = +\infty$, і для цих випадків усі попередні міркування залишаються вірними.

Згрупуємо інтервали, що збігаються, залишивши лише попарно різні (а отже такі, що не перетинаються), і перепозначимо їх за допомогою множини індексів A. Отримаємо диз'юнктне об'єднання:

$$U = \bigsqcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha).$$

Залишилося помітити, що в кожному з цих інтервалів, що попарно не перетинаються, є раціональне число, тому потужність $|A| \leqslant |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, тобто A не більш ніж зліченна. Це й означає, що множина U має потрібний вигляд.

$\blacksquare$

Приклад 1.5. Знову покладемо $X = \mathbb{R}$, а в якості системи підмножин в X розглянемо

$$\mathcal{T} \coloneqq \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty)\}_{a \in \mathbb{R}}.$$

Неважко пересвідчитися у тому, що це топологія на $\mathbb{R}$:

1. $\bigcup\limits_{\alpha\in A}(a_\alpha,+\infty) = (\inf\{a_\alpha\}_{\alpha\in A},+\infty)$. Це виконується й для випадку, коли одна з лівих меж дорівнює $+\infty$ (тобто відповідна множина порожня) або $-\infty$ (тобто це вся пряма) – перевірте це!

2. $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(a_i,+\infty) = (\max\{a_i\}_{i=1}^n,+\infty)$. Це теж справедливо й для нескінченних меж. Як і у минулому прикладі, скінченність перетину тут є суттєвою (чому?).

3. виконана за побудовою.

Така $\mathcal{T}$ зветься *топологією напівнескінченних інтервалів* на прямій.

2 Замкнені множини

Означення 2.1. Нехай $(X,\mathcal{T})$ – топологічний простір. Підмножина $V\subset X$ зветься *замкненою*, якщо доповнення до неї $X\setminus V$ відкрите (тобто $X\setminus V\in\mathcal{T}$).

Властивості замкнених підмножин топологічного простору дуальні до властивостей відкритих:

Твердження 2.1 (Властивості замкнених множин)**.** *Нехай $(X,\mathcal{T})$ – топологічний простір.*

1. *Перетин будь-якої сукупності замкнених підмножин замкнений, тобто якщо $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ замкнені, то $\bigcap\limits_{\alpha\in A}V_\alpha$ замкнена.*

2. *Об'єднання будь-якої скінченної сукупності замкнених підмножин замкнене, тобто якщо $\{V_i\}_{i=1}^n$ замкнені, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_i$ замкнена.*

3. *Порожня множина та X замкнені.*

Доведення. Ці властивості випливають з означень топології, замкненої множини та формул де Моргана:

$$X\setminus\bigcap_{\alpha\in A}V_\alpha=\bigcup_{\alpha\in A}(X\setminus V_\alpha);$$

$$X\setminus\bigcup_{i=1}^{n}V_i=\bigcap_{i=1}^{n}(X\setminus V_i).$$

■

Повернемося до наших прикладів топологій:

Приклад 2.1. У тривіальній топології є лише дві відкритих підмножини $\varnothing$ та X, тому в точності вони є і замкненими. У подальшому ці дві одночасно відкриті й замкнені у кожній топології множини ми будемо називати *тривіальними*.

Приклад 2.2. Відносно дискретної топології будь-яка підмножина X є відкритою і замкненою одночасно.

Приклад 2.3. У топології зв'язної двокрапки $\mathcal{T}_3 = \{\varnothing, \{x, y\}, \{x\}\}$ на двоточковій множині $X = \{x, y\}$ єдиною нетривіальною замкненою підмножиною є $\{y\}$. Аналогічно для топології $\mathcal{T}_4$ (у позначеннях прикладу 1.3) на цій множині.

Приклад 2.4. Приклади замкнених підмножин прямої $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією суб'єктивно різноманітніші, ніж відкритих. Зокрема, до них відносяться:

- Відрізки $[a, b]$ (зокрема, одноточкова множина $\{a\} = [a, a]$), бо доповнення $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ відкрите в даній топології. Аналогічно для напівнескінченних відрізків $[a, +\infty)$ і $(-\infty, b]$.

- Множина цілих чисел $\mathbb{Z}$, бо доповнення $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$ відкрите (і аналогічно для множини натуральних чисел $\mathbb{N}$).

- Множина Кантора утворюється з відрізка $[0, 1]$ послідовним викиданням інтервалів $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$; $(\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$, $(\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$, $(\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$, $(\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$ і т.д. Вона замкнена, бо її доповнення є об'єднанням зліченної кількості інтервалів, що попарно не перетинаються. Також її можна описати як множину дійсних чисел від 0 до 1, запис яких у трійковій системі числення не містить одиниць, лише нулі та двійки (відтворіть деталі самостійно). Як відомо з курсу аналіза, ця множина, зокрема, континуальна. Її більш детальний опис можна знайти у [18, с. 57-58].

З іншого боку, напівінтервал $[a, b)$ не замкнений, оскільки його доповнення $\mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ не відкрите в цій топології (чому?). При цьому $[a, b) = \bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}]$ (де n_0 – натуральне число достатньо велике для того, щоб ці відрізки існували), тож умова скінченності об'єднання у властивості <u>2.</u> твердження 2.1 суттєва.

Вправа 2.1. Показати, що множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ не є замкненою в цій топології.

Приклад 2.5. У прямій $\mathbb{R}$ з топологією напівнескінченних інтервалів нетривіальні замкнені підмножини мають вигляд $(-\infty, a]$.

Дуальність властивостей відкритих і замкнених множин підказує нам, що топологію можна визначати за допомогою сукупності замкнених підмножин:

Твердження 2.2. *Нехай $\mathcal{C}$ – система підмножин деякої множини X, що задовольняє умовам 1.–3. з твердження 2.1. Тоді*

$$\mathcal{T} \coloneqq \{U \mid X \setminus U \in \mathcal{C}\}$$

є топологією на X, а $\mathcal{C}$ – сукупністю підмножин, що замкнені у цій топології.

Доведення. Як і твердження 2.1, це безпосередній наслідок означень і формул де Моргана.

∎

Приклад 2.6. Нехай X – довільна множина, а $\mathcal{C}$ складається з усіх скінченних підмножин X і (за потреби) самої X. Умови 1.–3. твердження 2.1 для такого $\mathcal{C}$, очевидно, виконані, бо перетин будь-якої кількості та об'єднання скінченної кількості скінченних підмножин скінченні. Отже, доповнення до скінченних підмножин (і $\varnothing$ за потреби) утворюють топологію на X, що зветься *кофінітною.* Якщо X скінченна, то ця топологія збігається з дискретною. Зауважимо, що для $X = \mathbb{R}$ скінченні підмножини й уся пряма – це в точності множини коренів деяких поліномів, тобто $V = \{x \mid f(x) = 0\}$ для $f \in \mathbb{R}[x]$. Дійсно, множині $V = \{a_i\}_{i=1}^n$ відповідає $f = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$, порожній множині – $f = 1$, а всій прямій – $f = 0$. Узагальнимо це спостереження на випадок довільної вимірності у наступному прикладі.

Приклад 2.7. Розглянемо у $X = \mathbb{R}^n$ систему *алгебраїчних* підмножин

$$\mathcal{C} \coloneqq \big\{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall f \in S\ f(x) = 0\}\big\}_{S \subset \mathbb{R}[x^1, \ldots, x^n]}$$

тобто спільних коренів для усіх множин (систем) S поліномів від n змінних (додаткова вправа для читачів, що знайомі з теорією кілець: перевірити, що замість довільних множин S достатньо розглядати ідеали кільця поліномів $\mathbb{R}[x^1, \ldots, x^n]$).

Вправа 2.2. Показати, що $\mathcal{C}$ задовольняє умовам 1.–3. твердження 2.1.

Тобто $\mathcal{C}$ є сукупністю замкнених підмножин деякої топології на $\mathbb{R}^n$. Вона називається *топологією Зариського* і є природним вибором для багатьох задач *алгебраїчної геометрії* – дисципліни, що вивчає алгебраїчні множини. Зауважимо, що $\mathbb{R}$ тут можна замінити на довільне поле.

3 Порівняння топологій

Означення 3.1. Нехай X – деяка множина, а $\mathcal{T}$ і $\mathcal{S}$ – топології на X. Кажуть, що $\mathcal{T}$ *слабша* (*грубша*) за $\mathcal{S}$, а $\mathcal{S}$ *сильніша* (*тонша*) за $\mathcal{T}$, якщо будь-яка підмножина, що відкрита відносно топології $\mathcal{T}$, є відкритою й відносно топології $\mathcal{S}$. Це позначається $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ або $\mathcal{S} \succ \mathcal{T}$.

Зауваження. Звичайно, це просто включення двох систем підмножин: $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ означає $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Зокрема, воно встановлює *відношення (часткового) порядку* на множині топологій X, що задовольняє відповідним аксіомам:

- $\mathcal{T} \prec \mathcal{T}$ для будь-якої $\mathcal{T}$ (*рефлексивність*);
- якщо $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ і $\mathcal{S} \prec \mathcal{T}$, то $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ (*антисиметричність*);
- якщо $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ і $\mathcal{S} \prec \mathcal{R}$, то $\mathcal{T} \prec \mathcal{R}$ (*транзитивність*).

Замість топологій можна порівнювати сукупності замкнених множин, як у прикладі 3.4 нижче (чому?).

Приклад 3.1. Тривіальна топологія на довільній множині слабша за будь-яку іншу, тобто є найслабшою.

Приклад 3.2. Дискретна топологія на довільній множині сильніша за будь-яку іншу, тобто є найсильнішою.

Приклад 3.3. На двоточковій множині $X = \{x, y\}$ топології зв'язної двокрапки $\mathcal{T}_3$ і $\mathcal{T}_4$ (див. позначення вище) знаходяться між тривіальною $\mathcal{T}_1$ і дискретною $\mathcal{T}_2$: $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_3 \prec \mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_4 \prec \mathcal{T}_2$. При цьому вони непорівнювані між собою, бо у кожній з них є відкрита множина, якої немає у іншій ($\{x\}$ та $\{y\}$ відповідно).

Приклад 3.4. На прямій $\mathbb{R}$ крім тривіальної (найслабшої) та дискретної (найсильнішої) маємо три приклади топологій: стандартну, напівнескінченних інтервалів і кофінітну. При цьому топологія напівнескінченних інтервалів та кофінітна топологія слабші за стандартну: у кожній з них відкриті множини є, очевидно, об'єднанням інтервалів, а отже відкриті у стандартній. Але між собою ці дві топології непорівнювані. Наприклад, множина $(-\infty, 0]$ є замкненою у топології напівнескінченних інтервалів, але не у кофінітній (бо нескінченна і не збігається з усією прямою), а $\{0\}$ – навпаки.

4 База топології

Згадаємо, що у стандартній топології числової прямої відкриті множини є об'єднаннями інтервалів: це випливає з теореми 1.1 або просто з означення цієї топології. Це дає нам ідею "економного" описання топології за допомогою об'єднань множин з деякого "стандартного набору", що формалізована у наступному означенні:

Означення 4.1. Деяка сукупність $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ відкритих підмножин топологічного простору $(X, \mathcal{T})$ зветься *базою* топології $\mathcal{T}$, якщо для будь-якої відкритої множини $U \in \mathcal{T}$ і будь-якої її точки $x \in U$ існує така $V \in \mathcal{B}$, що $x \in V \subset U$.

Перш за все, переформулюємо це означення і покажемо, що воно відповідає викладеній вище ідеї:

Твердження 4.1. *Система відкритих множин $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ є базою топології $\mathcal{T}$ тоді й тільки тоді, коли будь-яка відкрита множина $U \in \mathcal{T}$ є об'єднанням деякої сукупності множин, що належать до $\mathcal{B}$: існує $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{B}$ така, що $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha$.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Дійсно, якщо $\mathcal{B}$ – база, то для кожної відкритої U і кожної $x \in U$ знайдеться $V_x \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V_x \subset U$. Тоді $U = \bigcup\limits_{x \in U} V_x$ (аналогічно, наприклад, до доведення твердження 1.1).

$\underline{\Leftarrow}$ І навпаки, якщо будь-яка відкрита множина має вигляд $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha$, де усі $V_\alpha \in \mathcal{B}$, то для кожної точки $x \in U$ цієї множини існує $\alpha \in A$ таке, що $x \in V_\alpha \subset U$.

■

Приклад 4.1. Тривіальним прикладом бази топології $\mathcal{T}$ для довільного топологічного простору $(X, \mathcal{T})$ є сама топологія: означення, очевидно, виконується для $\mathcal{B} \coloneqq \mathcal{T}$. Звичайно, про жодну економію опису відкритих множин у цьому випадку не йдеться.

Приклад 4.2. Повернемося до стандартної топології $\mathbb{R}$. Як було зазначено вище, інтервали складають деяку базу цієї топології

$$\mathcal{B} \coloneqq \{(a, b)\}_{a,b \in \mathbb{R},\, a<b}\,,$$

бо за побудовою між кожною відкритою множиною $U \subset \mathbb{R}$ і кожною її точкою $x \in U$ можна вставити інтервал: $x \in (a, b) \subset U$ (наприклад, $(a, b) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ для деякого $\varepsilon > 0$). Але тоді, у свою чергу, з властивостей раціональних чисел випливає існування $q, r \in \mathbb{Q}$ таких, що

$a < q < x$ і $x < r < b$, тобто $x \in (q,r) \subset (a,b) \subset U$. Це означає, що (строго) менша система

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \{(q,r)\}_{q,r\in\mathbb{Q},\, q<r} \subset \mathcal{B}$$

інтервалів з раціональними кінцями також є базою цієї топології. До того ж, вона є зліченною на відміну від $\mathcal{B}$ (і $\mathcal{T}$). Отже, ми бачимо, що база топології не визначається однозначно: одна й та сама топологія може мати кілька баз різної потужності.

5 Аксіоми зліченності. Теорема Ліндельофа

Означення 5.1. Сукупність $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ відкритих підмножин топологічного простору $(X, \mathcal{T})$, що містять точку $x \in X$, зветься *базою в точці* x топології $\mathcal{T}$, якщо для будь-якої відкритої множини $U \in \mathcal{T}$, що містить x, існує така $V \in \mathcal{B}$, що $x \in V \subset U$.

База і база в точці пов'язані наступним очевидним чином:

Твердження 5.1. *Нехай $\mathcal{B}$ – база топології $\mathcal{T}$, і $x \in X$. Тоді сукупність*

$$\mathcal{B}_x := \{V \in \mathcal{B} \mid V \ni x\} \subset \mathcal{B}$$

усіх елементів $\mathcal{B}$, що містять x, є базою $\mathcal{T}$ в x.

Доведення. Це безпосередньо випливає з означень: для будь-якої відкритої $U \ni x$ існує $V \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V \subset U$. Але тоді $V \in \mathcal{B}_x$. ■

Вправа 5.1. Як побудувати базу топології з баз у точках (тобто як виглядає конструкція, зворотня до твердження 5.1)?

Наступні властивості топологічного простору є нашими першими змістовними прикладами *топологічних інваріантів* (чому вони так називаються, буде зрозуміло з подальших лекцій, див. розділ 14).

Означення 5.2. Говорять, що топологічний простір $(X, \mathcal{T})$

- задовольняє *першій аксіомі зліченності*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує не більш ніж зліченна база топології $\mathcal{T}$ в x;
- задовольняє *другій аксіомі зліченності*, якщо існує не більш ніж зліченна база топології $\mathcal{T}$.

Наслідок 5.1. *Якщо топологічний простір задовольняє другій аксіомі зліченності, то він задовольняє і першій аксіомі зліченності.*

Доведення. Це наслідок твердження 5.1: якщо $\mathcal{B}$ не більш ніж зліченна, то й $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{B}$ не більш ніж зліченна для кожної $x \in X$.

■

Зауваження. Топологічні простори, що задовольняють другій аксіомі зліченності, також звуть просторами з не більш ніж зліченною базою, причому "не більш ніж" часто пропускають. Аналогічна термінологія використовується й для бази в точці. Обернене до попереднього наслідку твердження, взагалі кажучи, невірне: це демонструється, зокрема, у прикладі 5.2 нижче.

Приклад 5.1. Як було встановлено у прикладі 4.2, інтервали з раціональними кінцями утворюють зліченну базу $\widetilde{\mathcal{B}}$ стандартної топології прямої $\mathbb{R}$, тобто вона задовольняє другій аксіомі зліченності, а отже й першій. Зауважимо, що крім $\widetilde{\mathcal{B}}_x$ у якості бази в довільній $x \in \mathbb{R}$ можна розглядати, наприклад, теж зліченну $\left\{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ (чому?).

Вправа 5.2. Чи задовольняють аксіомам зліченності інші топології на $\mathbb{R}$, що були розглянуті вище? Показати, зокрема, що кофінітна топологія не задовольняє першій аксіомі зліченності (а отже й другій), більш того, це так для кофінітної топології на будь-якій незліченній множині.

Приклад 5.2. Розглянемо довільну множину X з дискретною топологією. Для кожної $x \in X$ одноточкова підмножина $\{x\}$ відкрита, і для будь-якої $U \ni x$ маємо $x \in \{x\} \subset U$. Це означає, що система з однієї множини $\{x\}$ є базою в x, отже, X задовольняє першій аксіомі зліченності. З іншого боку, якщо $\mathcal{B}$ – якась база цієї топології, то з тієї ж відкритості $\{x\}$ випливає, що для кожної $x \in X$ повинна існувати $V \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V \subset \{x\}$, тобто $V = \{x\}$. Отже, $\mathcal{B}$ повинна містити усі одноточкові підмножини $\{x\}$ (і навпаки, система усіх одноточкових підмножин, очевидно, буде базою). Тому X задовольняє другій аксіомі зліченності тоді й тільки тоді, коли X не більш ніж зліченна.

Означення 5.3. Система підмножин $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ множини X зветься *покриттям* її підмножини $V \subset X$, якщо об'єднання елементів $\mathcal{U}$ містить V: $V \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$. Якщо менша сукупність $\{U_\alpha\}_{\alpha \in B} \subset \mathcal{U}$ (для деякої $B \subset A$) також є покриттям V, її називають *підпокриттям* $\mathcal{U}$. У топологічному просторі X покриття називається *відкритим*, якщо кожна з його множин U_α відкрита.

Якщо у попередньому означенні $V = X$, то його умова перетворюється на $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$. Виявляється, що відкриті покриття просторів з не більш ніж зліченною базою мають наступну корисну властивість (яка також дещо нагадує означення компактного простору, див. розділ 20 у подальших лекціях):

Теорема 5.1 (Ліндельоф)**.** *Якщо топологічний простір задовольняє другій аксіомі зліченності, то у будь-якого його відкритого покриття існує не більш ніж зліченне підпокриття.*

Доведення. Отже, нехай X – простір, $\mathcal{B}$ – його не більш ніж зліченна база, а $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – деяке відкрите покриття. За означенням покриття, для будь-якої $x \in X$ існує таке $\alpha_x \in A$, що $x \in U_{\alpha_x}$. За означенням бази, тоді існує $V_x \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V_x \subset U_{\alpha_x}$. Залишимо лише елементи бази, що виникають у цій конструкції, тобто розглянемо сукупність

$$\widetilde{\mathcal{B}} \coloneqq \{V \in \mathcal{B} \mid \exists\, \alpha \in A \colon V \subset U_\alpha\} \subset \mathcal{B}$$

елементів бази, що містяться принаймні у одному елементі покриття. Вона також не більш ніж зліченна, тобто її елементи можна перенумерувати: $\widetilde{\mathcal{B}} = \{V_i\}_{i=1}^{\infty}$, де замість ∞ може стояти натуральне n. Для кожного i тоді оберемо $\alpha_i \in A$ таке, що $V_i \subset U_{\alpha_i}$.

Тепер повернемося до початку: для будь-якої $x \in X$ ми знайшли $V_x \in \mathcal{B}$ таку, що $x \in V_x \subset U_{\alpha_x}$. Це означає, що $V_x \in \widetilde{\mathcal{B}}$, тобто існує i таке, що $V_x = V_i$, а отже

$$x \in V_i \subset U_{\alpha_i} \subset \bigcup_i U_{\alpha_i}.$$

Це означає, що $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}$ (або до n) – потрібне нам не більш ніж зліченне підпокриття $\mathcal{U}$.

■

6 Критерій бази. Передбаза

Виявляється, що топологія визначається своєю базою однозначно і може бути за нею побудована. У наступній теоремі наведені властивості, що є необхідними та достатніми для того, щоб система підмножин була базою деякої топології.

Теорема 6.1 (Критерій бази)**.** *Нехай X – множина, а $\mathcal{B}$ – якась сукупність її підмножин. Якщо $\mathcal{B}$ – база деякої топології на X, то вона має наступні властивості:*

B1. *$\mathcal{B}$ – покриття X: $X = \bigcup\limits_{V\in\mathcal{B}} V$.*

B2. *Для будь-яких $U, V \in \mathcal{B}$ та $x \in U \cap V$ існує $W \in \mathcal{B}$ така, що $x \in W \subset U \cap V$.*

І навпаки, якщо $\mathcal{B}$ має властивості B1. і B2., то на X існує єдина топологія, базою якої є $\mathcal{B}$.

Зауваження. Аналогічно до переформулювання означення бази у твердженні 4.1, властивість B2. еквівалентна наступній: для будь-яких $U, V \in \mathcal{B}$ їхній перетин $U \cap V$ можна представити у вигляді об'єднання множин, що належать до $\mathcal{B}$.

Доведення. Властивість B1. випливає з твердження 4.1, оскільки X є відкритою множиною і тому повинна дорівнювати об'єднанню деяких (а отже й усіх) множин $\mathcal{B}$. B2. випливає безпосередньо з означення бази, бо $U \cap V$ – відкрита множина як перетин відкритих.

Тепер нехай $\mathcal{B}$ має зазначені властивості. Побудуємо систему $\mathcal{T}$ підмножин X, що складається з усіх можливих об'єднань множин з $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{T} := \left\{ U = \bigcup_{\beta\in B} V_\beta \right\}_{\{V_\beta\}_{\beta\in B}\subset\mathcal{B}}.$$

Зауважимо, що $\varnothing$ також належить до $\mathcal{T}$ як об'єднання порожньої сукупності підмножин. Перевіримо, що $\mathcal{T}$ – топологія на X:

1. Нехай $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T}$. За побудовою, кожен елемент цієї сукупності має вигляд $U_\alpha = \bigcup\limits_{\beta\in B_\alpha} V_{\alpha\beta}$ для деякої $\{V_{\alpha\beta}\}_{\beta\in B_\alpha} \subset \mathcal{B}$, що індексована множиною B_α, власною для кожного $\alpha \in A$. Тоді

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A,\, \beta\in B_\alpha} V_{\alpha\beta} \in \mathcal{T}$$

за побудовою $\mathcal{T}$.

2. Нехай $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$. Перш за все, зауважимо, що належність перетину цих множин до $\mathcal{T}$ достатньо перевірити для $n = 2$ з індуктивних міркувань: якщо $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$, то й $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = (U_1 \cap U_2) \cap U_3 \in \mathcal{T}$, бо ми вже знаємо, що це вірно для двох множин, і так далі до $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} U_i\right) \cap U_n \in \mathcal{T}$.

Отже, маємо $U_1 = \bigcup\limits_{\beta\in B_1} V_{1\beta}$ і $U_2 = \bigcup\limits_{\beta\in B_2} V_{2\beta}$ для деяких сукупностей $\{V_{1\beta}\}_{\beta\in B_1}$, $\{V_{2\beta}\}_{\beta\in B_2} \subset \mathcal{B}$. Тоді з дистрибутивності перетинів і об'єднань випливає, що

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\beta_1\in B_1,\, \beta_2\in B_2} V_{1\beta_1} \cap V_{2\beta_2}.$$

Оскільки для будь-якого вибору індексів $\beta_1 \in B_1$ і $\beta_2 \in B_2$ множини $V_{1\beta_1}$ і $V_{2\beta_2}$ належать до $\mathcal{B}$, з її властивості B2. і зауваження вище випливає, що $V_{1\beta_1} \cap V_{2\beta_2} = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma_{\beta_1\beta_2}} W_{\beta_1\beta_2\gamma}$, де $\{W_{\beta_1\beta_2\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma_{\beta_1\beta_2}} \subset \mathcal{B}$ (для якоїсь індексуючої множини $\Gamma_{\beta_1\beta_2}$, що залежить від β_1 і β_2). Тому

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\beta_1\in B_1,\, \beta_2\in B_2,\, \gamma\in\Gamma_{\beta_1\beta_2}} W_{\beta_1\beta_2\gamma} \in \mathcal{T}$$

за побудовою.

3. Як ми зауважили вище, $\varnothing \in \mathcal{T}$. Множина X належить до $\mathcal{T}$ в силу властивості B1.

Відносно топології $\mathcal{T}$ усі множини з $\mathcal{B}$ відкриті (як об'єднання сукупності з одної множини). Те, що $\mathcal{B}$ – база цієї топології, тоді випливає з побудови $\mathcal{T}$ і твердження 4.1.

Залишилося перевірити, що така топологія єдина. Нехай $\mathcal{S}$ – якась інша топологія з базою $\mathcal{B}$. Тоді в силу твердження 4.1 будь-яка $U \in \mathcal{S}$ є об'єднанням елементів $\mathcal{B}$, а отже належить до $\mathcal{T}$: $\mathcal{S} \prec \mathcal{T}$. З іншого боку, усі елементи $\mathcal{B}$ повинні бути відкритими відносно $\mathcal{S}$, а отже і їхні об'єднання, тому $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$. Отже, $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. Це й означає єдиність.

■

Приклад 6.1. Згадаємо, що одною з баз стандартної топології $\mathbb{R}$ є сукупність інтервалів (див. приклад 4.2). Розглянемо тепер аналогічну систему з напівінтервалів:

$$\mathcal{B} \coloneqq \{[a,b)\}_{a,b\in\mathbb{R},\, a<b}\,,$$

Вона задовольняє умовам теореми 6.1. Дійсно, всю пряму можна представити у вигляді, наприклад, $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [-n, n)$, а непорожній перетин двох напівінтервалів також є напівінтервалом. Тому цій базі відповідає деяка топологія. Вона зветься *топологією Зоргенфрея*, а пряма $\mathbb{R}$ з нею – *прямою Зоргенфрея*.

Перш за все, зауважимо, що будь-який інтервал можна представити у вигляді об'єднання напівінтервалів: $(a,b) = \bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, b)$ (для деякого достатньо великого натурального n_0), а тому й будь-яка відкрита в стандартній топології множина є об'єднанням напівінтервалів, отже відкритою в прямій Зоргенфрея. Таким чином, топологія Зоргенфрея сільніша за стандартну (причому строго, оскільки самі напівінтервали не є відкритими у стандартній топології). Також цікавим є те, що в цій топології напівінтервали є не лише відкритими (як елементи бази), але й замкненими: доповнення $\mathbb{R} \setminus [a,b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty) = \bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty} [-n, a) \cup \bigcup\limits_{n=n_1}^{\infty} [b, n)$ відкрите.

Для будь-якої $x \in \mathbb{R}$ зліченна сукупність $\left\{[x, x+\frac{1}{n})\right\}_{n=1}^{\infty}$ є базою топології Зоргенфрея в x (перевірте це!), тому пряма Зоргенфрея задовольняє першій аксіомі зліченності. З іншого боку, будь-яка база її топології для кожної $x \in \mathbb{R}$ повинна містити V_x таку, що $x \in V_x \subset [x, x+1)$. Зокрема, $\min V_x = x$, а тому різним точкам відповідають різні множини: $V_x \neq V_y$ для $x \neq y$. З цього випливає, що потужність будь-якої бази топології Зоргенфрея не менша за потужність $\mathbb{R}$, тому у цієї топології немає не більш ніж зліченних баз. Таким чином, ми отримали ще один приклад простору, що задовольняє першій, але не другій аксіомі зліченності.

Вправа 6.1. Перевірити, що сімейство підмножин круга на площині, що складається з усіх його діаметрів і центра, є базою деякої топології.

Означення 6.1. Система $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ відкритих підмножин топологічного простору $(X, \mathcal{T})$ зветься *передбазою* його топології $\mathcal{T}$, якщо сукупність усіх скінченних перетинів множин із $\mathcal{C}$ є базою $\mathcal{T}$.

Зауваження. Тут під скінченними перетинами маються на увазі перетини лише непорожніх скінченних підсистем $\mathcal{C}$, тобто ми не можемо отримати X, перетнувши "нульову кількість множин".

Приклад 6.2. Будь-яка база $\mathcal{B}$ довільної топології $\mathcal{T}$ (зокрема сама $\mathcal{T}$) є також її передбазою, бо одноелементні перетини вже утворюють $\mathcal{B}$, а додавання інших перетинів (що є відкритими множинами) ніяк не впливає на властивість $\mathcal{B}$ бути базою.

Приклад 6.3. Для стандартної топології на прямій $\mathbb{R}$ система усіх напівнескінченних інтервалів

$$\mathcal{C} := \{(-\infty, a)\}_{a \in \mathbb{R}} \cup \{(a, +\infty)\}_{a \in \mathbb{R}}$$

утворює передбазу. Дійсно, скінченними перетинами множин із $\mathcal{C}$ є усі інтервали, що утворюють базу $\mathcal{B}$ з прикладу 4.2, а також самі напівнескінченні інтервали та порожня множина. Таким чином, отримаємо сукупність перетинів $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \{\varnothing\}$, що теж є базою стандартної топології, оскільки напівнескінченні інтервали у ній відкриті. Якщо утворити систему $\widetilde{\mathcal{C}}$, замінивши в $\mathcal{C}$ дійсні межі $a \in \mathbb{R}$ на раціональні $q \in \mathbb{Q}$, то теж отримаємо передбазу цієї топології (меншу і тепер злічену), бо перетини утворять об'єднання бази $\widetilde{\mathcal{B}}$ з того ж прикладу, $\widetilde{\mathcal{C}}$ та порожньої множини.

Приклад 6.4. Аналогічним чином, для топології прямої Зоргенфрея система проміжків

$$\mathcal{D} \coloneqq \{(-\infty, a)\}_{a\in\mathbb{R}} \cup \{[a, +\infty)\}_{a\in\mathbb{R}}$$

є передбазою, оскільки їхні скінченні перетини – це об'єднання бази з прикладу 6.1, самої $\mathcal{D}$, множини якої відкриті у топології Зоргенфрея, а також порожньої множини.

Твердження 6.1 (Критерій передбази)**.** *Нехай X – множина, а $\mathcal{C}$ – якась сукупність її підмножин. Якщо $\mathcal{C}$ – передбаза деякої топології на X, то вона є покриттям X: $X = \bigcup\limits_{V\in\mathcal{C}} V$. І навпаки, якщо $\mathcal{C}$ є покриттям X, то на X існує єдина топологія, передбазою якої є $\mathcal{C}$.*

Доведення. За означенням, скінченні перетини множин передбази $\mathcal{C}$ утворюють деяку базу $\mathcal{B}$ топології. Тоді кожна множина $U \in \mathcal{B}$ включається до деякої $V \in \mathcal{C}$. Оскільки $\mathcal{B}$ є покриттям X за властивістю <u>B1.</u> теореми 6.1, ним є й $\mathcal{C}$:

$$X = \bigcup_{U\in\mathcal{B}} U \subset \bigcup_{V\in\mathcal{C}} V \subset X.$$

Тепер нехай $\mathcal{C}$ – покриття X. Побудуємо систему $\mathcal{B}$ підмножин X з усіх перетинів непорожніх скінченних підсистем $\mathcal{C}$, тобто

$$\mathcal{B} \coloneqq \left\{\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right\}_{\{V_i\}_{i=1}^{n}\subset\mathcal{C},\, n\in\mathbb{N}}.$$

Покажемо, що $\mathcal{B}$ – база деякої топології на X, перевіривши умови теореми 6.1:

<u>B1.</u> За побудовою, $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, бо усі множини $V \in \mathcal{C}$ є перетинами відповідних одноелементних підсистем $\{V\} \subset \mathcal{C}$. Тому $\mathcal{B}$ теж буде покриттям X.

B2. Будь-які два елементи $\mathcal{B}$ мають вигляд $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$ та $\bigcap\limits_{j=1}^{m} W_j$ для підсистем $\{V_i\}_{i=1}^{n}$, $\{W_j\}_{j=1}^{m} \subset \mathcal{C}$. Тому їхній перетин є перетином усіх елементів скінченної сукупності $\{V_i\}_{i=1}^{n} \cup \{W_j\}_{j=1}^{m} \subset \mathcal{C}$, а отже й сам належить до системи $\mathcal{B}$.

Таким чином, існує топологія $\mathcal{T}$ на X з базою $\mathcal{B}$, передбазою якої за означенням є $\mathcal{C}$. Нехай тепер $\mathcal{S}$ – якась інша топологія з передбазою $\mathcal{C}$. Тоді її базою повинна бути сукупність усіх скінченних перетинів множин із $\mathcal{C}$, тобто $\mathcal{B}$. Це означає, що $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ в силу теореми 6.1, що й дає потрібну нам єдиність.

■

Приклад 6.5. Якщо з передбази $\mathcal{C}$ стандартної топології $\mathbb{R}$, що описана у прикладі 6.3, прибрати "половину" множин, залишивши

$$\widehat{\mathcal{C}} := \{(a, +\infty)\}_{a\in\mathbb{R}},$$

то ця система все ще буде покриттям $\mathbb{R}$, а отже утворюватиме передбазу деякої топології за попереднім твердженням. Будуючи базу $\mathcal{B}$ як у його доведенні та топологію $\mathcal{T}$ як у доведенні теореми 6.1, отримуємо $\mathcal{B} = \widehat{\mathcal{C}}$ і $\mathcal{T} = \widehat{\mathcal{C}} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$ – топологію напівнескінченних інтервалів, що (набагато) слабша за стандартну. Роблячи так само з "половиною"

$$\widehat{\mathcal{D}} := \{[a, +\infty)\}_{a\in\mathbb{R}},$$

передбази топології Зоргенфрея з прикладу 6.4, що теж є покриттям, отримаємо базу $\widehat{\mathcal{D}}$ і топологію $\widehat{\mathcal{C}} \cup \widehat{\mathcal{D}} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$ (чому?), що сильніша за топологію напівнескінченних інтервалів, (набагато) слабша за топологію Зоргенфрея і непорівнювана зі стандартною.

Вправа 6.2. Показати, що якщо $\mathcal{C}$ – передбаза (зокрема база) топології $\mathcal{T}$ на множині X, то $\mathcal{T}$ – найслабша топологія на X, що містить $\mathcal{C}$. Тому інколи також говорять, що $\mathcal{T}$ *породжується* системою $\mathcal{C}$. Більш того, показати, що будь-яке покриття $\mathcal{C}$ множини X з такою властивістю буде передбазою (але, взагалі кажучи, не базою) $\mathcal{T}$. Таким чином, отримали альтернативне означення передбази.

Вправа 6.3. Чи можна переформулювати другу аксіому зліченності у термінах передбази? А як щодо (перед)баз у точках і першої аксіоми зліченності?

7 Метричні простори

Важливим класом топологічних просторів є метричні простори, що дуже часто зустрічаються в геометрії, аналізі та застосуваннях математики – всюди, де виникає можливість тим чи іншим чином задати відстань між елементами деякої множини.

Означення 7.1. Нехай X – довільна множина. *Метрикою* на X називається відображення $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$, що задовольняє наступним умовам:

1. $\rho(x, y) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x = y$ (*невиродженість*).

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для будь-яких $x, y \in X$ (*симетричність*).

3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для будь-яких $x, y, z \in X$ (*нерівність трикутника*).

Пара (X, ρ) з множини та метрики на ній зветься *метричним простором.*

Зауваження. Тут $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ – традиційне позначення для множини невід'ємних дійсних чисел. Як і у випадку топологічного простору, якщо зрозуміло, про яку метрику на X йдеться, ми будемо говорити просто про метричний простір X. Елементи метричного простору також називають його *точками*, а $\rho(x, y)$ – *відстанню* між точками x та y.

Приклад 7.1. На довільній множині X введемо $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ наступним чином:

$$\rho(x, y) := \left[\begin{array}{ll} 0, & \text{якщо } x = y; \\ 1, & \text{якщо } x \neq y. \end{array} \right.$$

Це відображення є метрикою. Дійсно, перші дві умови означення випливають з побудови, а нерівність трикутника можна перевірити, виписавши всі варіанти взаємного розташування трьох точок (зробіть це). Така метрика на X зветься *дискретною.*

Приклад 7.2. Для $X = \mathbb{R}^n$ розглянемо сімейство відображень ρ_p, що параметризоване дійсним $p \in [1, +\infty)$ і визначене для $x = (x^1, \dots, x^n)$ та $y = (y^1, \dots, y^n)$ формулою

$$\rho_p(x, y) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Властивості невиродженості та симетричності випливають безпосередньо з цього означення. Зокрема, якщо $\rho_p(x, y) = 0$, то з невід'ємності доданків маємо $x^i = y^i$ для усіх i, а отже $x = y$. Нерівність трикутника тут є наслідком нерівності Мінковського, що доводиться в курсі аналіза (див., наприклад, [5, с. 154]). Отже, це метрики на $\mathbb{R}^n$. Метрика ρ_1 зветься *манхеттенською* (*вуличною*, *метрикою таксиста*), а ρ_2 – *евклідовою*. Крім перелічених, також розглянемо ρ_∞, що визначена наступним чином:

$$\rho_\infty(x, y) \coloneqq \max\{|x^i - y^i|\}_{i=1}^n.$$

Знову невиродженість і симетричність випливають безпосередньо з побудови. Перевіримо нерівність трикутника: для будь-яких $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ та i від 1 до n

$$|x^i - y^i| = |x^i - z^i + z^i - y^i| \leqslant |x^i - z^i| + |z^i - y^i| \leqslant \rho_\infty(x, z) + \rho_\infty(z, y).$$

Тоді й найбільше з цих значень $\rho_\infty(x, y) \leqslant \rho_\infty(x, z) + \rho_\infty(z, y)$.

Зауважимо, що при $n = 1$ (на прямій) всі ці метрики збігаються й дають $\rho_p(x, y) = |x - y|$, у т. ч. для $p = \infty$.

Приклад 7.3. Побудуємо метрику на множині $C[a, b]$ неперервних функцій на відрізку, використавши ідею, схожу до побудови ρ_∞ у попередньому прикладі:

$$\rho(f, g) \coloneqq \max\{|f(x) - g(x)|\}_{x \in [a,b]}.$$

Цей максимум існує в силу теореми Веєрштрасса (далі у цьому курсі ми будемо розглядати її узагальнення, див. розділ 22). Властивості метрики перевіряються аналогічно до попереднього прикладу (зробіть це).

Вправа 7.1. Для довільного дійсного $p \in [1, +\infty)$ розглянемо множину ℓ_p дійсних послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ таких, що ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty |x_n|^p$ збігається. Перевірити що на ℓ_p

$$\rho(x, y) \coloneqq \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

коректно визначене і задає метрику.

Перевірити також що на множині ℓ_∞ *обмежених* дійсних послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ (тобто тих, для яких існує C таке, що $|x_n| \leqslant C$ для усіх n)

$$\rho(x, y) \coloneqq \sup\{|x_n - y_n|\}_{n=1}^\infty$$

коректно визначене і задає метрику. Пор. ці метрики з прикладом 7.2.

Означення 7.2. Нехай (X, ρ) і (Y, σ) – метричні простори. Відображення $f\colon X \to Y$ зветься

- *ізометрією*, якщо f – бієкція, і для будь-яких $x, y \in X$
$$\sigma(f(x), f(y)) = \rho(x, y);$$

- *ліпшицевим* з *константою Ліпшиця* $C > 0$ (а також *нерозтягуючим* при $C = 1$), якщо для будь-яких $x, y \in X$
$$\sigma(f(x), f(y)) \leqslant C\rho(x, y);$$

- *біліпшицевою еквівалентністю*, якщо f – бієкція, а f і f^{-1} – ліпшицеві.

Зауваження. Про відображення f метричних просторів, яке задовольняє умові $\sigma(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$, говорять також, що воно *зберігає відстані між точками.* Зокрема, такі відображення ін'єктивні: з $f(x) = f(y)$ випливає $\rho(x, y) = \sigma(f(x), f(y)) = 0$, отже $x = y$ в силу невиродженості. Тому в означенні ізометрії достатньо вимагати лише сюр'єктивності відображення f. Якщо f – ізометрія, то й f^{-1} – ізометрія. Будь-яка ізометрія є біліпшицевою еквівалентністю, але, взагалі кажучи, не навпаки (приклад можна зайти нижче).

Приклад 7.4. Ізометрії $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ евклідового простору $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ на себе (рухи), як може бути відомо з курсів лінійної алгебри та геометрії (принаймні для $n \leqslant 3$), є в точності ізометричними афінними перетвореннями, тобто мають вигляд $f(x) = Ax + b$, де $A \in \mathrm{O}(n)$ – ортогональна матриця і $b \in \mathbb{R}^n$.

Означення 7.3. Метричні простори (X, ρ) і (Y, σ) звуться

- *ізометричними*, якщо існує ізометрія $f\colon X \to Y$;

- *біліпшицево еквівалентними*, якщо існує біліпшицева еквівалентність $f\colon X \to Y$.

Дві метрики ρ і σ на множині X звуться *біліпшицево еквівалентними*, якщо *тотожне* відображення $id_X\colon X \to X$, що кожній точці X ставить у відповідність її ж, є біліпшицевою еквівалентністю метричних просторів (X, ρ) і (X, σ).

Твердження 7.1. *Метрики ρ та σ на X біліпшицево еквівалентні тоді й тільки тоді, коли існують $c, C > 0$ такі, що для будь-яких $x, y \in X$*

$$c\rho(x,y) \leqslant \sigma(x,y) \leqslant C\rho(x,y).$$

Доведення. Друга з цих нерівностей є просто умовою ліпшицевості для тотожного відображення $(X,\rho) \to (X,\sigma)$. Записуючи цю умову для оберненого відображення (теж, звичайно, тотожного), отримаємо першу нерівність.

∎

Вправа 7.2. Показати, що усі еквівалентності з означення 7.3 дійсно є відношеннями еквівалентності (метричних просторів та метрик на множині відповідно).

Вправа 7.3. Метричний простір (X,ρ) зветься *повним*, якщо у ньому будь-яка *фундаментальна* послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ (тобто така, що $\rho(x_n, x_m) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$) *збігається* (тобто існує $x \in X$ така, що $\rho(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, див. далі означення 13.1 і зауваження після нього). Перевірити, що якщо метричні простори біліпшицево еквівалентні (зокрема, ізометричні) і один з них повний, то й інший повний.

Приклад 7.5. Метрики ρ_p на $\mathbb{R}^n$ з прикладу 7.2 біліпшицево еквівалентні для усіх $p \in [1,+\infty)$, а також $p = \infty$. Дійсно, для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}^n$ та i від 1 до n за побудовою $|x^i - y^i| \leqslant \rho_\infty(x,y)$, тому для усіх $p \in [1,+\infty)$

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant (n\rho_\infty(x,y)^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}\rho_\infty(x,y).$$

З іншого боку, оскільки $\rho_\infty(x,y)$ – це найбільше з $|x^i - y^i|$,

$$\rho_\infty(x,y) = (\rho_\infty(x,y)^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \rho_p(x,y).$$

Це дає потрібні нам згідно з твердженням 7.1 нерівності. Отже, кожна ρ_p з $p \in [1,+\infty)$ еквівалентна ρ_∞, тому вони еквівалентні й одна одній в силу транзитивності.

8 Метрична топологія

Тепер покажемо, що метричні простори дійсно є окремим випадком топологічних. Для цього спочатку розглянемо деякі корисні класи підмножин, що очевидним чином узагальнюють відповідні поняття евклідової геометрії:

Означення 8.1. Нехай (X, ρ) – метричний простір, $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Підмножина X

- $B_\varepsilon(x) \coloneqq \{y \in X \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}$ зветься *відкритою кулею* з центром у точці x радіуса ε;
- $D_\varepsilon(x) \coloneqq \{y \in X \mid \rho(x,y) \leqslant \varepsilon\}$ зветься *замкненою кулею* з центром у точці x радіуса ε;
- $S_\varepsilon(x) \coloneqq \{y \in X \mid \rho(x,y) = \varepsilon\}$ зветься *сферою* з центром у точці x радіуса ε.

Зауваження. Очевидно, замкнена куля – це диз'юнктне об'єднання відкритої кулі та сфери з тими ж центром і радіусом. Зауважимо також, що $B_\varepsilon(x) \subset B_\delta(x)$ для $\varepsilon \leqslant \delta$ – це безпосередньо випливає з означення. Так само для замкнених куль (але не для сфер).

Наступне означення узагальнює стандартну топологію прямої:

Означення 8.2. *Метричною топологією* метричного простору (X, ρ) (або метрики ρ) зветься сукупність його підмножин

$$\mathcal{T} \coloneqq \{U \subset X \mid \forall\, x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \subset U\}.$$

Якщо для топологічного простору $(X, \mathcal{T})$ існує така метрика ρ на X, що $\mathcal{T}$ –метрична топологія ρ, то цей простір зветься *метризовним.*

Доведемо коректність цього означення.

Твердження 8.1. *Метрична топологія є топологією на X. Сукупність усіх відкритих куль (X, ρ) є її базою.*

Доведення. Перевіримо виконання аксіом топології.

1. Для деякої сукупності підмножин $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$ і довільної точки $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, оскільки $x \in U_\alpha$ для деякого індекса $\alpha \in A$, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$. Тому $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.
2. Для скінченної сукупності підмножин $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$ і довільної $x \in \bigcap\limits_{i=1}^n U_i$ маємо $x \in U_i$ для кожного $i = \overline{1,n}$. Тому для кожного i існує таке $\varepsilon_i > 0$, що $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$. Покладемо $\varepsilon \coloneqq \min\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n > 0$. Тоді для усіх $i = \overline{1,n}$ виконується $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$, тому $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap\limits_{i=1}^n U_i$, отже $\bigcap\limits_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

3. Для порожньої множини умова виконується тривіально; для будь-якої $x \in X$ достатньо взяти $B_1(x) \subset X$, тому $X \in \mathcal{T}$.

Згідно з вправою 8.1 нижче, відкриті кулі належать до $\mathcal{T}$. Їх сукупність тоді задовольняє означенню бази $\mathcal{T}$ за побудовою цієї топології.

■

Зауваження. Отже, множина відкрита відносно метричної топології тоді й тільки тоді, коли кожна її точка входить до неї з деякою відкритою кулею з центром у цій точці. У подальшому вважатимемо усі метричні простори наділеними цією топологією.

Зауважимо також, що доведення вище повністю повторює доведення для стандартної топології прямої. Можна було провести його іншим способом, застосувавши критерій бази до сукупності відкритих куль (зробіть це).

Вправа 8.1. Відносно метричної топології відкриті кулі є відкритими множинами, а замкнені кулі та сфери – замкненими.

Твердження 8.2. *Метричні топології біліпшицево еквівалентних метрик співпадають.*

Доведення. Отже, нехай ρ та σ – біліпшицево еквівалентні метрики на множині X. В силу твердження 7.1, тоді існують $c, C > 0$ такі, що для будь-яких $x, y \in X$

$$c\rho(x,y) \leqslant \sigma(x,y) \leqslant C\rho(x,y).$$

Будемо позначати відкриті кулі цих метрик через $B^\rho_\varepsilon(x)$ і $B^\sigma_\varepsilon(x)$ відповідно. Тоді з першої нерівності вище маємо, що $B^\sigma_{c\varepsilon}(x) \subset B^\rho_\varepsilon(x)$ для будь-яких $x \in X$ і $\varepsilon > 0$, бо з $y \in B^\sigma_{c\varepsilon}(x)$ випливає

$$\rho(x,y) \leqslant \frac{\sigma(x,y)}{c} < \varepsilon,$$

тобто $y \in B^\rho_\varepsilon(x)$. Аналогічно, друга нерівність означає, що $B^\rho_\varepsilon(x) \subset B^\sigma_{C\varepsilon}(x)$ для усіх x і ε.

Нехай тепер $\mathcal{T}$ і $\mathcal{S}$ – метричні топології ρ і σ відповідно. Для кожної $U \in \mathcal{T}$ і будь-якої $x \in U$ згідно з означенням існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B^\rho_\varepsilon(x) \subset U$. Згідно з показаним вище, тоді й $B^\sigma_{c\varepsilon}(x) \subset B^\rho_\varepsilon(x) \subset U$. Це доводить, що $U \in \mathcal{S}$. Отже, $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$. Аналогічно доводиться, що $\mathcal{S} \prec \mathcal{T}$, тому $\mathcal{T} = \mathcal{S}$.

■

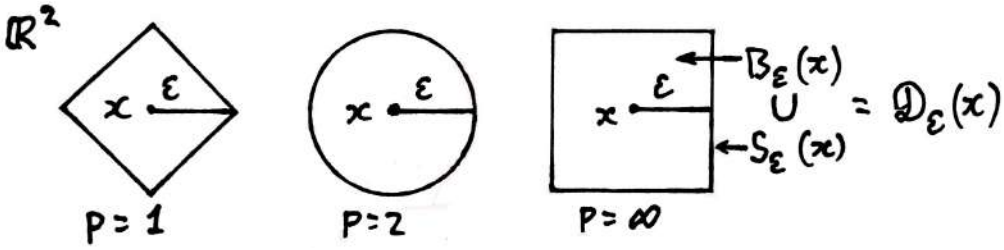
Приклад 8.1. Для дискретної метрики на множині X згідно з означеннями маємо

$$B_\varepsilon(x) = \left[\begin{array}{ll} \{x\}, & \text{якщо } 0 < \varepsilon \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } \varepsilon > 1. \end{array} \right.$$

Тому для кожної $x \in X$ одноточкова множина $\{x\} = B_1(x) \subset \{x\}$, тобто усі $\{x\}$ є відкритими, а тоді й усі підмножини X відкриті як об'єднання одноточкових. Отже, відповідна метрична топологія є дискретною. До речі, як виглядають замкнені кулі та сфери цієї метрики?

Приклад 8.2. Повернемося до $X = \mathbb{R}^n$. При $n = 1$ метрика $\rho_p(x, y) = |x - y|$ (одна й та сама для усіх p) дає $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, $D_\varepsilon(x) = [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, $S_\varepsilon(x) = \{x - \varepsilon, x + \varepsilon\}$. Згідно з означенням, відповідна метрична топологія – це стандартна топологія $\mathbb{R}$.

Уявлення про різні ρ_p при більших n дає наступна ілюстрація куль площини $\mathbb{R}^2$ для $p = 1$, $p = 2$ і $p = \infty$:



У прикладі 7.5 ми показали, що усі ці метрики біліпшицево еквівалентні, а тому згідно з твердженням 8.2 породжують одну й ту саму метричну топологію. Вона зветься *стандартною* (*природною*, *натуральною*, *евклідовою*) топологією $\mathbb{R}^n$. При цьому з твердження 8.1 випливає, що відкриті кулі різних метрик ρ_p утворюють різні бази цієї топології. Можна розглядати й інші бази, наприклад, у $\mathbb{R}^2$ не відкриті круги або квадрати, а відкриті прямокутники (чому?).

Твердження 8.3. *Для будь-якого метричного простору (X, ρ) і будь-якої його точки $x \in X$ відкриті кулі $\left\{B_{\frac{1}{n}}(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ складають зліченну базу метричної топології в x. Тому цей простір задовольняє першій аксіомі зліченності.*

Доведення. Якщо $U \ni x$ – відкрита, то згідно з означенням існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B_\varepsilon(x) \subset U$. Оберемо натуральне n таке, що $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Тоді $x \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_\varepsilon(x) \subset U$.

■

Зауваження. Зокрема, щоб топологічний простір був метризовним, він повинен задовольняти першій аксіомі зліченності. Тому, наприклад, незліченна множина з кофінітною топологією не є метризовною в силу вправи 5.2. Приклади евклідової метрики на прямій та дискретної метрики на незліченній множині демонструють, що метричні простори можуть як задовольняти, так і не задовольняти другій аксіомі зліченності.

Вправа 8.2. Показати, що відкриті кулі будь-якої з метрик ρ_p з центрами в точках з раціональними координатами та радіусами вигляду $\frac{1}{m}$

$$\mathcal{B} \coloneqq \left\{ B_{\frac{1}{m}}(x) \right\}_{x \in \mathbb{Q}^n,\, m \in \mathbb{N}}$$

утворюють зліченну базу стандартної топології $\mathbb{R}^n$, отже цей простір задовольняє другій аксіомі зліченності й для довільного n.

9 Прообраз топології. Індукована топологія

Тут ми продовжимо знайомитися зі способами побудови топологій.

Означення 9.1. Нехай X – деяка множина, $(Y, \mathcal{T})$ – топологічний простір, а $f\colon X \to Y$ – відображення. *Прообразом* топології $\mathcal{T}$ під дією f назвемо сукупність підмножин X, що складається з прообразів елементів $\mathcal{T}$ під дією f:

$$f^{-1}(\mathcal{T}) \coloneqq \{f^{-1}(V) \subset X\}_{V \in \mathcal{T}}.$$

Твердження 9.1. *Система $f^{-1}(\mathcal{T})$ є топологією на X.*

Доведення. Перевіримо виконання означення топології.

1. Нехай $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset f^{-1}(\mathcal{T})$. Тоді $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$, де $V_\alpha \in \mathcal{T}$, для кожного $\alpha \in A$. Із загальної властивості прообразів маємо

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(V_\alpha) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha\right) \in f^{-1}(\mathcal{T}),$$

бо $\bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathcal{T}$.

2. Аналогічно, для скінченної $\{U_i\}_{i=1}^n \subset f^{-1}(\mathcal{T})$ маємо $U_i = f^{-1}(V_i)$, де $V_i \in \mathcal{T}$, для кожного $i = \overline{1, n}$, і з властивості прообразів

$$\bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(V_i) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n V_i\right) \in f^{-1}(\mathcal{T}),$$

оскільки $\bigcap\limits_{i=1}^n V_i \in \mathcal{T}$.

3. Очевидно, $\varnothing = f^{-1}(\varnothing)$ і $X = f^{-1}(Y)$ належать до $f^{-1}(\mathcal{T})$.

■

Зауваження. Розглянемо частковий випадок, коли X – підмножина Y (де $(Y, \mathcal{T})$, як і раніше, є топологічним простором), а $f = i\colon X \to Y$ – формальне *включення*, тобто відображення, що кожній точці X ставить у відповідність її ж, але вже як точку Y. Прообразами підмножин $V \subset Y$ тоді будуть їхні перетини з X: $i^{-1}(V) = X \cap V$. Дійсно, належність точки підмножини X до обох частин цієї рівності означає просто, що вона належить також і до V.

Наслідок 9.1. *Сукупність підмножин, що є перетинами з X відкритих підмножин Y,*

$$i^{-1}(\mathcal{T}) = \{U \subset X \mid \exists V \in \mathcal{T}\colon U = X \cap V\}$$

є топологією на $X \subset Y$.

Означення 9.2. Говорять, що топологія $i^{-1}(\mathcal{T})$ *індукована* на X топологією $\mathcal{T}$. При цьому топологічний простір $(X, i^{-1}(\mathcal{T}))$ називається (топологічним) *підпростором* простору $(Y, \mathcal{T})$.

Зауваження. У подальшому, якщо не обумовлене інше, ми будемо вважати, що на довільній підмножині топологічного простору розглядається саме індукована топологія, і будемо говорити про властивості цієї топології (властивості топологічного підпростору) як про властивості підмножини.

Твердження 9.2. *Якщо $\mathcal{B}$ – база топології $\mathcal{T}$ на Y (відповідно, база $\mathcal{T}$ у точці $x \in X \subset Y$), то*

$$i^{-1}(\mathcal{B}) = \{X \cap V\}_{V \in \mathcal{B}}$$

є базою топології, що індукована $\mathcal{T}$ на $X \subset Y$ (відповідно, базою індукованої топології у x).

Доведення. Це безпосередньо випливає з означень індукованої топології та бази. Будь-яка підмножина X, що відкрита відносно індукованої топології, має вигляд $X \cap U$, де $U \in \mathcal{T}$. Оскільки довільна точка $x \in X \cap U$ належить до U, існує $V \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V \subset U$. Але тоді виконується і $x \in X \cap V \subset X \cap U$, оскільки $x \in X$. Аналогічно для бази у точці.

■

Наслідок 9.2. *Якщо топологічний простір задовольняє першій (відповідно, другій) аксіомі зліченності, то й будь-який його підпростір задовольняє першій (відповідно, другій) аксіомі зліченності.*

Доведення. Дійсно, якщо $\mathcal{B}$ у минулому твердженні не більш ніж зліченна, то такою є й $i^{-1}(\mathcal{B})$.

■

Зауваження. Інколи про властивості, що зберігаються при переході до підпростору (як у попередньому наслідку), говорять, що вони *наслідуються*. Корисно у якості вправи перевіряти, чи це так, для кожної з властивостей (інваріантів) топологічних просторів, що будуть виникати у подальшому.

Приклад 9.1. Нехай $Y = \mathbb{R}$ зі стандартною топологією. З опису відкритих підмножин цього простору у теоремі 1.1 випливає, що, наприклад, у напівінтервалі $X = [a, b)$ з індукованою топологією відкритими будуть диз'юнктні об'єднання не більш ніж зліченної кількості проміжків вигляду $[a, c)$ (не більше одного), (d, e) і (f, b) (не більше одного). Зауважимо, що проміжки першого з цих типів не є відкритими в топології прямої.

Для підпростору $X = \mathbb{Z}$ прямої індукована топологія є дискретною, оскільки для кожної $x \in \mathbb{Z}$ одноточкова підмножина $\{x\} = \mathbb{Z} \cap (x-1, x+1)$ є відкритою. У вихідній топології прямої такі підмножини замкнені, але не відкриті.

Приклад 9.2. Визначимо для кожного цілого невід'ємного n *стандартну n-вимірну сферу* як сферу метричного простору $(\mathbb{R}^{n+1}, \rho_2)$ радіуса 1 з центром у початку координат:

$$S^n := S_1(0) = \left\{ x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1 \right\}.$$

Пояснення того, чому ця сфера саме n-вимірна, буде дане у розділі 29. У якості топології на S^n оберемо індуковану стандартною топологією $\mathbb{R}^{n+1}$. З тверджень 8.1 і 9.2 тоді випливає, що базу цієї топології утворюють перетини зі сферою відкритих куль будь-якої з метрик ρ_p. Зокрема, для кола (одновимірної сфери) S^1 це відкриті дуги, що є перетинами відкритих евклідових кругів $\mathbb{R}^2$ з колом. Для двовимірної сфери S^2 довільний елемент бази можна описати як "відкритий криволінійний круг" у сфері, тобто одну з двох частин, на яку S^2 ділить пласке коло, що у ній лежить (без точок самого кола), і яка є перетином з S^2 відритої евклідової кулі $\mathbb{R}^3$. Аналогічний опис має місце й для довільної вимірності n.

Вправа 9.1. Показати, що підмножина S^1 є відкритою тоді й тільки тоді, коли вона є диз'юнктним об'єднанням не більш ніж зліченної кількості відкритих дуг (аналогічно до теореми 1.1).

Зауваження. З означення метрики випливає, що для будь-якого метричного простору (Y, ρ) і будь-якої його підмножини $X \subset Y$ обмеження ρ на $X \times X$ буде метрикою на X, тому пару $(X, \rho|_{X \times X})$ можемо назвати *метричним підпростором* (Y, ρ). Але на ньому існують дві апріорі різні топології!

Вправа 9.2. Показати, що метрична топологія $(X, \rho|_{X \times X})$ збігається з топологією, що індукована на X метричною топологією (Y, ρ).

10 Розташування точок відносно множини

Наведемо кілька означень, що знадобляться нам для більш детального дослідження підмножин топологічних просторів:

Означення 10.1. Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір і $A \subset X$ – його підмножина. Точка $x \in X$ зветься

- *внутрішньою точкою* A, якщо існує відкритий окіл $U \ni x$, що міститься в A: $x \in U \subset A$; множина усіх внутрішніх точок A називається *внутрішністю* A і позначається $\operatorname{Int} A$ або $\mathring{A}$;

- *точкою дотику* A, якщо будь-який відкритий окіл $U \ni x$ перетинається з A: $U \cap A \neq \varnothing$; множина усіх точок дотику A називається *замиканням* A і позначається $\overline{A}$ або $\operatorname{Cl} A$;

- *граничною точкою* A, якщо будь-який відкритий окіл $U \ni x$ містить хоча б одну точку A, відмінну від x: $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$; множина усіх граничних точок A називається *похідною множиною* A і позначається A';

- *межовою точкою* A, якщо будь-який відкритий окіл $U \ni x$ містить точки як A, так і його доповнення: $U \cap A \neq \varnothing$ і $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$; множина усіх межових точок A називається *межею* A і позначається ∂A;

- *ізольованою точкою* A, якщо існує відкритий окіл $U \ni x$, перетин якого з A складається з самої цієї точки: $U \cap A = \{x\}$.

Зауваження. Зокрема, усі внутрішні та ізольовані точки належать до A, а ось інші типи точок можуть як належати до A, так і ні, як побачимо у наведених нижче прикладах. Також з означень випливає, що x – внутрішня точка A тоді й тільки тоді, коли A – окіл x. Як зауважувалося вище, в усіх цих означеннях відкриті околи $U \ni x$ можна поміняти на довільні (перевірте це).

Вправа 10.1. Усі перелічені означення залишаться вірними (тобто позначатимуть ті самі об'єкти), якщо замість відкритих околів $U \ni x$ розглядати елементи будь-якої бази топології $\mathcal{T}$, що містять x.

Наступні приклади дозволять нам краще опанувати ці поняття.

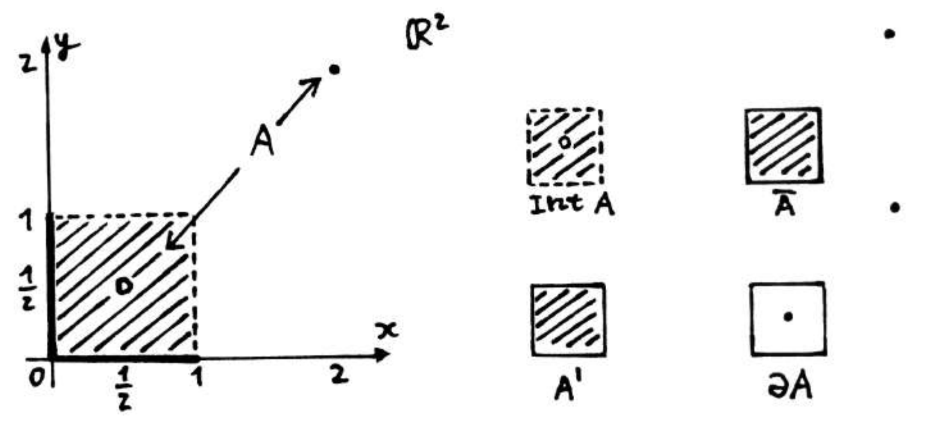
Приклад 10.1. Розглянемо у $\mathbb{R}^2$ (зі стандартною топологією) множину

$$A \coloneqq ((0,1)\times(0,1)) \cup (\{0\}\times[0,1]) \cup ([0,1)\times\{0\}) \cup \{(2,2)\} \setminus \left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\},$$

що зображена на ілюстрації знизу зліва. Знайдемо для A множини точок типів, що перелічені у означенні 10.1:

- $\operatorname{Int} A = ((0,1)\times(0,1)) \setminus \left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$ (відкритий квадрат без точки);
- $\overline{A} = ([0,1]\times[0,1]) \cup \{(2,2)\}$ (замкнений квадрат і точка);
- $A' = [0,1]\times[0,1]$ (замкнений квадрат);
- $\partial A = (\{0,1\}\times[0,1]) \cup ([0,1]\times\{0,1\}) \cup \left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(2,2)\right\}$ (сторони квадрата та дві точки);
- єдиною ізольованою точкою A є $(2,2)$.

Ці множини можна побачити на наступному рисунку справа:



Приклад 10.2. У просторі X з дискретною топологією одноточкова множина $\{x\}$ є відкритим околом будь-якої точки $x \in X$, звідки нескладно вивести, що для довільної підмножини $A \subset X$

$$\operatorname{Int} A = \overline{A} = A,\ A' = \partial A = \varnothing,$$

усі точки A ізольовані. Вигляд внутрішності та замикання A також випливає з твердження 10.1 нижче та того, що ця множина є одночасно відкритою та замкненою.

Приклад 10.3. Якщо $A \subset \mathbb{R}$ – проміжок прямої зі стандартною топологією з кінцями у дійсних точках $a < b$, тобто $A = (a, b)$, $[a, b]$, $[a, b)$ або $(a, b]$, то

$$\operatorname{Int} A = (a, b),\ \overline{A} = A' = [a, b],\ \partial A = \{a, b\},$$

ізольованих точок у A немає. Це випливає з того, що у точок (a, b) завжди є відкритий окіл (наприклад, вигляду $(x - \varepsilon, x - \varepsilon)$), що міститься в A, у точок $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ – окіл, що міститься в $\mathbb{R} \setminus A$, а ось у a і b будь-який окіл перетинає обидві ці множини, навіть якщо викинути з нього саму точку. Аналогічні твердження вірні й для напівнескінченних проміжків.

Усі точки підмножини цілих чисел $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ цього ж простору є ізольованими (і тому не є внутрішніми), бо $\{x\} = \mathbb{Z} \cap (x - 1, x + 1)$ для кожної $x \in \mathbb{Z}$. При цьому у будь-якої $x \notin \mathbb{Z}$ є окіл, що не перетинається з $\mathbb{Z}$, тому точками дотику і межовими є в точності точки $\mathbb{Z}$, і жодна точка не є граничною. Отже,

$$\operatorname{Int} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}' = \varnothing,\ \overline{\mathbb{Z}} = \partial \mathbb{Z} = \mathbb{Z}.$$

Нарешті, з властивостей множини раціональних чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, а саме з того, що у будь-якому околі будь-якої точки $\mathbb{R}$ є як раціональні, так й ірраціональні точки, випливає, що

$$\operatorname{Int} \mathbb{Q} = \varnothing,\ \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}' = \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R},$$

а ізольованих точок немає. Ті ж властивості має множина ірраціональних чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Приклад 10.4. З іншого боку, у прямій Зоргенфрея напівінтервали $[a, b)$ є відкритими та замкненими, зокрема, $[x, x + \varepsilon)$ є відкритим околом x для будь-якого $\varepsilon > 0$. Звідси випливає, що

$$\operatorname{Int}\, [a, b) = \overline{[a, b)} = [a, b)' = [a, b),\ \partial [a, b) = \varnothing,$$

ізольованих точок немає.

Вправа 10.2. Описати внутрішність, замикання, похідну множину, межу та ізольовані точки довільної підмножини $\mathbb{R}$ з топологією напівнескінченних інтервалів.

Твердження 10.1 (Властивості внутрішності, замикання і межі)**.** *Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір, $A, B \subset X$.*

1. *Внутрішність A є об'єднанням усіх відкритих підмножин X, що містяться в A:*
$$\operatorname{Int} A = \bigcup_{U \subset A,\, U \in \mathcal{T}} U.$$

2. *Внутрішність A є найбільшою за включенням відкритою підмножиною X, що міститься в A.*

3. *A відкрита тоді й тільки тоді, коли $A = \operatorname{Int} A$.*

4. *Якщо $A \subset B$, то $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$ (монотонність внутрішності).*

5. *Замикання A є перетином усіх замкнених підмножин X, що містять A:*
$$\overline{A} = \bigcap_{V \supset A,\, X \setminus V \in \mathcal{T}} V.$$

6. *Замикання A є найменшою за включенням замкненою підмножиною X, що містить A.*

7. *A замкнена тоді й тільки тоді, коли $A = \overline{A}$.*

8. *Якщо $A \subset B$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$ (монотонність замикання).*

9. $\overline{A} = A \cup A' = A \cup \partial A = \operatorname{Int} A \sqcup \partial A$.

10. $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

11. $X = \operatorname{Int} A \sqcup \overline{X \setminus A} = \overline{A} \sqcup \operatorname{Int}(X \setminus A)$.

Доведення.

1. Дійсно, належність точки $x \in X$ до такого об'єднання еквівалентна існуванню відкритої U такої, що $x \in U \subset A$. Але це й означає, що $x \in \operatorname{Int} A$.

2. випливає з 1.: $\operatorname{Int} A$ відкрита як об'єднання відкритих підмножин, міститься в A як об'єднання підмножин A, і будь-яка відкрита $U \subset A$ включається до об'єднання з 1., а тому $U \subset \operatorname{Int} A$. Це й значить, що $\operatorname{Int} A$ – найбільша за включенням серед таких множин.

3. $\Leftarrow$ Достатність випливає з того, що $\operatorname{Int} A$ відкрита згідно з 2.

$\Rightarrow$ Перевіримо необхідність: якщо A відкрита, то, оскільки $A \subset A$, $A \subset \operatorname{Int} A$ в силу 2. З іншого боку, $\operatorname{Int} A \subset A$ завжди за означенням. Тому $A = \operatorname{Int} A$.

4. Для будь-якої $x \in \operatorname{Int} A$ існує відкрита U така, що $x \in U \subset A \subset B$, тому $x \in \operatorname{Int} B$.

5. Доведемо еквівалентну рівність доповнень до цих множин.

Дійсно, якщо точка $x \in X$ не належить до вказаного перетину, то існує замкнена V така, що $A \subset V$ і $x \notin V$. Тоді $U \coloneqq X \setminus V$ – відкрита, $x \in U$ і $U \cap A = \varnothing$. Це означає, що x не є точкою дотику A: $x \notin \overline{A}$.

І навпаки: з $x \notin \overline{A}$ випливає існування відкритої $U \ni x$ такої, що $U \cap A = \varnothing$, тоді $V \coloneqq X \setminus U$ – замкнена і має властивості $x \notin V$ і $A \subset V$, отже x не належить до перетину.

6. випливає з 5. так само, як 2. з 1. (перевірте це).

7. доводиться за допомогою 6. так само, як 3. доводиться за допомогою 2. (перевірте це).

8. Доведемо еквівалентне включення доповнень $X \setminus \overline{B} \subset X \setminus \overline{A}$. Дійсно, якщо $x \notin \overline{B}$, то існує відкрита $U \ni x$ така, що $U \cap B = \varnothing$. Але тоді й $U \cap A \subset U \cap B = \varnothing$. Тому $x \notin \overline{A}$.

9. Перш за все, усі множини A, A', ∂A і $\operatorname{Int} A \subset A$ включаються до $\overline{A}$, бо з належності $x \in X$ кожній з них випливає, що будь-який відкритий окіл цієї точки має непорожній перетин з A (у випадку $x \in A$ це принаймні сама x). Тому різноманітні об'єднання цих множин теж є підмножинами $\overline{A}$. З іншого боку:

   - Якщо $x \in \overline{A}$, але $x \notin A$, то у кожній відкритій $U \ni x$ повинна міститися якась точка A крім x, тому $x \in A'$. Отже, $\overline{A} \subset A \cup A'$.
   - Знову ж, якщо $x \in \overline{A}$, але $x \notin A$, то у кожній відкритій $U \ni x$ міститься якась точка A і точка $x \in X \setminus A$, тому $x \in \partial A$. Отже, $\overline{A} \subset A \cup \partial A$.
   - Якщо $x \in \overline{A}$, але $x \notin \operatorname{Int} A$, то у кожній відкритій $U \ni x$ міститься якась точка A, і $U \not\subset A$, тому U містить якусь точку $X \setminus A$, отже $x \in \partial A$. Таким чином, $\overline{A} \subset \operatorname{Int} A \cup \partial A$.

Нарешті, якщо $x \in \operatorname{Int} A$, то деякий її відкритий окіл міститься в A, тому не містить точок $X \setminus A$, отже $x \notin \partial A$. Тому $\operatorname{Int} A \cap \partial A = \varnothing$, і останнє об'єднання у формулюванні цього пункту є диз'юнктним.

10. Це просто переформулювання означення: $x \in \partial A$ означає, що для будь-якої відкритої $U \ni x$ перетини $U \cap A \neq \varnothing$ (тобто $x \in \overline{A}$) і $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$ (тобто $x \in \overline{X \setminus A}$).

11. Якщо $x \notin \operatorname{Int} A$, то $U \not\subset A$ для кожної відкритої $U \ni x$, тобто $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$, отже $x \in \overline{X \setminus A}$. Таким чином, $X = \operatorname{Int} A \cup \overline{X \setminus A}$. Крім того, якщо $x \in \operatorname{Int} A$, то існує відкрита $U \ni x$ така, що $U \subset A$, тому $U \cap (X \setminus A) = \varnothing$, отже $x \notin \overline{X \setminus A}$. Звідси $\operatorname{Int} A \cap \overline{X \setminus A} = \varnothing$, тому об'єднання тут є диз'юнктним. Другу рівність отримуємо з першої, замінивши A на $X \setminus A$ (і навпаки).

■

З цих основних властивостей можна виводити й інші, наприклад:

Вправа 10.3. Показати, що множина A є відкритою тоді й тільки тоді, коли вона не перетинається зі своєю межею: $A \cap \partial A = \varnothing$; і замкненою тоді й тільки тоді, коли вона містить свою межу: $A \supset \partial A$.

11 Властивості щільності та сепарабельність

Означення 11.1. Підмножина A топологічного простору X зветься *всюди щільною* в X, якщо $\overline{A} = X$, і *ніде не щільною* в X, якщо $\operatorname{Int} \overline{A} = \varnothing$.

Зауваження. З означення замикання випливає, що A є всюди щільною тоді й тільки тоді, коли має непорожній перетин з будь-яким відкритим околом будь-якої точки X, тобто з будь-якою непорожньою відкритою підмножиною X. Втім, тут достатньо обмежитися множинами з будь-якої бази (перевірте це). Зв'язок між введеними поняттями сформульовано у наступній вправі:

Вправа 11.1. Показати, що множина A ніде не щільна тоді й тільки тоді, коли $\operatorname{Int}(X \setminus A)$ всюди щільна (підказка: використати пункт 11. у твердженні 10.1). Вивести з цього, що відкрита множина всюди щільна тоді й тільки тоді, коли її доповнення ніде не щільне.

Означення 11.2. Топологічний простір X називається *сепарабельним*, якщо в X існує не більш ніж злічення всюди щільна підмножина.

Приклад 11.1. З прикладу 10.2 випливає, що єдиною всюди щільною підмножиною простору X з дискретною топологією є X, а єдиною ніде не щільною – $\varnothing$. Зокрема, такий простір сепарабельний тоді й тільки тоді, коли множина X не більш ніж зліченна.

Приклад 11.2. Як було встановлено у прикладі 10.3, у $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, тому раціональні та ірраціональні числа утворюють всюди щільні підмножини, що доповнюють одна одну. Оскільки перша з них є зліченною, цей простір сепарабельний. З іншого боку, $\operatorname{Int} \overline{\mathbb{Z}} = \operatorname{Int} \mathbb{Z} = \varnothing$, тобто цілі числа утворюють ніде не щільну підмножину.

Приклад 11.3. У $\mathbb{R}^n$ зі стандартною топологією множина $\mathbb{Q}^n$ точок з раціональними координатами зліченна і всюди щільна. Дійсно, будь-який відкритий окіл U будь-якої точки $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ містить деякий елемент бази метричної топології метрики ρ_∞ – куб

$$B_\varepsilon(x) = (x^1 - \varepsilon, x^1 + \varepsilon) \times \ldots \times (x^n - \varepsilon, x^n + \varepsilon),$$

де $\varepsilon > 0$. Оскільки для будь-якого i від 1 до n інтервал $(x^i - \varepsilon, x^i + \varepsilon)$ містить раціональне $q^i \in \mathbb{Q}$, точка $q \coloneqq (q^1, \ldots, q^n) \in \mathbb{Q}^n$ міститься у $B_\varepsilon(x) \subset U$. Отже, $\mathbb{R}^n$ сепарабельний. З цього і твердження 11.2 нижче випливатиме, що він задовольняє другій аксіомі зліченності.

Прикладами ніде не щільних пімножин $\mathbb{R}^n$ є скінченні, $\mathbb{Z}^n$ (аналогічно до випадку $n = 1$ у попередньому прикладі) і нетривіальні афінні підпростори, скажімо, прямі у площині, прямі та площини у тривимірному просторі (чому?).

Сепарабельність тісно пов'язана з аксіомами зліченності, тому зазвичай її теж відносять до цієї групи аксіом.

Твердження 11.1. *Якщо топологічний простір задовольняє другій аксіомі зліченності, то він є сепарабельним.*

Доведення. Отже, нехай $\mathcal{B}$ – не більш ніж зліченна база простору X. Занумеруємо її елементи: $\mathcal{B} = \{V_i\}_{i=1}^{\infty}$, де замість ∞ може стояти натуральне n. Для кожного i тоді оберемо якусь точку $x_i \in V_i$. Тоді не більш ніж зліченна множина таких точок $A \coloneqq \{x_i\}$ є всюди щільною. Дійсно, для будь-якої $x \in X$ та відкритої $U \ni x$ існує i таке, що $x \in V_i \subset U$, а отже $x_i \in V_i \subset U$, тобто $U \cap A \neq \varnothing$.

∎

Вправа 11.2. Показати, що обернене твердження, взагалі кажучи, невірне (навести контрприклад).

Твердження 11.2. *Метричний простір задовольняє другій аксіомі зліченності тоді й тільки тоді, коли він є сепарабельним.*

Доведення. В силу попереднього твердження, тут залишилося довести лише достатність. Отже, нехай A – не більш ніж зліченна всюди щільна підмножина метричного простору (X, ρ). Покажемо, що тоді зліченна система відкритих куль

$$\mathcal{B} := \left\{ B_{\frac{1}{n}}(y) \right\}_{y \in A,\, n \in \mathbb{N}}$$

є його базою. Дійсно, у будь-яку відкриту U будь-яка точка $x \in U$ входить разом з відкритою кулею $B_\varepsilon(x)$ для деякого $\varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x) \subset U$. Оберемо натуральне n таке, що $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Куля $B_{\frac{1}{n}}(x)$ повинна містити точку $y \in A$, бо є непорожньою відкритою множиною. Тоді

$$x \in B_{\frac{1}{n}}(y) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \subset B_{\varepsilon - \rho(x,y)}(y) \subset B_\varepsilon(x) \subset U,$$

де друге включення куль випливає з $\rho(x, y) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, а третє – з нерівності трикутника (перевірте це).

■

Вправа 11.3. Показати, що у метричному просторі $C[a, b]$ з прикладу 7.3 підмножина $\mathbb{Q}[x]$ поліномів з раціональними коефіцієнтами є зліченною і всюди щільною, тому цей простір сепарабельний.

Вправа 11.4. Показати, що метричні простори ℓ_p з вправи 7.1 сепарабельні для усіх $p \in [1, +\infty)$, а ℓ_∞ не є сепарабельним.

12 Неперервні відображення

Наступне означення визначає, які відображення топологічних просторів ми вважаємо ”природними” для них.

Означення 12.1. Нехай $(X, \mathcal{T})$ і $(Y, \mathcal{S})$ – топологічні простори. Відображення $f\colon X \to Y$ зветься *неперервним*, якщо прообрази відкритих множин відкриті: $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ для будь-якої $V \in \mathcal{S}$.

Перш за все, встановимо зв'язок між цим поняттям і більш звичним завдяки курсу аналіза поняттям неперервності у точці.

Означення 12.2. Відображення топологічних просторів $f\colon X \to Y$ називається *неперервним у точці* $x \in X$, якщо для будь-якого відкритого околу її образу $V \ni f(x)$ існує її відкритий окіл $U \ni x$ такий, що $U \subset f^{-1}(V)$.

Твердження 12.1. *Відображення $f\colon X \to Y$ неперервне тоді й тільки тоді, коли воно неперервне у кожній точці $x \in X$.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Для доведення неперервності у x неперервного f покладемо у означенні $U := f^{-1}(V)$. Це буде потрібний відкритий окіл x.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай $V \subset Y$ – довільна відкрита підмножина. Для будь-якої $x \in f^{-1}(V)$ відображення f неперервне в x, отже існує відкрита U_x така, що $x \in U_x \subset f^{-1}(V)$ Це означає, що $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} U_x$ – відкрита.

■

Зауваження. У означенні 12.1 можна замість відкритих множин використати замкнені (чому?). У означенні 12.2 умову $U \subset f^{-1}(V)$ можна замінити на еквівалентну $f(U) \subset V$. Як і в означеннях минулих розділів, відкриті околи у ньому можна замінити на довільні. Крім того, їх можна замінити на елементи довільних баз відповідних топологій у точках. Більш строго це означає наступне:

Твердження 12.2. *Нехай $(X, \mathcal{T})$ і $(Y, \mathcal{S})$ – топологічні простори, $x \in X$, $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$ – бази $\mathcal{T}$ у x і $\mathcal{S}$ у $f(x)$ відповідно. Відображення $f\colon X \to Y$ неперервне у точці x тоді й тільки тоді, коли для будь-якої $V \in \mathcal{C}$ існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $f(U) \subset V$.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Будь-яка $V \in \mathcal{C}$ буде відкритим околом $f(x)$, тому згідно з означенням неперервності в x існує відкрита $W \ni x$ така, що $f(W) \subset V$. З означення бази в точці, існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $U \subset W$. Тоді $f(U) \subset f(W) \subset V$.

$\underline{\Leftarrow}$ Аналогічно, для будь-якої відкритої $V \ni f(x)$ існує $W \in \mathcal{C}$ така, що $W \subset V$. За умовою тоді існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $f(U) \subset W \subset V$. При цьому U буде відкритим околом x.

■

Наслідок 12.1. *Нехай (X, ρ) і (Y, σ) – метричні простори. Відображення $f\colon X \to Y$ неперервне у точці $x \in X$ тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$.*

Доведення. Випливає з попереднього твердження і того, що відкриті кулі з центром у x утворюють базу метричної топології в x.

■

Зауваження. Включення куль у цьому формулюванні означає, що з $\rho(x, y) < \delta$ випливає $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Це вже звичне "епсилон-дельта" означення. Далі через $C(X, Y)$ позначатимемо множину неперервних відображень $X \to Y$.

Вправа 12.1. Показати, що відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів неперервне тоді й тільки тоді, коли $f^{-1}(V)$ відкрита для будь-якої $V \in \mathcal{C}$, де $\mathcal{C}$ – якась передбаза (зокрема база) топології Y.

Приклад 12.1. Для будь-яких просторів X та Y *постійне* відображення $f = y_0\colon X \to Y$, що кожній $x \in X$ ставить у відповідність одну й ту саму $f(x) = y_0$, неперервне, оскільки прообраз будь-якої множини $f^{-1}(V)$ – це або $\varnothing$ (якщо $y_0 \notin V$), або X (якщо $y_0 \in V$).

Приклад 12.2. *Тотожне* відображення будь-якого простору X на себе $f = id_X\colon X \to X$, що кожній $x \in X$ ставить у відповідність її ж ($id_X(x) = x$), є неперервним, бо $id_X^{-1}(V) = V$ для будь-якої V.

Приклад 12.3. Якщо X має дискретну топологію, то $f \in C(X, Y)$ для будь-яких Y і $f\colon X \to Y$, бо всі прообрази відкриті.

Приклад 12.4. Якщо Y має антидискретну (тривіальну) топологію, то $f \in C(X, Y)$ для будь-яких X і $f\colon X \to Y$, бо прообрази відкритих множин $f^{-1}(Y) = X$ і $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ відкриті.

Вправа 12.2. Як зміниться множина $C(X, Y)$, якщо послабити або посилити топологію X або Y?

Приклад 12.5. Ліпшицеві відображення метричних просторів (зокрема ізометрії) неперервні у відповідних метричних топологіях. Дійсно, нехай у позначеннях наслідку 12.1 відображення $f\colon X \to Y$ має константу Ліпшиця $C > 0$: $\sigma(f(x), f(y)) \leqslant C\rho(x, y)$ для будь-яких $x, y \in X$. Це означає, що $f\left(B_{\frac{\varepsilon}{C}}(x)\right) \subset B_\varepsilon(f(x))$ для будь-якого $\varepsilon > 0$, тобто достатньо взяти $\delta \coloneqq \frac{\varepsilon}{C}$.

Приклад 12.6. Наслідок 12.1 означає, зокрема, що наше поняття неперервності в точці узагальнює означення неперервності функції багатьох змінних $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (зокрема $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) з курсу аналіза, якщо наділити $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}$ стандартними топологіями. Більш того, зберігаються звичні властивості функцій, навіть якщо розглянути більш загальну область визначення:

Вправа 12.3. Нехай $f, g \in C(X, \mathbb{R})$ – неперервні *функції* на довільному просторі X, тобто його відображення у $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією. Показати, що тоді $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ (остання – на області визначення з індукованою топологією, пор. з твердженням 12.4 нижче) також є неперервними.

Вправа 12.4. Нехай $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ – відображення довільного простору у $\mathbb{R}^n$ зі стандартною топологією, $f = (f^1, \ldots, f^n)$, де $f^i\colon X \to \mathbb{R}$ – *координатні функції* f. Показати, що $f \in C(X, \mathbb{R}^n)$ тоді й тільки тоді, коли $f^i \in C(X, \mathbb{R})$ для усіх i.

Зауваження. З цих двох вправ випливає, що для будь-яких $f, g \in C(X, \mathbb{R}^n)$ і $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ лінійна комбінація $\lambda f + \mu g \in C(X, \mathbb{R}^n)$, тобто $C(X, \mathbb{R}^n)$ утворює векторний підпростір у векторному просторі $(\mathbb{R}^n)^X$ усіх відображень $X \to \mathbb{R}^n$.

Твердження 12.3. *Композиція неперервних відображень є неперервним відображенням: якщо $f \in C(Y, Z)$ і $g \in C(X, Y)$, то $f \circ g \in C(X, Z)$.*

Доведення. Дійсно, для будь-якої відкритої $V \subset Z$ маємо за означенням, що $f^{-1}(V) \subset Y$ відкрита, а отже й $(f \circ g)^{-1}(V) = g^{-1}(f^{-1}(V)) \subset X$ відкрита.

■

Твердження 12.4. *Нехай X, Y – топологічні простори, $A \subset X$ і $B \subset Y$ – їхні топологічні підпростори (тобто підмножини з індукованою топологією), $f \colon X \to Y$ таке, що $f(A) \subset B$. Якщо $f \in C(X, Y)$, то його обмеження $f|_A \in C(A, B)$.*

Доведення. За означенням індукованої топології, будь-яка відкрита підмножина B має вигляд $B \cap V$, де V – відкрита в Y. При цьому $(f|_A)^{-1}(B \cap V) = A \cap f^{-1}(V)$ відкрита в A, бо $f^{-1}(V)$ відкрита в X. Тому $f|_A$ неперервне.

■

Зауваження. Іншими словами, неперервні відображення топологічних просторів індукують неперервні відображення їхніх підпросторів. Також неперервність можна використати для характеризації прообразу топології (зокрема індукованої топології), як показано у наступному твердженні. Зауважимо, що у частково впорядкованій множині існує не більше одного найменшого чи найбільшого елемента, тому подібні твердження дійсно визначають відповідну топологію однозначно і можуть слугувати у якості альтернативних означень (див. також вправу 6.2).

Твердження 12.5. *Нехай $f \colon X \to Y$ – відображення деякої множини X у топологічний простір $(Y, \mathcal{T})$. Прообраз $f^{-1}(\mathcal{T})$ тоді є найслабшою топологією на X з тих, у яких f неперервне.*

Доведення. Ми вже знаємо, що $f^{-1}(\mathcal{T})$ – топологія. За її побудовою, $f^{-1}(V) \in f^{-1}(\mathcal{T})$ для будь-якої $V \in \mathcal{T}$, тобто f дійсно є неперервним. Але якщо f неперервне відносно будь-якої іншої топології $\mathcal{S}$ на X, то й для неї з означення неперервності матимемо $f^{-1}(V) \in \mathcal{S}$ для усіх $V \in \mathcal{T}$, тобто $f^{-1}(\mathcal{T}) \prec \mathcal{S}$.

■

13 Границі та секвенційні означення

Наступне означення узагальнює ще одне класичне поняття аналіза.

Означення 13.1. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ – послідовність у топологічному просторі X. Говорять, що вона *збігається* до точки $x \in X$ (або що x – її *границя*), якщо для будь-якого відкритого околу $U \ni x$ існує натуральне N таке, що $x_n \in U$ для будь-якого $n \geqslant N$.

Зауваження. Аналогічно до означень попереднього розділу, можна у якості U брати довільні околи або множини з довільної бази в x (перевірте це). Наприклад, використавши кулі $B_\varepsilon(x)$ для метричних просторів як у наслідку 12.1, отримаємо звичне "епсилон-означення" границі: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне N таке, що $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ для будь-якого $n \geqslant N$. Тому збіжність послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ до точки x у метричному просторі еквівалентна збіжності відстаней $\rho(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. За потреби будемо використовувати класичне позначення збіжності $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ або просто $x_n \to x$. Але зауважимо, що тепер границя може не бути єдиною!

Приклад 13.1. Розглянемо послідовність $\left\{x_n = x_0 + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

- У стандартній топології x_0 – єдина границя $\{x_n\}$, як відомо з курсу аналіза (і неважко перевірити самостійно). Це так і в прямій Зоргенфрея (перевірте).

- У топології напівнескінченних інтервалів $x \in \mathbb{R}$ є границею $\{x_n\}$ тоді й тільки тоді, коли $x \leqslant x_0$. Дійсно, будь-який відкритий окіл такої точки має вигляд $(a, +\infty)$ з $a < x \leqslant x_0$, а отже містить усі елементи $\{x_n\}$. З іншого боку, у будь-якої точки $x > x_0$ існує окіл $(a, +\infty)$ з $a \in (x_0, x)$, що містить лише скінченну кількість елементів послідовності $\{x_n\}$ або зовсім їх не містить.

- Визначимо топологію базою з напівінтервалів вигляду $(a, b]$ аналогічно до топології Зоргенфрея. У цій топології границь у $\{x_n\}$ не існує. Дійсно, для будь-якої $x \in \mathbb{R}$ можна знайти $\varepsilon > 0$ таке, що відкритий окіл $(x-\varepsilon, x]$ точки x буде містити лише скінченну кількість елементів послідовності $\{x_n\}$ або не міститиме їх зовсім.

Вправа 13.1. Описати границі $\{x_n\}$ у дискретній, антидискретній та кофінітній топологіях. Чи можна щось сказати про границі довільної послідовності у довільній множині з цими топологіями?

Твердження 13.1. *Якщо відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів неперервне у точці $x \in X$, то для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ у X, що збігається до x, її образ $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до $f(x)$. Якщо в x існує не більш ніж зліченна база (зокрема, якщо X задовольняє першій аксіомі зліченності), то вірне й обернене твердження.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай f неперервне в x і $x_n \to x$. Тоді для будь-якої відкритої $V \ni f(x)$ існує відкрита U така, що $x \in U \subset f^{-1}(V)$, і, у свою чергу, існує натуральне N таке, що для усіх $n \geqslant N$ маємо $x_n \in U$, а отже $f(x_n) \in V$. Таким чином, $f(x_n) \to f(x)$.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай тепер $\mathcal{B}$ – не більш ніж зліченна база в x. Перенумеруємо її елементи: $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$. При цьому, якщо $\mathcal{B}$ скінченна, просто візьмемо усі множини починаючи з деякого індекса рівними. Покладемо $W_n \coloneqq U_1 \cap \ldots \cap U_n$ для усіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ – теж база в x (оскільки $x \in W_n \subset U_n$ для будь-якого n) і є незростаючою послідовністю відкритих околів x: $W_1 \supset W_2 \supset \ldots \supset W_n \supset W_{n+1} \supset \ldots \ni x$.

Припустимо, що умова на послідовності виконується, але f не є неперервним у x: існує відкрита $V \ni f(x)$ така, що для будь-якої відкритої $U \ni x$ її образ $f(U) \not\subset V$. Зокрема, тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $x_n \in W_n$ такий, що $f(x_n) \notin V$.

Покажемо, що $x_n \to x$ (це буде вірно для будь-якої послідовності з властивістю $x_n \in W_n$). Дійсно, для будь-якої відкритої $U \ni x$, оскільки $\mathcal{B}$ – база в x, існує таке натуральне N, що $x \in W_N \subset U_N \subset U$. Тоді для кожного $n \geqslant N$ відповідний елемент послідовності $x_n \in W_n \subset W_N \subset U$, що й доводить збіжність до x. З іншого боку, $f(x_n) \not\to f(x)$, бо усі елементи послідовності $\{f(x_n)\}$ лежать за межами відкритого околу $V \ni f(x)$. Отримуємо протиріччя.

$\blacksquare$

Зауваження. Умову попереднього твердження також називають умовою *секвенційної неперервності* або *секвенційним* (тобто даним у термінах послідовностей) означенням неперервності. Виявляється, що у цих термінах можна описувати не лише неперервність: *секвенційним замиканням* множини інколи називають сукупність границь усіх послідовностей, що лежать у цій множині. Сама множина міститься у своєму секвенційному замиканні за побудовою, бо кожна її точка є границею постійної послідовності. Множину тоді називають *секвенційно замкненою*, якщо вона дорівнює такому замиканню.

Твердження 13.2. *Нехай $\widehat{A}$ – секвенційне замикання підмножини $A \subset X$ топологічного простору, тобто*

$$\widehat{A} \coloneqq \{x \in X \mid \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A\colon x_n \to x\}.$$

Тоді $\widehat{A} \subset \overline{A}$. *Якщо* X *задовольняє першій аксіомі зліченності, то вірне й обернене включення.*

Доведення. $\subseteq$ Якщо $x \in \widehat{A}$, то будь-яка відкрита $U \ni x$ містить усі елементи відповідної послідовності, починаючи з деякого індекса N: $\{x_n\}_{n=N}^{\infty} \subset U \cap A$. Отже, $U \cap A \neq \varnothing$. Тому $x \in \overline{A}$.

$\supseteq$ Для будь-якого $x \in \overline{A}$ побудуємо послідовність околів $\{W_n\}$ як у попередньому доведенні. З означення замикання, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $x_n \in W_n \cap A$. Як і раніше, тоді $x_n \to x$ і тому $x \in \widehat{A}$.

■

Вправа 13.2. Навести приклади, що демонструють невірність оберненої імплікації у твердженні 13.1 і оберненого включення у твердженні 13.2 для загального простору X, тобто те, що секвенційні означення не можна вільно використовувати без аксіом зліченності.

14 Гомеоморфність і топологічні інваріанти

Поняття неперервного відображення дозволяє нам визначити основне відношення еквівалентності топологічних просторів – їхню гомеоморфність. Вона формалізує інтуїтивне уявлення про "перетворення множин без розривів і склеювань".

Означення 14.1. Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X та Y зветься їх *гомеоморфізмом*, якщо f – бієкція і при цьому f та f^{-1} неперервні. Якщо існує гомеоморфізм $f\colon X \to Y$, то говорять, що X *гомеоморфний* Y (або що X та Y гомеоморфні) і позначають це $X \cong Y$.

Зауваження. Тобто гомеоморфізм – це взаємно однозначне і взаємно неперервне відображення.

Твердження 14.1. *Гомеоморфність є відношенням еквівалентності топологічних просторів.*

Доведення. Перевіримо умови з означення еквівалентності.

- *Рефлексивність*: для будь-якого простору X тотожне відображення $id_X\colon X \to X$ – гомеоморфізм (див. приклад 12.2), тому $X \cong X$.

- *Симетричність*: якщо $X \cong Y$ і $f\colon X \to Y$ – відповідний гомеоморфізм, то $f^{-1}\colon Y \to X$ – теж гомеоморфізм за означенням (бо $(f^{-1})^{-1} = f$), тому $Y \cong X$.

- *Транзитивність*: нехай $X \cong Y$, $Y \cong Z$, і $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ – відповідні гомеоморфізми. Тоді $g \circ f\colon X \to Z$ – бієкція, $g \circ f \in C(X,Z)$ і $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1} \in C(Z,X)$ згідно з твердженням 12.3. Отже, $g \circ f$ – гомеоморфізм, тому $X \cong Z$.

■

Приклад 14.1. Якщо X та Y одночасно наділені дискретною або антидискретною топологією, то будь-яка бієкція між ними буде гомеоморфізмом (див. приклади 12.3 і 12.4). Тому $X \cong Y$ тоді й тільки тоді, коли ці множини рівнопотужні.

Приклад 14.2. В силу прикладу 12.5, біліпшицеві еквівалентності метричних просторів (зокрема ізометрії) є гомеоморфізмами.

Приклад 14.3. Афінні перетворення $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (тобто відображення вигляду $f(x) = Ax+b$, де $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ – невироджена матриця і $b \in \mathbb{R}^n$) є гомеоморфізмами відносно стандартної топології (перевірте це).

Приклад 14.4. Усі інтервали в $\mathbb{R}$ (включно з самою $\mathbb{R}$) з топологіями, що індуковані стандартною топологією прямої, гомеоморфні. Дійсно, розглянемо відображення:

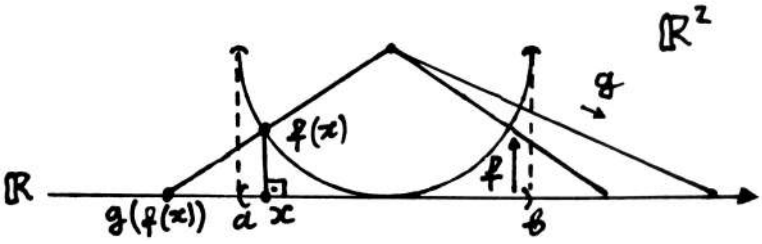
$$\begin{array}{ll}
(0,1) \to (a,b),\ a,b \in \mathbb{R},\ a<b\colon & t \mapsto (1-t)a+tb;\\
(0,1) \to (0,+\infty)\colon & t \mapsto \frac{t}{1-t};\\
(0,+\infty) \to (a,+\infty),\ a \in \mathbb{R}\colon & t \mapsto t+a;\\
(0,+\infty) \to (-\infty,a),\ a \in \mathbb{R}\colon & t \mapsto -t+a;\\
(0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon & t \mapsto \ln t.
\end{array}$$

У якості другої функції також можна взяти $t \mapsto \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}t$. Неважко перевірити, що це все бієкції, і, як відомо з аналіза (див. приклад 12.6), усі ці функції та обернені до них – неперервні, а отже індукують неперервні відображення інтервалів в силу твердження 12.4. З транзитивності гомеоморфності у твердженні 14.1 тоді випливає, що усі перелічені типи інтервалів гомеоморфні.

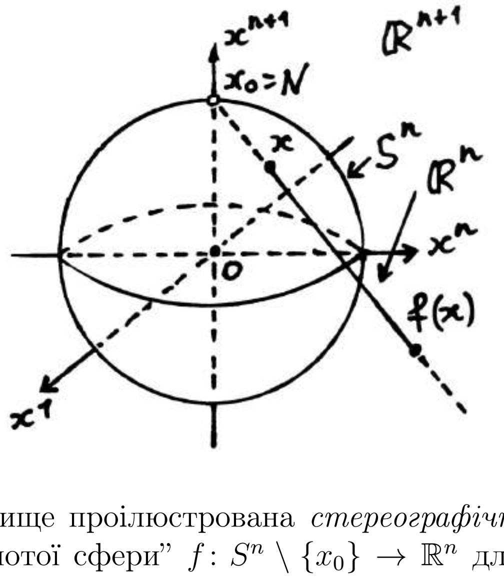
Аналогічно, усі відрізки $[a,b]$ гомеоморфні між собою. Те ж вірне й для усіх напівінтервалів вигляду $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,+\infty)$ або $(-\infty,a]$ (тут всюди $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$). При цьому жодні два проміжки з різних груп не гомеоморфні, як буде продемонстровано у наступних розділах (це також випливає з наступної вправи, що, втім, неявно використовує зв'язність, яка з'явиться у цьому курсі пізніше). Зауважимо, що всі використані у цьому прикладі функції строго монотонні, і це не випадково:

Вправа 14.1. Показати, що функція $f\colon A \to B$ є гомеоморфізмом проміжків $A \subset \mathbb{R}$ і $B \subset \mathbb{R}$ тоді й тільки тоді, коли вона неперервна, строго монотонна і сюр'єктивна (підказка: використати теорему Больцано – Коші про проміжне значення функції, див. її узагальнення у розділі 25).

Вправа 14.2. Тут і далі позначатимемо через $B^n := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ евклідову відкриту кулю радіуса 1 з центром у початку координат. Показати, що $B^n \cong \mathbb{R}^n$. Чи вірно це для довільної непорожньої відкритої опуклої підмножини $\mathbb{R}^n$? (Відповідь див., наприклад, у [11].)



Вправа 14.3. Розглянемо геометричний метод побудови гомеоморфізма між скінченним інтервалом (a, b) і $\mathbb{R}$, що показаний на попередньому рисунку. Цей гомеоморфізм має вигляд композиції $g \circ f$, де f – обернена ортогональна проєкція інтервала на відкрите півколо, а g – центральна проєкція півкола на пряму. Записати ці відображення аналітично і показати, що кожне з них (а отже і їхня композиція) є гомеоморфізмом. Півколо тут розглядається з топологією, індукованою з $\mathbb{R}^2$.



Приклад 14.5. Вище проілюстрована *стереографічна проєкція* – відображення "проколотої сфери" $f\colon S^n \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ для деякої $x_0 \in S^n$, що ставить у відповідність точці x сфери точку перетину променю x_0x

з гіперплощиною $\mathbb{R}^{n+1}$, яка проходить через 0 ортогонально до радіуса-вектора x_0 і яку ми ототожнюємо з $\mathbb{R}^n$. Обертаючи за необхідності систему координат, можемо вважати, що $x_0 = N = (0, \ldots, 0, 1)$ – *північний полюс* сфери. Тоді відповідну гіперплощину утворюють точки з $x^{n+1} = 0$. Для довільної $x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n \setminus \{N\}$ параметричні рівняння променю Nx мають вигляд:

$$\begin{cases} y^1 & = tx^1, \\ \vdots & \vdots \\ y^n & = tx^n, \\ y^{n+1} & = 1 + t(x^{n+1} - 1). \end{cases}$$

Для його перетину з гіперплощиною $\{x^{n+1} = 0\}$ маємо $t = \frac{1}{1-x^{n+1}}$. Отже,

$$f(x) = \left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \ldots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}} \right).$$

Це бієкція за побудовою, і вона неперервна згідно з твердженням 12.4 як обмеження на $S^n \setminus \{N\}$ неперервного відображення $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x^{n+1} = 1\} \to \mathbb{R}^n$ (див. також вправу 12.4). Знайдемо обернене відображення. Нехай $f(x) = y = (y^1, \ldots, y^n)$, тобто $y^i = \frac{x^i}{1-x^{n+1}}$ для кожного $i = \overline{1, n}$. Тоді, оскільки $x \in S^n$, квадрат *евклідової норми* y дорівнює

$$|y|^2 := \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x^i)^2}{(1 - x^{n+1})^2} = \frac{1 - (x^{n+1})^2}{(1 - x^{n+1})^2} = \frac{1 + x^{n+1}}{1 - x^{n+1}},$$

звідки отримуємо $x^{n+1} = \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}$ і $1 - x^{n+1} = \frac{2}{|y|^2+1}$. Таким чином,

$$f^{-1}(y) = \left(\frac{2y^1}{|y|^2 + 1}, \ldots, \frac{2y^n}{|y|^2 + 1}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} \right).$$

Тобто f^{-1} – обмеження на область значень $S^n \setminus \{N\}$ неперервного відображення $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, тому знову ж неперервне в силу твердження 12.4. Отже, f – гомеоморфізм.

Наступне корисне спостереження також випливає з твердження 12.4:

Наслідок 14.1. *Якщо $f\colon X \to Y$ – гомеоморфізм топологічних просторів, $A \subset X$, $B \subset Y$ і $f(A) = B$, то $f|_A\colon A \to B$ – гомеоморфізм підпросторів (з індукованими топологіями).*

Зауваження. В означенні гомеоморфізма умова неперервності оберненого відображення f^{-1} означає, що $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ відкрита для будь-якої відкритої $U \subset X$, тобто f переводить відкриті множини у відкриті. Ця властивість відображень має спеціальну назву:

Означення 14.2. Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів зветься *відкритим* (відповідно, *замкненим*), якщо для будь-якої відкритої (замкненої) $U \subset X$ образ $f(U) \subset Y$ відкритий (замкнений).

Твердження 14.2. *Нехай $f\colon X \to Y$ – бієктивне відображення топологічних просторів. Тоді наступні умови еквівалентні:*

- *f – гомеоморфізм;*
- *$U \subset X$ відкрита тоді й тільки тоді, коли $f(U) \subset Y$ відкрита;*
- *f неперервне і відкрите;*
- *$V \subset X$ замкнена тоді й тільки тоді, коли $f(V) \subset Y$ замкнена;*
- *f неперервне і замкнене;*
- *для будь-якої бази $\mathcal{B}$ топології X її образ $f(\mathcal{B}) := \{f(U) \mid U \in \mathcal{B}\}$ – база топології Y.*

Доведення. Еквівалентність перших п'яти умов безпосередньо випливає з означень і попереднього зауваження (а також із того, що для бієкції $f(X \setminus V) = Y \setminus f(V)$). Доведемо еквівалентність гомеоморфності останній умові збереження бази:

$\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай f – гомеоморфізм. Тоді усі елементи $f(\mathcal{B})$ відкриті в силу відкритості f, і для будь-якої відкритої $V \subset Y$ прообраз кожної її точки $y \in V$ належить до $f^{-1}(V)$, що відкрита в X в силу неперервності f. Тоді існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $f^{-1}(y) \in U \subset f^{-1}(V)$, отже $y \in f(U) \subset V$, і $f(U) \in f(\mathcal{B})$. Таким чином, $f(\mathcal{B})$ дійсно є базою.

$\underline{\Leftarrow}$ Тепер нехай f зберігає бази, і $\mathcal{B}$ – якась база топології X. Тоді $f(\mathcal{B})$ – база топології Y. Отже, для будь-якої відкритої $V \subset Y$ і кожної точки $x \in f^{-1}(V)$ існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $f(x) \in f(U) \subset V$, тому $x \in U \subset f^{-1}(V)$. Усі такі U відкриті, тому $f^{-1}(V)$ відкрита. Отже, f неперервне.

Аналогічно, для будь-якої відкритої $W \subset X$ і кожної $y \in f(W)$ існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $f^{-1}(y) \in U \subset W$, тому $y \in f(U) \subset f(W)$. Оскільки усі $f(U)$ відкриті як елементи бази $f(\mathcal{B})$, $f(W)$ відкрита. Таким чином, f відкрите, а отже є гомеоморфізмом.

■

Зауваження. З попереднього доведення випливає, що для гомеоморфності f достатньо, щоб воно переводило в базу топології Y якусь одну базу $\mathcal{B}$. Аналогічний критерій можна сформулювати також для баз у точках. З того, що гомеоморфізми зберігають відкриті околи, випливає, що вони також зберігають внутрішності, замикання, межі, границі послідовностей і т. ін. (Сформулюйте й доведіть відповідні наслідки.) Важливим окремим класом гомеоморфізмів є вкладення:

Означення 14.3. Відображення топологічних просторів $f\colon X \to Y$ зветься *вкладенням* X у Y, якщо його обмеження на область значень $f\colon X \to f(X)$ є гомеоморфізмом для індукованої топології на $f(X)$.

Приклад 14.6. Якщо $X \subset Y$ – підпростір топологічного простору Y, то включення $i\colon X \to Y$ є вкладенням, бо його обмеження $i\colon X \to i(X) = X$ є тотожним (тут обидві копії X мають одну й ту саму – індуковану – топологію).

Зауваження. З означення випливає, що будь-яке вкладення є неперервним (чому?) та ін'єктивним відображенням, але ці дві властивості не є достатніми, як демонструє наступний приклад (пор. також з наслідком 20.4 далі).

Приклад 14.7. Відображення $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}^2$, що визначене умовою $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, є неперервним (бо задається неперервними функціями) та ін'єктивним, але не є вкладенням, бо напівінтервал $[0,1)$ не гомеоморфний колу $S^1 = f\left([0,1)\right)$. Це буде встановлено далі у прикладі 23.10 (а також випливатиме з результатів розділу 20), але можна й безпосередньо перевірити, що відображення $f\colon [0,1) \to S^1$ не є гомеоморфізмом, бо не є відкритим (зробіть це).

Зауваження. Щоб доводити <u>не</u>гомеоморфність топологічних просторів (скажімо, проміжків різних типів з прикладу 14.4), нам знадобляться властивості з наступного неформального означення, що зберігаються при гомеоморфізмах. Тоді якщо існує така властивість (інваріант), що виконується для простору X і не виконується для Y, то $X \ncong Y$.

Означення 14.4. Нехай $\mathcal{P}$ – якась властивість або характеристика, у т. ч. числова, топологічних просторів така, що для будь-яких гомеоморфних X та Y простір X задовольняє $\mathcal{P}$ тоді й тільки тоді, коли Y задовольняє $\mathcal{P}$ або характеристики $\mathcal{P}$ просторів X та Y рівні. Тоді будемо називати $\mathcal{P}$ *топологічним інваріантом.*

Приклад 14.8. Поки що нам зустрічалися наступні топологічні інваріанти простору $(X, \mathcal{T})$:

- Потужність X (бо гомеоморфізм є бієкцією). Наприклад, жоден скінченний простір негомеоморфний нескінченному, а зліченний – континуальному.

- Потужність топології $\mathcal{T}$ (бо гомеоморфізм встановлює бієкцію між відкритими множинами в силу твердження 14.2). Наприклад, простори з тривіальною і нетривіальною топологіями негомеоморфні, навіть якщо це одна й та сама множина.

- Друга аксіома зліченності (це випливає з умови збереження бази у твердженні 14.2, бо гомеоморфізм переводить не більш ніж зліченну базу у не більш ніж зліченну базу). Наприклад, стандартна пряма негомеоморфна прямій Зоргенфрея.

- Перша аксіома зліченності (з аналогічної умови збереження бази в точці). Наприклад, пряма з кофінітною топологією негомеоморфна ані стандартній, ані прямій Зоргенфрея.

- Сепарабельність (бо гомеоморфізм зберігає як замикання, так і потужності множин). Наприклад, метричні простори $C[a, b]$ і ℓ_∞ негомеоморфні в силу вправ 11.3 і 11.4. Зокрема, тоді з прикладу 14.2 випливає, що вони не можуть бути й біліпшицево еквівалентними.

- Метризовність (доведіть самостійно і наведіть приклад).

У подальших розділах цей список буде доповнюватися.

15 Топологія прямого добутку

Продовжимо знайомство з *топологічними конструкціями*, тобто зі способами побудови нових топологічних просторів з існуючих. У нас вже був приклад такої конструкції – прообраз топології (зокрема індукована топологія). Нагадаємо, що *прямим (декартовим) добутком* скінченної сукупності множин $X_1, \ldots, X_n$ зветься множина усіх впорядкованих наборів, що містять по одному елементу кожної з цих множин:

$$X_1 \times \ldots \times X_n \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall i = \overline{1, n}\ x_i \in X_i\}.$$

Твердження 15.1. *Нехай X та Y – топологічні простори з базами топологій $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$ відповідно. Тоді*

$$\mathcal{H} \coloneqq \{U \times V \,|\, U \in \mathcal{B}, V \in \mathcal{C}\}$$

є базою деякої топології на прямому декартовому добутку $X \times Y$. Відносно цієї топології $W \subset X \times Y$ відкрита тоді й тільки тоді, коли для будь-якої її точки $(x, y) \in W$ існують відкриті $U \subset X$ і $V \subset Y$ такі, що $(x, y) \in U \times V \subset W$. Зокрема, ця топологія однозначно визначена топологіями X та Y (тобто не залежить від вибору баз $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$).

Доведення. Перевіримо виконання умов критерію бази для системи $\mathcal{H}$. Оскільки $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$ є покриттями X та Y відповідно, для кожної $(x, y) \in X \times Y$ існують $U \in \mathcal{B}$ і $V \in \mathcal{C}$ такі, що $x \in U$ та $y \in V$, а отже $(x, y) \in U \times V$. Таким чином, $\mathcal{H}$ є покриттям $X \times Y$.

Нехай тепер $U \times V, \widetilde{U} \times \widetilde{V} \in \mathcal{H}$. Оскільки $(U \times V) \cap (\widetilde{U} \times \widetilde{V}) = (U \cap \widetilde{U}) \times (V \cap \widetilde{V})$, для будь-якої (x, y) з цього перетину маємо $x \in U \cap \widetilde{U}$ та $y \in V \cap \widetilde{V}$. Оскільки $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$ – бази, існують $\widehat{U} \in \mathcal{B}$ і $\widehat{V} \in \mathcal{C}$, для яких $x \in \widehat{U} \subset U \cap \widetilde{U}$ та $y \in \widehat{V} \subset V \cap \widetilde{V}$. Отже, $(x, y) \in \widehat{U} \times \widehat{V} \subset (U \times V) \cap (\widetilde{U} \times \widetilde{V})$.

В силу критерію, $\mathcal{H}$ дійсно є базою деякої топології на $X \times Y$. Доведемо тепер необхідну та достатню умову належності множини W цій топології. Незалежність від вибору баз випливає звідси, бо умова дана в термінах топологій X і Y.

$\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай $W \subset X \times Y$ відкрита. За визначенням бази, тоді для будь-якої точки $(x, y) \in W$ існують такі $U \in \mathcal{B}$ і $V \in \mathcal{C}$, що $(x, y) \in U \times V \subset W$. Зокрема, U і V відкриті.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай тепер для будь-якої $(x, y) \in W$ існують відкриті U і V, для яких $(x, y) \in U \times V \subset W$. Тоді існують $\widehat{U} \in \mathcal{B}$ і $\widehat{V} \in \mathcal{C}$ такі, що $x \in \widehat{U} \subset U$ та $y \in \widehat{V} \subset V$, а отже $(x, y) \in \widehat{U} \times \widehat{V} \subset U \times V \subset W$. Оскільки усі такі $\widehat{U} \times \widehat{V} \in \mathcal{H}$ відкриті, W відкрита відносно топології $X \times Y$ з базою $\mathcal{H}$.

■

Означення 15.1. Топологія на $X \times Y$, що побудована у твердженні 15.1, зветься *топологією прямого добутку*, а $X \times Y$ – прямим добутком топологічних просторів X та Y.

Вправа 15.1. Показати, що топологія прямого добутку має властивість асоціативності: топології $(X \times Y) \times Z$ і $X \times (Y \times Z)$ на $X \times Y \times Z$ збігаються, тобто можна говорити однозначно про простір $X \times Y \times Z$. Більш того, це вірно для будь-якої скінченної кількості множників: можна коректно (тобто незалежно від розстановки дужок) визначити прямий добуток топологічних просторів $X_1, \ldots, X_n$, де підмножина $W \subset X_1 \times \ldots \times X_n$

відкрита тоді й тільки тоді, коли для будь-якої точки $(x_1, \ldots, x_n) \in W$ існують відкриті $U_i \subset X_i$ для усіх i від 1 до n такі, що $(x_1, \ldots, x_n) \in U_1 \times \ldots \times U_n \subset W$.

Зауваження. У подальшому будемо за замовчуванням вважати топологію на добутку скінченної кількості топологічних просторів саме такою. Аналогічно до означення бази, з твердження 15.1 і попередньої вправи випливає, що $W \subset X_1 \times \ldots \times X_n$ відкрита тоді й тільки тоді, коли її можна представити у вигляді об'єднання добутків відкритих множин $U_1 \times \ldots \times U_n$. Зокрема, самі ці добутки є відкритими і утворюють базу даної топології.

Означення 15.2. *Канонічні проєкції* $p_X \colon X \times Y \to X$ і $p_Y \colon X \times Y \to Y$ прямого добутку на множники визначені наступним чином: $p_X \colon (x, y) \mapsto x$ і $p_Y \colon (x, y) \mapsto y$.

Твердження 15.2 (Властивості канонічних проєкцій)**.** *Нехай X, Y і Z – деякі топологічні простори, і при цьому $X \times Y$ наділений топологією прямого добутку.*

1. *Відображення p_X і p_Y є неперервними.*

2. *Топологія прямого добутку є найслабшою на $X \times Y$ з тих, для яких відображення p_X і p_Y неперервні.*

3. *Відображення $f \colon Z \to X \times Y$ неперервне тоді й тільки тоді, коли композиції $p_X \circ f$ і $p_Y \circ f$ неперервні.*

4. *Відображення $p_X|_{X \times \{y\}} \colon X \times \{y\} \to X$ та $p_Y|_{\{x\} \times Y} \colon \{x\} \times Y \to Y$ є гомеоморфізмами для будь-яких $y \in Y$ та $x \in X$ відповідно. Тут $X \times \{y\}$ та $\{x\} \times Y$ розглядаються з топологіями, що індуковані з $X \times Y$.*

Доведення.

1. Помітимо, що прообраз будь-якої $U \subset X$ має вигляд $p_X^{-1}(U) = U \times Y$ і тому відкритий в $X \times Y$ для відкритої U як добуток відкритих множин (див. попереднє зауваження). Отже, p_X неперервне. Аналогічно для p_Y.

2. Ми вже знаємо з 1., що проєкції неперервні у топології прямого добутку. Нехай тепер $\mathcal{T}$ – якась інша топологія на $X \times Y$, відносно

якої p_X і p_Y неперервні. Тоді для будь-яких відкритих $U \subset X$, $V \subset Y$ їхній добуток

$$U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V) = p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V) \in \mathcal{T},$$

бо це перетин відкритих множин. А тоді й усі елементи топології прямого добутку на $X \times Y$ також належать до $\mathcal{T}$ як об'єднання множин вигляду $U \times V$. Таким чином, топологія прямого добутку слабша за $\mathcal{T}$.

3. $\underline{\Rightarrow}$ Нехай $f \in C(Z, X \times Y)$. Оскільки $p_X \in C(X \times Y, X)$ і $p_Y \in C(X \times Y, Y)$ в силу 1., $p_X \circ f \in C(Z, X)$ і $p_Y \circ f \in C(Z, Y)$ як композиції неперервних.

   $\underline{\Leftarrow}$ Тепер нехай $p_X \circ f \in C(Z, X)$ і $p_Y \circ f \in C(Z, Y)$. Тоді для будь-яких відкритих $U \subset X$ і $V \subset Y$ маємо

$$f^{-1}(U \times V) = f^{-1}((U \times Y) \cap (X \times V)) = f^{-1}(U \times Y) \cap f^{-1}(X \times V) =$$
$$= f^{-1}(p_X^{-1}(U)) \cap f^{-1}(p_Y^{-1}(V)) = (p_X \circ f)^{-1}(U) \cap (p_Y \circ f)^{-1}(V),$$

   що є відкритим як перетин відкритих. Таким чином, $f \in C(Z, X \times Y)$, оскільки в силу вправи 12.1, щоб довести його неперервність, достатньо показати, що усі прообрази елементів якоїсь бази $X \times Y$ відкриті.

4. Доведемо це твердження для p_X (для p_Y аналогічно). Зауважимо, що відображення $p_X|_{X \times \{y\}} \colon X \times \{y\} \to X$ бієктивне за побудовою і неперервне як обмеження неперервного. Тому в силу твердження 14.2 залишилося показати, що воно відкрите. Нехай $W \subset X \times \{y\}$ відкрита в індукованій топології, тобто є перетином $X \times \{y\}$ і деякої множини, відкритої відносно топології прямого добутку. В силу зауваження вище, це означає, що для деяких сукупностей відкритих множин $\{U_\alpha \subset X\}_{\alpha \in A}$ і $\{V_\alpha \subset Y\}_{\alpha \in A}$

$$W = (X \times \{y\}) \cap \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times V_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A \colon y \in V_\alpha} U_\alpha \times \{y\}.$$

   Тут об'єднання береться по усіх індексах $\alpha \in A$ таких, що $y \in V_\alpha$. Друга рівність тут випливає з того, що точка (x, y) міститься у перетині, яким є W, тоді й тільки тоді, коли $x \in U_\alpha$ і $y \in V_\alpha$ для деякого індекса $\alpha \in A$. Тоді

$$p_X(W) = \bigcup_{\alpha \in A \colon y \in V_\alpha} U_\alpha,$$

шо відкрита в X як об'єднання відкритих. Це й доводить відкритість обмеження p_X на $X \times \{y\}$.

■

Зауваження. Усі ці властивості очевидним чином узагальнюються на будь-яку скінченну кількість множників (як у вправі 15.1). Зокрема, в узагальненні пункта 4. гомеоморфізмами будуть обмеження вигляду

$$p_{X_i}|_{\{x_1\}\times\ldots\times X_i\times\ldots\times\{x_n\}}\colon \{x_1\}\times\ldots\times X_i\times\ldots\times\{x_n\}\to X_i.$$

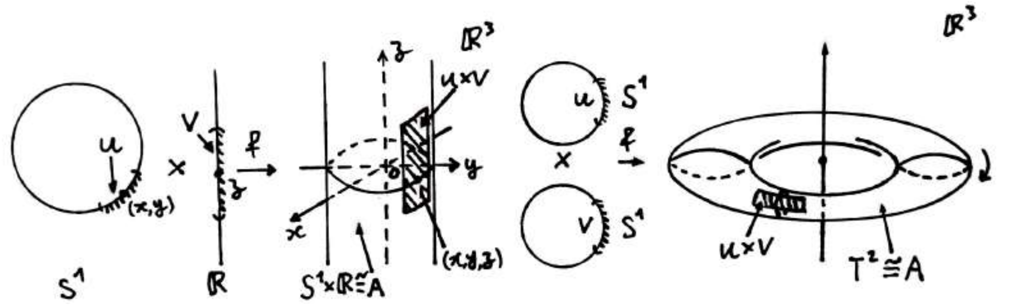
Характеризація топології прямого добутку у пункті 2. невипадково нагадує характеризацію прообразу топології у твердженні 12.5: це окремі випадки загального поняття *ініціальної топології* (див. [8, с. 30-32, с. 35-37 перекладу]). Більш того, використовуючи цю характеризацію, можна узагальнити поняття топології прямого добутку зі скінченної кількості множників на довільну сукупність топологічних просторів $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ (т. зв. *тихонівський добуток*). Детальніше див. [2, с. 106, 108], [8, с. 31-32, с. 37 перекладу] або [17, с. 113-114].

Приклад 15.1. Розглянемо простори $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^m$ зі стандартними топологіями та їхній добуток, який ототожнимо з $\mathbb{R}^{n+m}$. Зауважимо, що у якості бази стандартної топології на $\mathbb{R}^k$ можна обрати сукупність відкритих паралелепіпедів, тобто добутків інтервалів $\prod\limits_{i=1}^{k}(a^i,b^i)$. Дійсно, відкриті кулі метрики ρ_∞ – куби $B_\varepsilon(x)=\prod\limits_{i=1}^{k}(x^i-\varepsilon,x^i+\varepsilon)$ – мають такий вигляд і, з іншого боку, кожен відкритий паралелепіпед можна представити у вигляді об'єднання відкритих куль цієї метрики, бо кожен з інтервалів (a^i,b^i) разом з кожною своєю точкою x^i містить $(x^i-\varepsilon,x^i+\varepsilon)$ для деякого $\varepsilon>0$. Таким чином, згідно з твердженням 15.1, база топології прямого добутку на $\mathbb{R}^{n+m}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ складається з множин вигляду

$$\prod_{i=1}^{n}(a^i,b^i)\times\prod_{i=n+1}^{n+m}(a^i,b^i)=\prod_{i=1}^{n+m}(a^i,b^i).$$

Отже, ця топологія на $\mathbb{R}^{n+m}$ збігається зі стандартною. Аналогічно для довільної скінченної кількості множників: так, $\mathbb{R}^n$ можна представити у вигляді $\underbrace{\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n}$ з топологією прямого добутку. Зокрема, тоді критерій неперервності відображень у $\mathbb{R}^n$ з вправи 12.4 випливає з узагальнення пункта 3. твердження 15.2 на випадок n множників.

Приклад 15.2. Прямий добуток кола на пряму $S^1 \times \mathbb{R}$ гомеоморфний будь-якому круговому (або еліптичному) циліндру в $\mathbb{R}^3$. Тут, як завжди, $\mathbb{R}^3$ розглядається зі стандартною топологією, а циліндр – з індукованою. Дійсно, розглянемо круговий циліндр $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Будь-який інший еліптичний циліндр в $\mathbb{R}^3$ можна отримати з нього афінним перетворенням, що є гомеоморфізмом $\mathbb{R}^3$ на себе (приклад 14.3) і тому індукує гомеоморфізм циліндрів згідно з наслідком 14.1. Розглянемо $f\colon S^1 \times \mathbb{R} \to A$, що переводить пару $((x, y), z)$ з точки кола і точки прямої у точку $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Очевидно, це бієктивне відображення на A. Згідно з твердженням 15.1 і прикладом 9.2, базу $S^1 \times \mathbb{R}$ утворюють прямі добутки відкритих дуг кола на інтервали прямої. Під дією f вони переходять у відкриті "криволінійні прямокутники" в A (див. ілюстрацію нижче). З іншого боку, базу індукованої топології A складають, згідно з твердженням 9.2, перетини A з елементами якоїсь бази $\mathbb{R}^3$. Обравши цю базу з паралелепіпедів, як у попередньому прикладі, бачимо, що f переводить базу $S^1 \times \mathbb{R}$ у базу A, і тому є гомеоморфізмом в силу твердження 14.2 (точніше, у побудовану базу A входитимуть також пари криволінійних прямокутників, що утворюються, коли паралелепіпед "проштрикує" циліндр, але їх можна звідти прибрати як об'єднання інших елементів бази). Іншими словами, відображення $f\colon S^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ є вкладенням $S^1 \times \mathbb{R}$ у $\mathbb{R}^3$ з образом A. Аналогічно, добуток кола на обмежений проміжок, скажімо, $S^1 \times [a, b]$, гомеоморфний обмеженому циліндру в $\mathbb{R}^3$ (чому?).



Приклад 15.3. Прямий добуток $T^n := \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ зветься *n-вимірним тором.* Зокрема, $T^1 = S^1$, а T^2 гомеоморфний круговому тору ("поверхні бублика", див. рисунок вище) в $\mathbb{R}^3$, тобто підмножині, утвореній обертанням кола навколо прямої, що лежить в площині цього кола і не перетинається з ним. Гомеоморфізм будується аналогічно до попереднього прикладу (зробіть це). Таким чином, T^2 теж вкладається у $\mathbb{R}^3$.

Вправа 15.2. Показати, що добуток $X \times Y$ задовольняє першій (відповідно, другій) аксіомі зліченності тоді й тільки тоді, коли простори X

та Y задовольняють першій (другій) аксіомі зліченності. Чи узагальнюється це на довільну скінченну кількість множників? Чи вірне аналогічне твердження для сепарабельності (хоча б в один бік)?

Вправа 15.3. Показати, що для будь-якого метричного простору (X, ρ) його метрика $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ є неперервною функцією на декартовому квадраті $X \times X$ з прямим добутком метричних топологій.

Вправа 15.4. Нехай (X, ρ) та (Y, σ) – метричні простори. Чи є прямий добуток метричних топологій на $X \times Y$ метричною топологією якоїсь метрики?

16 Фактортопологія

Ознайомимося ще з одним прикладом топологічної конструкції.

Означення 16.1. Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір, Y – деяка множина, а $f\colon X \to Y$ – відображення. *Фактортопологією* на Y, що породжена f, назвемо сукупність усіх таких підмножин Y, прообрази яких під дією f відкриті у X:

$$\mathcal{S} \coloneqq \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}.$$

Твердження 16.1. *Фактортопологія є найсильнішою топологією на Y з тих, у яких f неперервне.*

Доведення. Перш за все, доведемо, що $\mathcal{S}$ з попереднього означення – дійсно топологія, перевіривши виконання аксіом.

1. Нехай $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{S}$. Тоді $f^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{T}$ для кожного $\alpha \in A$, тому

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{T},$$

отже $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{S}$.

2. Аналогічно, для скінченної сукупності $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{S}$ маємо $f^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}$ для кожного $i = \overline{1, n}$, тоді

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i) \in \mathcal{T},$$

і тому $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{S}$.

3. Множини $\varnothing$ і Y належать до $\mathcal{S}$, оскільки $\varnothing = f^{-1}(\varnothing)$ і $X = f^{-1}(Y)$ належать до $\mathcal{T}$.

За побудовою, прообрази відкритих відносно $\mathcal{S}$ множин відкриті, тому f неперервне. Нехай тепер $\mathcal{R}$ – якась інша топологія на Y така, що $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{R})$ неперервне. Тоді для будь-якої $U \in \mathcal{R}$ її прообраз $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$, тобто $U \in \mathcal{S}$. Таким чином, $\mathcal{R} \prec \mathcal{S}$.

■

Зауваження. Ця характеризація фактортопології виглядає дуальною до характеризацій ініціальних топологій: прообразу топології (твердження 12.5) і топології прямого добутку (пункт 2. твердження 15.2). У свою чергу, фактортопологія є частковим випадком поняття *фінальної топології* (див. [8, с. 32-34, с. 38-40 перекладу]), що є дуальним до поняття ініціальної топології.

Означення 16.2. Нехай $\sim$ – відношення еквівалентності на множині X. *Клас еквівалентності* елемента $x \in X$ позначатимемо через $[x]$, тобто $[x] = \{y \mid y \sim x\}$. Сукупність усіх попарно різних класів еквівалентності назвемо *фактормножиною* X за $\sim$ і будемо позначати $X/_\sim$. Відображення $p\colon X \to X/_\sim$, що переводить x у його клас еквівалентності $[x]$, будемо називати *канонічною проєкцією.* Якщо при цьому $(X,\mathcal{T})$ – топологічний простір, то фактортопологію, що породжена на $X/_\sim$ відображенням p, називають фактортопологією, що породжена відношенням $\sim$, а фактормножину $X/_\sim$ з цією топологією – *факторпростором* $(X,\mathcal{T})$ за $\sim$.

Зауваження. Таким чином, $U \subset X/_\sim$ відкрита відносно фактортопології тоді й тільки тоді, коли відкрита в X множина

$$p^{-1}(U) = \{x \mid [x] \in U\} = \bigcup_{[x]\in U} [x],$$

тобто сукупність усіх елементів усіх класів еквівалентності, що входять до U. Згідно з твердженням 16.1, канонічна проєкція p є неперервним відображенням.

Попереднє означення окремого випадку фактортопології насправді певним чином еквівалентне загальному означенню фактортопології, що породжена відображенням, якщо це відображення сюр'єктивне. Дійсно, нехай $f\colon X \to Y$ – деяка сюр'єкція. Назвемо точки x і y з X еквівалентними, якщо $f(x) = f(y)$. Це задає відношення еквівалентності $\sim$ на X, класами еквівалентності якого є прообрази одноточкових підмножин Y, причому коректно визначене і є бієкцією відображення $\varphi\colon X/_\sim \to Y$, що переводить кожен клас еквівалентності $[x]$ у $f(x)$ (перевірте це). Якщо X – топологічний простір, то підмножина $U \subset X/_{\sim}$ є відкритою у сенсі означення 16.2 тоді й тільки тоді, коли $\varphi(U) \subset Y$ відкрита у сенсі означення 16.1 (чому?), тобто φ є (канонічно визначеним) гомеоморфізмом цих просторів у силу твердження 14.2. Далі ми роглядатимемо лише факторторологію у сенсі означення 16.2 і за замовчуванням вважатимемо, що на фактормножині топологічного простору введена саме така топологія. Узагальнимо конструкцію, за допомогою якої вище був визначений гомеоморфізм φ:

Означення 16.3. Нехай X і Y – деякі множини, $\sim$ – відношення еквівалентності на X, і відображення $f\colon X \to Y$ *факторизовне*, тобто переводить еквівалентні точки в одну й ту саму: $f(x) = f(y)$ для будь-яких $x \sim y$ з X. Тоді визначимо *факторвідображення* $f/_{\sim}\colon X/_{\sim} \to Y$ наступним чином: $f/_{\sim}([x]) \coloneqq f(x)$ для будь-якого $[x] \in X/_{\sim}$.

Зауваження. Таким чином, $f/_{\sim}$ переводить клас еквівалентності в образ довільного його елемента. Коректність цього означення випливає з факторизовності f. Іншими словами, $f/_{\sim}$ визначається умовою $f = (f/_{\sim}) \circ p$. Такі рівності композицій зручно представляти у вигляді *комутативних діаграм*, тобто орієнтованих графів, вершинами яких є деякі множини, а ребрами (що позначені стрілочками) – відображення між ними, таких, що усі композиції стрілочок, що ведуть з певної множини у якусь іншу, рівні. У даному випадку діаграма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/_{\sim} \arrow[r, "f/_{\sim}"] & Y \end{tikzcd}$$

множин та відображень повинна бути комутативною. Зокрема, будь-яке відображення $X/_{\sim} \to Y$ має вигляд $f/_{\sim}$ для деякого $f\colon X \to Y$ (чому?). Наступний критерій неперервності таких відображень нагадує пункт 3. твердження 15.2:

Твердження 16.2. *Відображення топологічних просторів $f\colon X \to Y$, що факторизовне відносно відношення еквівалентності $\sim$ на X, є неперервним тоді й тільки тоді, коли факторвідображення $f/_{\sim}\colon X/_{\sim} \to Y$ неперервне.*

Доведення. $\Leftarrow$ Якщо $f/_{\sim} \in C(X/_{\sim}, Y)$, то $f = (f/_{\sim}) \circ p \in C(X, Y)$ як композиція неперервних (див. попереднє зауваження).

$\underline{\Rightarrow}$ Нехай $f \in C(X, Y)$. Тоді для будь-якої відкритої $V \subset Y$ множина $p^{-1}((f/_\sim)^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$ відкрита в X, а отже $(f/_\sim)^{-1}(V)$ відкрита в $X/_\sim$ за означенням фактортопології. Це й означає, що $f/_\sim \in C(X/_\sim, Y)$. ■

Приклад 16.1. У цьому і трьох наступних прикладах $X := \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid t, s \in [0, 1]\} = [0, 1] \times [0, 1]$ – замкнений квадрат. Топологію на ньому можна вводити як індуковану стандартною топологією площини або як топологію прямого добутку (чому це одне й те саме?). Перш за все, задамо відношення еквівалентності на X умовою $(0, s) \sim (1, s)$ для кожного $s \in [0, 1]$, інші точки еквівалентні тільки собі. Визначимо $f\colon X \to S^1 \times [0, 1]$ умовою $f(t, s) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), s)$. Воно неперервне і факторизовне відносно $\sim$ (бо 2π є періодом синуса і косинуса), тому породжує факторвідображення $f/_\sim\colon X/_\sim \to S^1 \times [0, 1]$, що неперервне згідно з твердженням 16.2. Більш того, неважко перевірити, що відображення $f/_\sim$ є біекцією.

Перевіримо, що $f/_\sim$ – відкрите. Нехай $U \in X/_\sim$ відкрита, тоді $p^{-1}(U)$ відкрита в X. Розглянемо довільну точку U. Якщо ця точка – клас еквівалентності з одного елемента $[(t, s)] = \{(t, s)\}$ (де $t \in (0, 1)$), то в X у точки $(t, s) \in p^{-1}(U)$ можна знайти відкритий окіл вигляду $X \cap B_\varepsilon(t, s) \subset p^{-1}(U)$, що не містить точок вигляду $(0, s)$ або $(1, s)$. Тут $B_\varepsilon(t, s) = (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ – відкрита куля метрики ρ_∞. Тоді

$$f/_\sim([(t, s)]) = f(t, s) \in f(X \cap B_\varepsilon(t, s)) \subset f/_\sim(U),$$

і $f(X \cap B_\varepsilon(t, s))$ є добутком дуги кола на проміжок $[0, 1] \cap (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$, відкритий у $[0, 1]$, тобто є відкритим околом $f/_\sim([(t, s)])$ у $S^1 \times [0, 1]$. Отже, $f/_\sim([(t, s)])$ – внутрішня точка $f/_\sim(U)$.

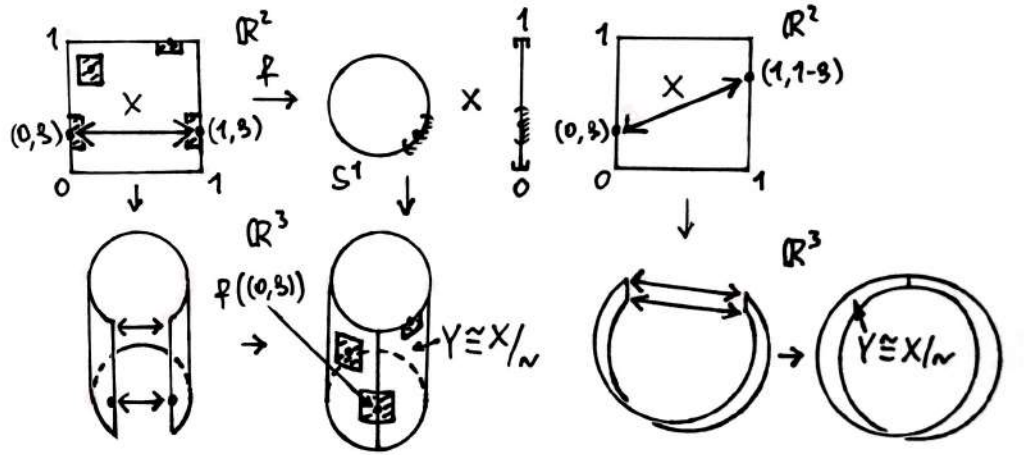
Тепер розглянемо точку U, що є класом еквівалентності з двох елементів: $[(0, s)] = \{(0, s), (1, s)\}$. Обидві ці точки входять у відкриту $p^{-1}(U)$ з деякими околами: $(0, s) \in X \cap B_{\varepsilon_0}(0, s) \subset p^{-1}(U)$ і $(1, s) \in X \cap B_{\varepsilon_1}(1, s) \subset p^{-1}(U)$. Покладемо $\varepsilon := \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$. Тоді $f(X \cap (B_\varepsilon(0, s) \cup B_\varepsilon(1, s)))$, що утвориться склеюванням двох околів, знову буде добутком дуги кола на відкритий (в індукованій топології $[0, 1]$) проміжок і утворюватиме відкритий окіл $f/_\sim([(0, s)])$ у $S^1 \times [0, 1]$, Оскільки

$$f/_\sim([(0, s)]) = f(0, s) \in f(X \cap (B_\varepsilon(0, s) \cup B_\varepsilon(1, s))) \subset f/_\sim(U),$$

$f/_\sim([(0, s)])$ теж буде внутрішньою точкою $f/_\sim(U)$. Таким чином, $f/_\sim(U)$ відкрита. Тому $f/_\sim$ дійсно відкрите, а отже є гомеоморфізмом згідно з твердженням 14.2. Ми встановили, що $X/_\sim \cong S^1 \times [0, 1]$.

З іншого боку, добуток $S^1 \times [0, 1]$ гомеоморфний замкненому обмеженому еліптичному циліндру в $\mathbb{R}^3$, наприклад, множині $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 =$

1, $z \in [0,1]\}$. Це доводиться аналогічно до прикладу 15.2: просто переводимо пару $((x,y),z)$ у точку (x,y,z) циліндра. Отже, склеюючи (тобто ототожнюючи) точки протилежних сторін квадрата за допомогою факторизації, отримуємо циліндр, як на наступному рисунку:

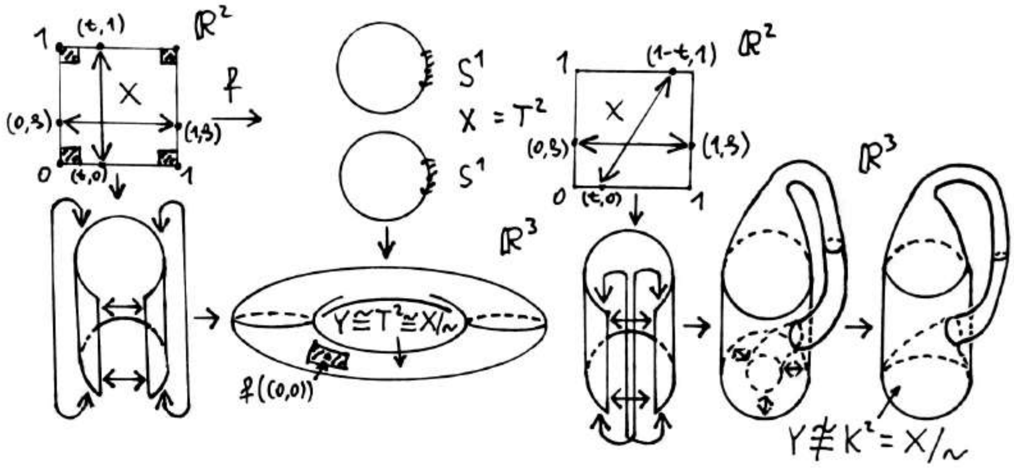


Приклад 16.2. Для того ж X нехай $(0,s) \sim (1, 1-s)$ для кожного $s \in [0,1]$, інші точки еквівалентні тільки собі. Аналогічно до попереднього прикладу, будуємо підмножину $\mathbb{R}^3$, що гомеоморфна $X/_\sim$, склеюючи точки протилежних сторін квадрата, але тепер перед склеюванням потрібно зробити напівобертання, що відповідає симетрії відносно центру квадрата. Це проілюстровано вище. Простір $X/_\sim$, що при цьому утворюється, зветься (замкненим) *листом Мебіуса*, або *стрічкою Мебіуса*.

Приклад 16.3. Тепер нехай $(0,s) \sim (1,s)$ для кожного $s \in [0,1]$, $(t,0) \sim (t,1)$ для кожного $t \in [0,1]$, інші (внутрішні) точки еквівалентні тільки собі. Зауважимо, що тут чотири точки $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ і $(1,1)$ еквівалентні, а інші точки межі квадрата ототожнюються по дві. Аналогічно до прикладу 16.1, можна побудувати відображення $f\colon X \to S^1 \times S^1$:

$$f(t,s) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)),$$

що факторизується у гомеоморфізм $f/_\sim\colon X/_\sim \to S^1 \times S^1 = T^2$ (перевірте це; зауважимо, що окіл для вершин квадрата треба будувати з чотирьох частин), тобто $X/_\sim$ гомеоморфний двовимірному тору. Він, у свою чергу, гомеоморфний поверхні бублика в $\mathbb{R}^3$ (див. приклад 15.3). Наступний рисунок дає уявлення, як отримати з квадрата цю поверхню: спочатку склеюємо квадрат у циліндр, а потім приклеюємо його кінці один до одного.



Приклад 16.4. Нарешті, нехай $(0, s) \sim (1, s)$ для кожного $s \in [0, 1]$, $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$ для кожного $t \in [0, 1]$, внутрішні точки квадрата еквівалентні тільки собі. Тут знову вершини квадрата еквівалентні, а інші точки межі квадрата склеюються по дві. Інтуїтивне уявлення про простір $X/_\sim$ можна отримати з ілюстрації вище за аналогією з тором: тепер перед склеюванням кінців циліндра необхідно його вивернути. Зауважимо, що з цієї причини умовне зображення цього простору у вигляді поверхні має самоперетини. Насправді він не вкладається у $\mathbb{R}^3$, на відміну від просторів з попередніх трьох прикладів, тобто не існує множини $Y \subset \mathbb{R}^3$ з індукованою топологією, що гомеоморфна $X/_\sim$. Втім, така множина існує у $\mathbb{R}^4$. Доведення цих фактів виходить за межі даного курсу. Простір $X/_\sim$ зветься *пляшкою Клейна* й інколи позначається K^2.

Зауваження. У подальшому площину $\mathbb{R}^2$, у якій лежить стандартне коло S^1, будемо ототожнювати з комплексною площиною $\mathbb{C}$. Тоді S^1 ототожниться з множиною комплексних чисел модуля 1. Тому, наприклад, відображення f з прикладу 16.3 можна записати у більш компактній формі $f(t, s) = (e^{2\pi it}, e^{2\pi is})$ в силу формули Ейлера $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Приклад 16.5. Нехай A – підмножина топологічного простору X. Введемо відношення еквівалентності $\sim$ на X наступним чином: усі точки A еквівалентні, усі інші еквівалентні тільки собі. Тоді факторпростір $X/_\sim$ позначається $X/_A$ й інколи зветься факторпростором X за A. Інтуїтивно ця факторизація відповідає стягуванню множини A в одну точку. Наприклад, $[0, 1]/_{\{0,1\}} \cong S^1$: склеюючи кінці відрізка, отримуємо коло. Це доводиться як у прикладі 16.1 (тільки простіше) за допомогою відображення $f \colon [0, 1] \to S^1 \colon f(t) = e^{2\pi it}$. Узагальнимо це спостереження:

Вправа 16.1. Далі будемо позначати через $D^n := D_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ евклідову замкнену кулю радіуса 1 з центром у початку координат. Очевидно, при $n \geqslant 1$ межею цієї кулі буде $S^{n-1} \subset D^n$. Показати, що $D^n/_{S^{n-1}} \cong S^n$.

17 Суми, склеювання і букети

Нехай X та Y – деякі множини. Якщо вони є підмножинами якоїсь множини Z і не перетинаються там, то можемо розглянути їх диз'юнктне об'єднання $X \sqcup Y$. Якщо вони перетинаються, можна доповнити їх елементи "мітками", тобто замінити X та Y на $\{(x,0) \mid x \in X\}$ та $\{(y,1) \mid y \in Y\}$ відповідно та розглянути об'єднання цих нових множин, що гарантовано буде диз'юнктним. Аналогічно, для сім'ї $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ довільних множин (у тому числі й таких, що не включаються у спільну множину) можемо визначити їх формальне *диз'юнктне об'єднання* наступним чином:

$$\bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma := \{(x,\gamma) \mid \gamma \in \Gamma,\, x \in X_\gamma\}.$$

Далі під диз'юнктним об'єднанням множин будемо розуміти саме цю конструкцію. Якщо ці множини наділені топологіями, то топологію їхнього диз'юнктного об'єднання будуватимемо наступним чином:

Означення 17.1. *Топологічною сумою* сукупності топологічних просторів $\{(X_\gamma, \mathcal{T}_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ називається множина $\bigsqcup\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ з топологією

$$\mathcal{T} := \left\{ \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma \,\middle|\, \forall\, \gamma \in \Gamma\; U_\gamma \in \mathcal{T}_\gamma \right\}.$$

Вправа 17.1. Перевірити, що $\mathcal{T}$ з попереднього означення дійсно є топологією. Більш того, це найсильніша топологія на $\bigsqcup\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ з тих, у яких включення

$$i_\gamma \colon X_\gamma \to \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \colon x \mapsto (x,\gamma)$$

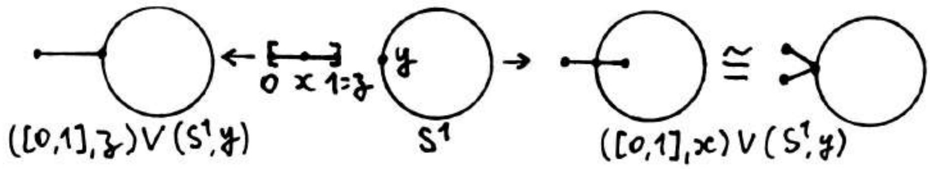
для усіх $\gamma \in \Gamma$ неперервні. Таким чином, це ще один (разом з факторгопологією) приклад фінальної топології.

Означення 17.2. Нехай X та Y – топологічні простори, $A \subset X$, і відображення $f \colon A \to Y$ неперервне (відносно індукованої топології A). Тоді *склеюванням* просторів X та Y за f називається факторпростір $X \cup_f Y := (X \sqcup Y)/_\sim$, де еквівалентність $\sim$ визначається умовою $x \sim f(x)$ для кожної $x \in A$, а інші точки еквівалентні лише собі.

Приклад 17.1. Нехай $f = y_0$ – постійне відображення з $A \subset X$ у одноточковий простір $Y = \{y_0\}$. Тоді $X \cup_f Y$ – це результат ототожнення усіх точок A з точкою y_0, що гомеоморфний $X/_A$ з прикладу 16.5 (чому?). Так, S^1 – це результат склеювання кінців відрізка $[0, 1]$ з точкою (або, як ще кажуть, приклеювання точки до кінців цього відрізка).

Означення 17.3. *Букетом* топологічних просторів X та Y з відміченими точками $x \in X$ та $y \in Y$ зветься простір $(X, x) \vee (Y, y) := X \cup_f Y$, де $f \colon A \to Y$ визначене умовами $A = \{x\}$ і $f(x) = y$.

Приклад 17.2. Тобто ми склеюємо відмічені точки. Нижче зображені різні букети відрізка і кола, що залежать від вибору точки відрізка:



Поняття букета також природним чином узагальнюється на довільну сім'ю просторів:

Означення 17.4. *Букетом* сукупності топологічних просторів із відміченими точками $\{(X_\gamma, x_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ зветься факторпростір

$$\bigvee_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma, x_\gamma) := \left(\bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right) \Big/ _{\sim},$$

де відношення еквівалентності $\sim$ визначається умовою $x_\gamma \sim x_\delta$ для будь-яких $\gamma, \delta \in \Gamma$, інші точки еквівалентні лише собі.

Вправа 17.2. Показати, що букет скінченної сукупності кіл S^1 не залежить (з точністю до гомеоморфізма) від вибору відмічених точок. Тому букет n кіл позначається просто $\underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}$. Наприклад, при $n = 2$ це "вісімка" (див. наступну ілюстрацію).

З іншими топологічними конструкціями, що будуються за допомогою факторизації, можна ознайомитися у [12, с. 8-14, с. 17-25 перекладу].

18 Дія групи на множині. Простір орбіт

Розглянемо тепер ще один важливий клас факторпросторів. Для цього знадобляться деякі базові поняття та приклади з теорії груп, які за необхідності можна знайти у доповненні (зокрема, означення A.1 та приклади після нього). Як і там, у цьому параграфі, якщо не вказане інше, для груп будуть використовуватися мультиплікативні позначення, тобто групова операція виглядатиме як множення.

Означення 18.1. Нехай G – деяка група, а X – множина. *(Лівою) дією* G на X зветься відображення $\lambda\colon G \times X \to X$, що переводить пару (a, x) з елемента групи і елемента множини у $\lambda(a, x) = a \cdot x \in X$ (позначення з точкою будемо використовувати, коли зрозуміло, про яку саме дію йдеться) таке, що:

1. $e \cdot x = x$ для будь-якого $x \in X$, де e – нейтральний елемент (одиниця) G.
2. $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$ для будь-яких $a, b \in G$ і $x \in X$.

Означення 18.2. Дія називається:

- *ефективною*, якщо для будь-якого $e \neq a \in G$ існує $x \in X$ такий, що $a \cdot x \neq x$;
- *вільною*, якщо $a \cdot x \neq x$ для будь-яких $e \neq a \in G$ і $x \in X$;
- *транзитивною*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ існує $a \in G$ такий, що $a \cdot x = y$.

Орбітою елемента $x \in X$ зветься $G \cdot x \coloneqq \{a \cdot x \mid a \in G\}$.

Зауваження. Очевидно, вільні дії є ефективними. Транзитивність дії еквівалентна тому, що вся множина X є орбітою будь-якого її елемента: $X = G \cdot x$. Зв'язок з поняттям факторможини стає зрозумілим, коли ми помітимо, що орбіти дії – це класи деякого відношення еквівалентності:

Твердження 18.1. *Нехай група G діє на X. Введемо відношення $\sim$ на X: $x \sim y$, якщо $y \in G \cdot x$. Тоді це відношення еквівалентності, причому класом еквівалентності $x \in X$ є $G \cdot x$.*

Доведення. Іншими словами, $x \sim y$ тоді й тільки тоді, коли існує $a \in G$ такий, що $y = a \cdot x$ Перевіримо виконання умов еквівалентності:

- Для будь-якого $x \in X$ за умовою 1. означення дії $x = e \cdot x$, тому $x \sim x$.

- Нехай $x \sim y$, тобто $y = a \cdot x$ для деякого $a \in G$. Діючи на обидві частини цієї рівності оберненим елементом a^{-1}, з умов означення дії отримуємо, що

$$a^{-1} \cdot y = a^{-1} \cdot (a \cdot x) = (a^{-1}a) \cdot x = e \cdot x = x,$$

  тому $y \sim x$.

- Якщо $x \sim y$ і $y \sim z$, тобто $y = a \cdot x$ і $z = b \cdot y$ для деяких $a, b \in G$, то за умовою 2. означення дії $z = b \cdot (a \cdot x) = (ba) \cdot x$, тому $x \sim z$.

Орбіти тоді є класами еквівалентності за побудовою цього відношення.

■

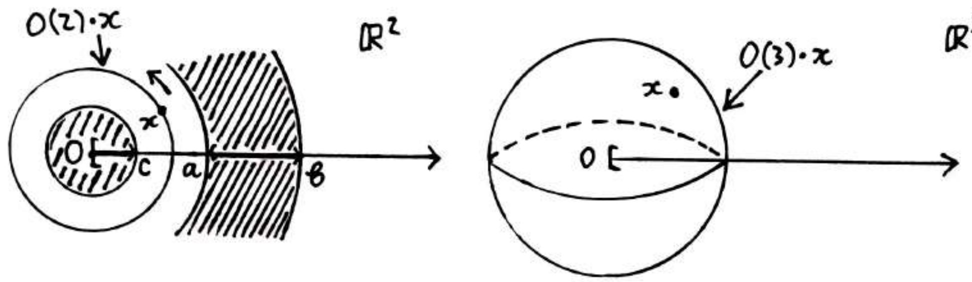
Означення 18.3. Нехай група G діє на X, а $\sim$ – відношення еквівалентності з попереднього твердження. Тоді фактормножина $X/_{\sim}$, тобто множина усіх попарно різних орбіт дії, називається *множиною орбіт* X за (дією) G і позначається $X/_G$. Якщо X – топологічний простір, то $X/_G$ з фактортопологією зветься *простором орбіт*.

Зауваження. Більш коректним для лівої дії було б позначення ${}_G\backslash X$, але у нас всі дії такі, тому немає сенсу робити розрізнення. У означенні *правої дії* умова 2. замінюється на $(x \cdot a) \cdot b = x \cdot (ab)$.

Приклад 18.1. Нехай $X = \mathbb{R}^n$ (зі стандартною топологією; тут і далі до кінця розділу $n \geqslant 1$), а $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ – *повна лінійна група*, що складається з усіх невироджених $(n \times n)$-матриць з дійсними коефіцієнтами. Операція на цій групі – це матричний добуток, а нейтральний елемент – одинична матриця E. Дія визначається умовою $A \cdot x \coloneqq Ax$ для матриці $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ і точки $x \in \mathbb{R}^n$, яку ми вважаємо вектором-стовпчиком. Умови означення дії випливають з властивостей матричного добутку. Ця дія є ефективною, але не вільною (перевірте це). Орбіта точки x має вигляд $\{0\}$ для $x = 0$ і $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ для $x \neq 0$ (чому?), зокрема, дія не транзитивна. Тобто $\mathbb{R}^n/_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})} = \{\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cdot 0, \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cdot x_0\}$ (для довільної $x_0 \neq 0$), а фактортопологія виявляється топологією зв'язної двокрапки $\big\{\varnothing, \mathbb{R}^n/_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}, \{\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cdot x_0\}\big\}$, бо $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ відкрита в $\mathbb{R}^n$, а $\{0\}$ – ні.

Приклад 18.2. Для того ж $X = \mathbb{R}^n$ розглянемо *ортогональну групу* $G = \mathrm{O}(n)$. Це підгрупа (див. означення A.3) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, що складається з усіх ортогональних матриць A, тобто таких, що $AA^T = A^T A = E$, де

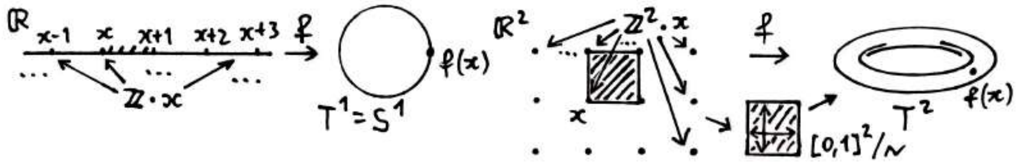
$(\cdot)^T$ – матричне транспонування. Якщо елементи $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ відповідають довільним невиродженим операторам на $\mathbb{R}^n$, то ці матриці – ізометріям евклідової метрики, що зберігають початок координат. Дія визначається як у попередньому прикладі. Вона є ефективною, не вільною (чому?) і не транзитивною: орбіта точки $x \in \mathbb{R}^n$ має вигляд $\mathrm{O}(n) \cdot x = S_{|x|}(0)$, тобто є евклідовою сферою з центром у 0 і радіусом $|x|$, якщо допустити також сфери радіуса 0, що складаються лише з центра (перевірте це). При $n = 2$ і 3 ці орбіти можна побачити на наступному рисунку:



Зокрема, при $n = 2$ цей приклад пояснює походження поняття "орбіта". Простір орбіт $\mathbb{R}^n/_{\mathrm{O}(n)}$ гомеоморфний променю $[0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ (з індукованої топологією). Дійсно, розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$: $x \mapsto |x|$. Воно переводить кожну орбіту в одну точку, тобто факторизується у бієкцію $\mathbb{R}^n/_{\mathrm{O}(n)} \to [0, +\infty)$. Зауважимо, що у якості бази фактортопології можна обрати множини сфер, радіуси яких містяться у інтервалах (a, b) або напівінтервалах $[0, c)$ (чому?). Прообрази цих множин в $\mathbb{R}^n$ – це відкриті сферичні кільця $B_b(0) \setminus D_a(0)$ і кулі $B_c(0)$ відповідно, що зображені зліва на попередній ілюстрації для випадку $n = 2$. Оскільки факторизоване f переводить ці множини у проміжки (a, b) і $[0, c)$ відповідно, що утворюють базу $[0, +\infty)$, воно є гомеоморфізмом в силу твердження 14.2.

Приклад 18.3. Тепер для $X = \mathbb{R}^n$ візьмемо $G = \mathbb{R}^n$ з операцією додавання векторів (див. приклад A.3) та дією паралельними перенесеннями: $a \cdot x \coloneqq x + a$. Очевидно, це дія, вона вільна (зокрема ефективна), бо $x + a \neq x$ при $a \neq 0$, і транзитивна, бо $y = x + (y - x)$ для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}^n$. Отже, простір орбіт $\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}^n}$ є одноточковим.

Приклад 18.4. Знову для $X = \mathbb{R}^n$ візьмемо групу наборів з n цілих чисел $G = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ (що теж описана у прикладі A.3) з тією ж дією, що у попередньому прикладі. Вона так само вільна, але вже не транзитивна, бо орбіта довільного елемента має вигляд т. зв. *решітки* (або *ґратки*) $\mathbb{Z}^n \cdot (x^1, \ldots, x^n) = \{(x^1 + a^1, \ldots, x^n + a^n) \mid a^1, \ldots, a^n \in \mathbb{Z}\}$. Див. наступну ілюстрацію для $n = 1$ і 2:



Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R}^n \to \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n} = T^n$ у n-вимірний тор умовою $f(x^1, \ldots, x^n) = \Big(e^{2\pi i x^1}, \ldots, e^{2\pi i x^n}\Big)$. В силу періодичності тригонометричних функцій, воно переводить усі точки деякої орбіти в одну точку тора (й різні орбіти – в різні точки), тому факторизується у бієкцію $\mathbb{R}^n/_{\mathbb{Z}^n} \to T^n$. Можна сказати, що f "намотує" простір на тор, зокрема, пряму на коло при $n = 1$.

Вправа 18.1. Перевірити, що побудоване факторвідображення є гомеоморфізмом, тобто $\mathbb{R}^n/_{\mathbb{Z}^n} \cong T^n$.

Також можна спочатку встановити гомеоморфізм $\mathbb{R}^n/_{\mathbb{Z}^n} \cong [0,1]^n/_\sim$, де $[0,1]^n := \underbrace{[0,1] \times \ldots \times [0,1]}_{n}$ – n-вимірний куб, а відношення еквівалентності $\sim$ на ньому визначається таким чином: $(x^1, \ldots, x^n) \sim (y^1, \ldots, y^n)$, якщо для кожного $i = \overline{1,n}$ або $x^i = y^i$, або множина $\{x^i, y^i\} = \{0, 1\}$. Іншими словами, це куб зі склеєними протилежними гранями, шо узагальнює приклади 16.5 при $n = 1$ і 16.3 при $n = 2$ (див. рисунок вище справа). Гомеоморфізм будується як відображення, що переводить орбіту елемента $(x^1, \ldots, x^n)$ у клас еквівалентності точки куба $(\{x^1\}, \ldots, \{x^n\})$, де $\{\cdot\}$ означає дробову частину числа. У свою чергу, $[0,1]^n/_\sim \cong T^n$ аналогічно до згаданих прикладів. Виконайте всі необхідні перевірки самостійно.

Приклад 18.5. Нехай $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ з топологією, що індукована стандартною, а $G = \mathbb{R}_* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ з операцією множення – мультиплікативна група поля дійсних чисел з прикладу A.4, що діє на $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ гомотетіями: $\lambda \cdot x := \lambda x$. Ця дія, очевидно, вільна, але не транзитивна: орбітою точки $x \neq 0$ є пряма, що проходить через початок координат та x (але без самого початку координат 0):

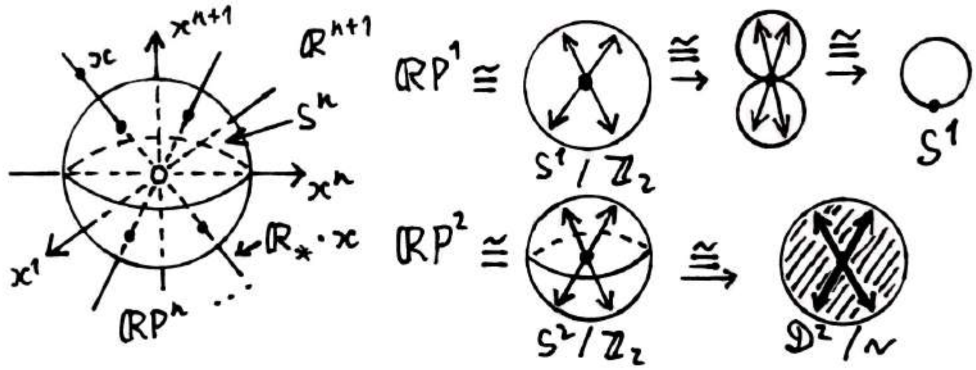
$$(x^1 : \ldots : x^{n+1}) := \mathbb{R}_* \cdot (x^1, \ldots, x^{n+1}) = \Big\{(\lambda x^1, \ldots, \lambda x^{n+1}) \;\Big|\; \lambda \neq 0\Big\},$$

де для позначення орбіти ми традиційно використовуємо *однорідні координати*. Відповідний простір орбіт $\mathbb{R}P^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})\,/_{\mathbb{R}_*}$ зветься *n-вимірним дійсним проєктивним простором.*

Зауважимо, що кожна пряма, що відповідає точці $\mathbb{R}P^n$, перетинає стандартну n-вимірну сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ у двох діаметрально протилежних точках. Це дозволяє встановити гомеоморфність $\mathbb{R}P^n$ і фактор-простору, що утворюється з S^n ототожненням пар діаметрально протилежних точок і який також можна описати як простір орбіт $S^n/_{\mathbb{Z}_2}$. Тут групу $\mathbb{Z}_2$ з прикладу А.5 зручно представляти у вигляді $\{1, -1\}$ з операцією множення (бо $[0] \mapsto 1$, $[1] \mapsto -1$ задає ізоморфізм $\mathbb{Z}_2$ на $\{1, -1\}$ у сенсі означення А.2; перевірте це) і брати дію таку ж, як для $\mathbb{R}_*$, тобто нетривіальний елемент -1 просто змінює всі точки на діаметрально протилежні: $(-1) \cdot x = -x$. Відповідний гомеоморфізм має вигляд

$$(x^1 : \ldots : x^{n+1}) \mapsto \pm \left(\frac{x^1}{|x|}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{|x|} \right),$$

де вираз справа позначає пару діаметрально протилежних точок S^n (див. ілюстрацію нижче).



Вправа 18.2. Показати, що це відображення дійсно є гомеоморфізмом, тобто $\mathbb{R}P^n \cong S^n/_{\mathbb{Z}_2}$.

Далі будемо за потреби ототожнювати ці два простори. Зауважимо, що $\mathbb{R}P^n$ також можна представити у вигляді об'єднання

$$\mathbb{R}P^n = \left\{ (x^1 : \ldots : x^{n+1}) \;\middle|\; x^{n+1} \neq 0 \right\} \sqcup \left\{ (x^1 : \ldots : x^n : 0) \right\}.$$

До цих множин входять прямі, що відповідно не лежать і лежать у гіперплощині $x^{n+1} = 0$. Це відповідає розбиттю сфери S^n на пару відкритих напівсфер і екватор, що є $(n-1)$-вимірною сферою. Перша з цих підмножин $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфна відкритій одиничній кулі B^n. Відповідний гомеоморфізм можна побудувати як факторизацію наступного відображення з $S^n \setminus \{x^{n+1} = 0\}$ у B^n:

$$(x^1, \ldots, x^{n+1}) \mapsto \left[\begin{array}{ll} (x^1, \ldots, x^n), & \text{якщо } x^{n+1} > 0; \\ (-x^1, \ldots, -x^n), & \text{якщо } x^{n+1} < 0. \end{array} \right.$$

Тобто точки верхньої напівсфери ортогонально проєктуються на відкриту одиничну кулю у гіперплощині $x^{n+1} = 0$, а точки нижньої – переводяться у діаметрально протилежні точки верхньої, а потім теж проєктуються. Якщо при цьому залишити на місці пари точок екватора, що ототожнюються, ми отримаємо бієкцію між факторпросторами $S^n/_{\mathbb{Z}_2}$ і $D^n/_{\sim}$, де відношення еквівалентності $\sim$ на замкненій одиничній кулі $D^n = B^n \sqcup S^{n-1}$ ототожнює діаметрально протилежні точки його межі S^{n-1}, при цьому точки внутрішності B^n еквівалентні лише собі.

Вправа 18.3. Показати, що побудована таким чином бієкція є гомеоморфізмом, тобто $S^n/_{\mathbb{Z}_2} \cong D^n/_{\sim}$.

Таким чином, існують три різних описи $\mathbb{R}P^n$ як факторпростору. Зокрема, при $n = 1$ (для *проєктивної прямої* $\mathbb{R}P^1$) маємо $D^1 = [-1, 1]$, і при склеювання кінців цього відрізку отримуємо коло, як у прикладі 16.5: $\mathbb{R}P^1 \cong D^1/_{\sim} \cong S^1$. Ототожнюючи діаметрально протилежні точки кола, тобто знаходячи $S^1/_{\mathbb{Z}_2}$, також отримаємо S^1, як показано на рисунку вище. При $n = 2$ *проєктивна площина* $\mathbb{R}P^2 \cong S^2/_{\mathbb{Z}_2} \cong D^2/_{\sim}$ не вкладається в $\mathbb{R}^3$, як і пляшка Клейна з прикладу 16.4 (але теж вкладається в $\mathbb{R}^4$). Детальніше про будову цього простору див., наприклад, у [13, с. 313-321, 340-341, с. 311-319, 338-339 перекладу]. Там же можна знайти пояснення використання терміну "проєктивний".

Вправа 18.4. Введемо на $X = [0, 1] \times [0, 1]$ з прикладів 16.1–16.4 відношення еквівалентності наступними умовами: $(0, s) \sim (1, 1 - s)$ для кожного $s \in [0, 1]$, $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$ для кожного $t \in [0, 1]$, внутрішні точки квадрата еквівалентні тільки собі. Показати, що $X/_{\sim} \cong \mathbb{R}P^2$.

Вправа 18.5. Описати *n-вимірний комплексний проєктивний простір* $\mathbb{C}P^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/_{\mathbb{C}_*}$ за аналогією з $\mathbb{R}P^n$. Показати, що $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ (підказка: використати стереографічну проєкцію з прикладу 14.5).

19 Аксіоми відокремлюваності

У цьому розділі ми ознайомимося з цілою сім'єю корисних топологічних інваріантів, що пов'язані з відокремлюванням точок і множин топологічних просторів.

Означення 19.1. Говорять, що топологічний простір X *задовольняє аксіомі* T_0 (*Колмогорова*), або є T_0*-простором*, якщо для будь-яких різних точок $x, y \in X$, $x \neq y$, існує відкритий окіл $U \ni x$ такий, що $U \not\ni y$ або існує відкритий окіл $U \ni y$ такий, що $U \not\ni x$.

Приклад 19.1. Простір з більш ніж одної точки з тривіальною (антидискретною) топологією очевидним чином не задовольняє T_0.

Вправа 19.1. Навести приклад нетривіальної топології на триточковій множині $X = \{x, y, z\}$ що не задовольняє T_0.

Означення 19.2. Топологічний простір X *задовольняє аксіомі* T_1 (*Тихонова, Фреше*), або є T_1-*простором*, якщо для будь-яких різних точок $x, y \in X$, $x \neq y$, існує відкритий окіл $U \ni x$ такий, що $U \not\ni y$.

Зауваження. Переставлючи x та y місцями, отримуємо, що аналогічний окіл існує й для точки y. Тому ця нова аксіома сильніша: з T_1 випливає T_0, але, взагалі кажучи, не навпаки, що демонструють наступні приклади.

Приклад 19.2. Топологія зв'язної двокрапки на двоелементній множині $\{\varnothing, \{x\}, \{x, y\}\}$ задовольняє T_0, але не T_1: у y немає відкритого околу, що не містив би x, а для x таким околом є $\{x\}$.

Приклад 19.3. Дійсна пряма $\mathbb{R}$ з топологією напівнескінченних інтервалів є T_0-, але не T_1-простором: якщо $x < y$, то відкритий окіл $(a, +\infty) \ni y$ для $x < a < y$ не містить x, але будь-який відкритий окіл x містить y.

Твердження 19.1. *Простір X задовольняє T_1 тоді й тільки тоді, коли одноточкова множина $\{x\}$ є замкненою для кожної $x \in X$.*

Доведення. Дійсно, замкненість $\{x\}$ еквівалентна відкритості доповнення $X \setminus \{x\}$, тобто тому, що для будь-якої $y \neq x$ існує її відкритий окіл $U \ni y$ такий, що $U \subset X \setminus \{x\}$. Але це і є умова аксіоми T_1.

■

Наслідок 19.1. *Простір задовольняє T_1 тоді й тільки тоді, коли усі його скінченні підмножини замкнені. Зокрема, кофінітна топологія – найслабша на даній множині з тих, що задовольняють T_1.*

Доведення. Це випливає з попереднього твердження та замкненості скінченних об'єднань замкнених множин. Таким чином, замкнені множини кофінітної топології на X – скінченні та X – містяться в сукупності замкнених множин будь-якої іншої T_1-топології $\mathcal{T}$, а тому кофінітна топологія слабша за $\mathcal{T}$.

■

Означення 19.3. Топологічний простір X *задовольняє аксіомі* T_2 (*Хаусдорфа*), або є *хаусдорфовим простором*, якщо для будь-яких різних точок $x, y \in X$, $x \neq y$, існують відкриті околи $U \ni x$ і $V \ni y$, що не перетинаються: $U \cap V = \varnothing$.

Зауваження. Очевидно, з T_2 випливає T_1. Але знову, взагалі кажучи, не навпаки:

Приклад 19.4. Кофінітна топологія на нескінченній множині задовольняє T_1 в силу наслідку 19.1, але не T_2, оскільки будь-які дві непорожні відкриті множини перетинаються.

Приклад 19.5. Розглянемо дійсну пряму з "подвоєним нулем": $X := (-\infty, 0) \cup \{0_1, 0_2\} \cup (0, +\infty)$. Топологія тут складається з

- відкритих підмножин $\mathbb{R}$ (зі стандартною топологією), що не містять точку 0;
- відкритих підмножин $\mathbb{R}$, де точка 0 замінена на 0_1;
- відкритих підмножин $\mathbb{R}$, де точка 0 замінена на 0_2.

Перевірте, що це дійсно топологія і що вона задовольняє T_1. Вона не задовольняє T_2, бо будь-які відкриті околи точок 0_1 і 0_2 перетинаються.

Твердження 19.2. *Будь-яка послідовність у хаусдорфовому топологічному просторі має не більше одної границі.*

Доведення. Припустимо, що у хаусдорфовому X існує послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, що має принаймні дві різних границі: $x_n \to x$ і $x_n \to y$, де $x \neq y$. Тоді у цих точок існують відкриті околи $U \ni x$ і $V \ni y$, що не перетинаються. Але за означенням границі тоді існують такі натуральні N і M, що $x_n \in U$ для $n \geqslant N$ та $x_n \in V$ для $n \geqslant M$, а отже $x_n \in U \cap V$ для будь-якого $n \geqslant \max\{N, M\}$, протиріччя.

■

Зауваження. В умові попереднього твердження аксіоми T_1 було б недостатньо, як демонструють простори з двох попередніх прикладів. Дійсно, якщо X – нескінченна множина з кофінітною топологією, то будь-який відкритий окіл будь-якої точки $x \in X$ містить всі елементи будь-якої нескінченної (тобто з нескінченною кількістю попарно різних елементів) послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ крім, можливо, скінченного числа, і тому $x_n \to x$. У просторі ж з прикладу 19.5 точки 0_1 і 0_2 є границями послідовності $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$.

Означення 19.4. Топологічний простір X *задовольняє аксіомі* T_3, якщо для будь-якої точки $x \in X$ і будь-якої замкненої множини $A \subset X$ такої, що $x \notin A$, існують відкриті $U \ni x$ і $V \supset A$, що не перетинаються: $U \cap V = \varnothing$. Простір X зветься *регулярним*, якщо він задовольняє T_1 і T_3.

Зауваження. Відкриту множину $V \supset A$ часто звуть *відкритим околом* A. З аксіоми T_3 не випливає жодна з попередніх, як демонструє тривіальна топологія. Дійсно, вона задовольняє T_3, бо з існування $x \notin A$ для замкненої A випливає $A = \varnothing$, тому умова виконується для $U = X$ і $V = \varnothing$. В умовах вправи 19.1 також можна знайти приклад, який буде задовольняти T_3, але не T_0, а отже не T_1 і не T_2 (зробіть це). Саме тому в означенні регулярності виконання T_1 вимагається окремо. Якщо для точок $x \neq y$ регулярного простору покласти $A = \{y\}$ (що є замкненою згідно з твердженням 19.1) в умові аксіоми T_3, то отримаємо T_2. Тому регулярні простори хаусдорфові. Обернене, взагалі кажучи, невірне, бо з T_2 не випливає T_3:

Приклад 19.6. Визначимо топологію на $\mathbb{R}$ базою з усіх множин U і $U \setminus \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, де U відкрита відносно стандартної топології (перевірте виконання умов критерію бази). Вона задовольняє T_2, тому що сильніша за стандартну, і не задовольняє T_3, бо множина $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ відносно неї замкнена, але будь-який відкритий окіл цієї множини перетинає будь-який відкритий окіл точки 0 (чому?).

Твердження 19.3. *Простір X задовольняє T_3 тоді й тільки тоді, коли для будь-яких $x \in X$ і відкритої $U \ni x$ існує відкрита $V \ni x$ така, що $\overline{V} \subset U$.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай x міститься у відкритій U. Тоді $X \setminus U$ замкнена і не містить x. Згідно з аксіомою T_3, існують відкриті $V \ni x$ і $W \supset X \setminus U$ такі, що $V \bigcap W = \varnothing$. Але тоді $V \subset X \setminus W$, і з монотонності замикання маємо
$$\overline{V} \subset \overline{X \setminus W} = X \setminus W \subset U,$$
де рівність випливає з того, що $X \setminus W$ замкнена, а наступне за нею включення – з $X \setminus U \subset W$.

$\underline{\Leftarrow}$ Тепер маємо x, що не міститься у замкненій A. Звідси $X \setminus A$ відкрита та містить x. За умовою, існує відкрита $V \ni x$ така, що $\overline{V} \subset X \setminus A$, тобто $\overline{V} \bigcap A = \varnothing$. За означенням замикання, тоді для кожної $y \in A$ існує відкрита $W_y \ni y$ така, що $W_y \cap V = \varnothing$. Покладемо $W := \bigcup\limits_{y \in A} W_y$. Це відкрита множина як об'єднання відкритих, $A \subset W$ і $W \cap V = \varnothing$ за побудовою. Це й означає виконання T_3.

■

Означення 19.5. Топологічний простір X *задовольняє аксіомі* T_4, якщо для будь-яких замкнених множин, що не перетинаються, $A, B \subset X$, $A \cap B = \varnothing$, існують їх відкриті околи $U \supset A$ і $V \supset B$, що не перетинаються:

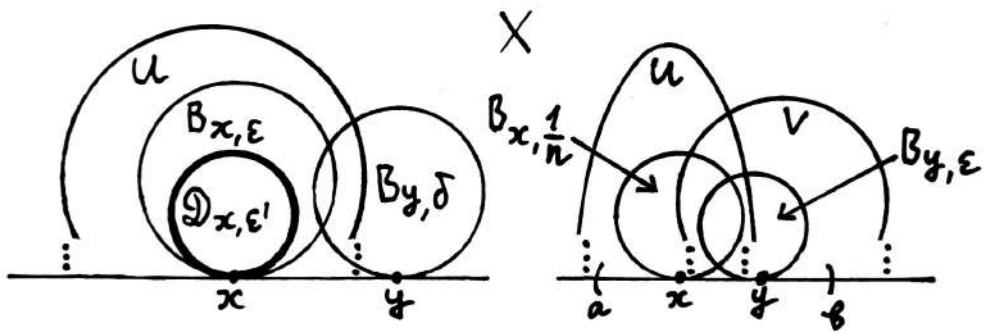
$U \cap V = \varnothing$. Простір X називається *нормальним*, якщо він задовольняє аксіомам T_1 і T_4.

Зауваження. У ситуації аксіоми T_4 говорять, що U і V *відокремлюють* A від B (і аналогічно в попередніх аксіомах, коли одна чи обидві множини є точками). Знову ж, небхідність вимагати T_1 у означенні нормальності обумовлена тим, що з T_4 не випливає жодна з попередніх аксіом. Для T_0–T_2 це демонструють ті ж приклади, що у попередньому зауваженні. Топологія зв'язної двокрапки з прикладу 19.2 задовольняє T_4 тривіальним чином, бо двох непорожніх замкнених множин, що не перетинаються, там не існує, але не задовольняє T_3, бо x не відокремлюється від замкненої $\{y\}$. З нормальності виводиться регулярність так само, як з регулярності – хаусдорфовість. Знову-таки, обернена імплікація, взагалі кажучи, невірна, що демонструє наступний приклад:

Приклад 19.7. *Площиною Немицького* (або *Мура*) зветься напівплощина $X \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$, топологія $\mathcal{T}$ на якій визначається базою з усіх відкритих підмножин напівплощини $\{y > 0\}$ (в топології, що індукована стандартною $\mathbb{R}^2$) та всіх множин вигляду $\{(x,0)\} \cup B_{x,\varepsilon}$, де $x \in \mathbb{R}$, а $B_{x,\varepsilon}$ – відкритий евклідовий круг радіуса $\varepsilon > 0$, що дотикається до прямої $\{y = 0\}$ у точці $(x,0)$. Умови критерію бази тут неважко перевірити. Зокрема, перетин двох множин вигляду $\{(x,0)\} \cup B_{x,\varepsilon}$ – це або відкрита підмножина напівплощини $\{y > 0\}$ (коли точки дотику різні), або множина того ж вигляду (коли вони співпадають).

Зауважимо, що $\mathcal{T}$ індукує дискретну топологію на прямій $\{y = 0\}$, бо всі одноточкові множини там відкриті. Тому вони (й взагалі усі підмножини цієї прямої) є замкненими як в індукованій топології, так і у $\mathcal{T}$, бо $\{y = 0\}$ є замкненою підмножиною. Зокрема, площина Немицького є T_1-простором в силу твердження 19.1 (одноточкові підмножини напівплощини $\{y > 0\}$, звичайно, теж замкнені).

Перевіримо, що $\mathcal{T}$ задовольняє T_3, використавши твердження 19.3. Нехай $x \in \mathbb{R}$. Для будь-якої відкритої $U \ni (x,0)$ за побудовою топології існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\{(x,0)\} \cup B_{x,\varepsilon} \subset U$. Тоді для будь-якого $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ замикання $\overline{\{(x,0)\} \cup B_{x,\varepsilon'}} = \{(x,0)\} \cup D_{x,\varepsilon'} \subset \{(x,0)\} \cup B_{x,\varepsilon} \subset U$, де $D_{x,\varepsilon}$ – замкнений евклідовий круг радіуса ε, що дотикається до $\{y = 0\}$ у $(x,0)$ (див. це на наступному рисунку зліва; чому замикання має саме такий вигляд?). Це й дає потрібну умову. Для точок напівплощини $\{y > 0\}$ перевірка аналогічна з використанням евклідових кругових околів (або можна діяти як у доведенні твердження 19.5 нижче).



Покажемо, що $\mathcal{T}$ не задовольняє T_4. Розглянемо підмножини прямої $\{y = 0\}$: $A \coloneqq \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ і $B \coloneqq \{(x,0) \mid x \in \mathbb{Q}\}$. Згідно з зауваженням вище, вони замкнені відносно $\mathcal{T}$. Нехай $U \supset A$ відкрита. Тоді для будь-якого $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ існує $\varepsilon(x) > 0$ таке, що $\{(x,0)\} \cup B_{x,\varepsilon(x)} \subset U$. Позначимо $A_n \coloneqq \left\{x \mid \varepsilon(x) > \frac{1}{n}\right\}$ для кожного натурального n. Ці множини, очевидно, вичерпують усі ірраціональні числа: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \sqcup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

Вправа 19.2. Показати, що пряму $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією не можна представити у вигляді об'єднання зліченної сукупності ніде не щільних множин (підказка: використати лему Коші – Кантора про вкладені відрізки з курсу аналіза, див., наприклад, [5, с. 32-33]).

Представивши $\mathbb{Q}$ у вигляді зліченного об'єднання одноточкових множин, отримуємо з цієї вправи, що A_n не є ніде не щільною для деякого n, тобто $\operatorname{Int} \overline{A_n} \neq \varnothing$ (ще раз наголосимо, що тут йдеться про стандартну топологію прямої, а не про дискретну, яку індукує на ній $\mathcal{T}$). Отже, $\overline{A_n}$ містить деякий інтервал (a,b). Тоді $B_{x,\frac{1}{n}} \subset U$ для кожного $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (a,b)$ (чому це так?).

Тепер нехай $V \supset B$ відкрита. Виберемо $y \in \mathbb{Q} \cap (a,b)$. Знову ж, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\{(y,0)\} \cup B_{y,\varepsilon} \subset V$. З геометричних міркувань і щільності множини ірраціональних чисел тоді випливає існування $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (a,b)$ такого, що $B_{x,\frac{1}{n}}$ перетинається з $B_{y,\varepsilon}$, як показано на ілюстрації вище справа. А тоді $U \cap V \neq \varnothing$. Таким чином, A і B неможливо відокремити.

З деякими іншими властивостями цього простору можна познайомитися у [18, с. 100-103].

Твердження 19.4. *Простір X задовольняє T_4 тоді й тільки тоді, коли для будь-яких замкненої $A \subset X$ і відкритої $U \supset A$ існує відкрита $V \supset A$ така, що $\overline{V} \subset U$.*

Доведення. Аналогічно до твердження 19.3 (перевірте це).

∎

Зауваження. Отже, маємо наступну строгу "ієрархію" аксіом відокремлюваності:

$$\text{нормальність} \Rightarrow \text{регулярність} \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

Як (майже) завжди, відкриті околи тут можна всюди замінити на довільні (у тому числі для множин: V будемо називати *околом* $A \subset X$, якщо існує відкрита U така, що $A \subset U \subset V$) або на елементи деякої бази (перевірте це).

Далі наведемо цілий клас прикладів нормальних просторів, показавши, що усі метричні простори нормальні. Зокрема, з цього випливатиме, що усі наведені у цьому розділі приклади ненормальних топологічних просторів не є метризовними.

Означення 19.6. Нехай (X, ρ) – метричний простір. *Відстанню від точки $x \in X$ до множини $A \subset X$* зветься

$$\rho(x, A) \coloneqq \inf\{\rho(x, y) \mid y \in A\}.$$

Лема 19.1. *Для будь-яких точок x, y метричного простору (X, ρ) і будь-якої його підмножини A*

$$|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leqslant \rho(x, y).$$

Доведення. Для будь-якої $z \in A$ за нерівністю трикутника

$$\rho(x, A) \leqslant \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Перейшовши до інфімуму за z, отримуємо з цього $\rho(x, A) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, A)$, тобто $\rho(x, A) - \rho(y, A) \leqslant \rho(x, y)$. Помінявши місцями x та y, маємо $\rho(y, A) - \rho(x, A) \leqslant \rho(x, y)$. Ці дві нерівності й дають потрібну.

■

Вправа 19.3. Показати, що для будь-якої підмножини A метричного простору (X, ρ)

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \rho(x, A) = 0\}.$$

Твердження 19.5. *Метричні простори нормальні.*

Доведення. Аксіома T_1 виконується для метричного простору (X, ρ), бо $y \notin B_{\rho(x,y)}(x)$ для будь-яких $x, y \in X$, $x \neq y$.

Перевіримо тепер виконання T_4. Нехай $A, B \subset X$ замкнені, $A \bigcap B = \varnothing$. Поклавши $f(x) \coloneqq \rho(x, A) - \rho(x, B)$, визначимо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Вона ліпшицева, а отже неперервна: дійсно, з леми 19.1 маємо для будь-яких $x, y \in X$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |\rho(x, A) - \rho(y, A)| + |\rho(x, B) - \rho(y, B)| \leqslant 2\rho(x, y).$$

Покладемо $U \coloneqq f^{-1}((-\infty, 0))$ і $V \coloneqq f^{-1}((0, +\infty))$. Ці множини складаються з точок, що ближчі до A, ніж до B, і з точок, що ближчі до B, ніж до A, відповідно. Вони відкриті як прообрази відкритих множин під дією неперервної функції, і $U \bigcap V = \varnothing$. Для будь-якої $x \in A$, очевидно, $\rho(x, A) = 0$. При цьому $\rho(x, B) > 0$, бо в іншому випадку $x \in \overline{B} = B$ згідно з попередньою вправою. Тому $f(x) < 0$. Таким чином, $A \subset U$. Аналогічно, $B \subset V$. Зауважимо, що лише тут використовується $A \bigcap B = \varnothing$, а також замкненість A і B.

■

Наведемо ще кілька важливих загальних властивостей аксіом відокремлюваності.

Твердження 19.6. *Аксіоми T_0–T_4, регулярність і нормальність є топологічними інваріантами.*

Доведення. Це випливає з того, що гомеоморфізми є бієкціями, зберігають околи і замкненість множин. Тому умови аксіом просто переносяться з одного з гомеоморфних просторів на інший.

■

Зауваження. Таким чином, аксіоми відокремлюваності можна використовувати для доведення негомеоморфності. Наприклад, стандартна пряма (нормальна в силу твердження 19.5, бо це метричний простір), пряма з кофінітною топологією (T_1) і пряма з топологією напівнескінченних інтервалів (T_0) попарно негомеоморфні.

Твердження 19.7. *Нехай $X \subset Y$ – підпростір топологічного простору. Якщо Y задовольняє T_i, де i – від 0 до 3, то X також задовольняє T_i. Якщо Y задовольняє T_4 і X – замкнена підмножина Y, то X також задовольняє T_4.*

Доведення. Для перевірки цього твердження у випадку аксіом T_0–T_2 застосовуємо до $x, y \in X$, $x \neq y$ відповідну аксіому Y і перетинаємо околи U і V (якщо він є) з X, отримуючи околи цих точок у X.

Перевіримо твердження для T_3: замкнена підмножина $A \subset X$ має вигляд $\widetilde{A} \cap X$, де $\widetilde{A}$ – замкнена в Y (чому?). З $x \notin A$ випливає $x \notin \widetilde{A}$, тому можна застосувати аксіому T_3 до x і $\widetilde{A}$ в Y та знову ж перетнути отримані околи $U \ni x$, $V \supset \widetilde{A}$ з X, побудувавши таким чином околи x і A відповідно, що не перетинаються.

Нарешті, для T_4 множини A і B, що замкнені у замкненому підпросторі X, будуть замкненими й у Y. Застосуємо до них аксіому T_4 для Y і знову перетнемо отримані околи U і V з X.

■

Зауваження. Тобто аксіоми відокремлюваності наслідуються, але T_4 – з додатковою умовою замкненості підпростору. Ця умова є суттєвою. Наприклад, можна побудувати топологію на компактному поповненні $Y = X \cup \{x\}$ площини Немицького X з прикладу 19.7 одною додатковою точкою (т. зв. *одноточковій компактифікації*, див. [2, с. 138-141], [3, с. 105-106] або [8, с. 92-93, с. 136-138 перекладу]), яка є нормальною, а X – її ненормальним підпростором (див. деталі у [3, задача 15.32x] або [18, с. 103]).

Вправа 19.4. Показати, що прямий добуток топологічних просторів $X \times Y$ хаусдорфовий тоді й тільки тоді, коли X та Y хаусдорфові. Чи узагальнюється це на довільну скінченну кількість множників? Чи вірні аналогічні твердження для інших аксіом відокремлюваності (принаймні в один бік)? Підказка: спробуйте показати, що пряма Зоргенфрея нормальна, а ось її прямий добуток на себе (*площина Зоргенфрея*) є ще одним прикладом (крім 19.7) регулярного, але не нормального простору. Див. деталі цього та огляд інших властивостей площини Зоргенфрея у [18, с. 103-105].

Наступне твердження демонструє взаємодію аксіом відокремлюваності та зліченності:

Твердження 19.8. *Якщо простір задовольняє T_3 та другій аксіомі зліченності, то він задовольняє T_4. Зокрема, регулярний простір з не більш ніж зліченною базою є нормальним.*

Доведення. Отже, нехай A і B – замкнені у даному просторі X, $A \bigcap B = \varnothing$. З твердження 19.3, оскільки кожна $x \in A$ належить відкритій $X \setminus B$, існує відкрита $U_x \ni x$ така, що $\overline{U_x} \subset X \setminus B$. Аналогічно, для кожної $y \in B$ існує відкрита $V_y \ni y$ така, що $\overline{V_y} \subset X \setminus A$. Множини A і B з індукованими топологіями теж задовольняють другій аксіомі зліченності. Тому до їхніх відкритих покрить $\{U_x\}_{x \in A}$ і $\{V_y\}_{y \in B}$ можна застосувати теорему Ліндельофа (точніше, ми застосовуємо її до перетинів елементів цих покрить з A і B відповідно). Отримаємо відкриті не більш ніж зліченні підпокриття $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ множин A і B відповідно, причому за побудовою $\overline{U_n} \cap B = \varnothing$ і $\overline{V_n} \cap A = \varnothing$ для будь-якого натурального n.

Для кожного натурального n покладемо

$$\widetilde{U_n} \coloneqq U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}\,, \quad \widetilde{V_n} \coloneqq V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}.$$

Ці множини відкриті і, за властивістю покрить $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$, також утворюють відкриті покриття A і B відповідно. При цьому жодна з множин $\widetilde{U_n}$ не перетинається з жодною з $\widetilde{V_n}$. Тоді $U \coloneqq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{U_n}$ і $V \coloneqq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{V_n}$ є відкритими околами A і B відповідно, що не перетинаються.

■

Зауваження. Далі наведемо без доведень (але з посиланнями на них для зацікавлених) три теореми, що пов'язані з аксіомою T_4. Зокрема, наступний нетривіальний критерій виконання цієї аксіоми важливий тим, що дозволяє використання дійсних чисел з їхньою багатою структурою для дослідження не тільки метричних, а й ширшого (в силу твердження 19.5) класу топологічних просторів, що задовольняють T_4, подібно до того, як аксіоми зліченності дозволяють використання натуральних. Дві наступні теореми виводяться з цієї.

Теорема 19.1 (Лема Урисона)**.** *Топологічний простір X задовольняє аксіомі T_4 тоді й тільки тоді, коли для будь-яких замкнених $A, B \subset X$ таких, що $A \cap B = \varnothing$, існує неперервна функція $f \in C(X, [0,1])$ така, що $f|_A = 0$ і $f|_B = 1$.*

Доведення. Достатність ($\underline{\Leftarrow}$) тут можна перевірити аналогічно до доведення твердження 19.5 (зробіть це), а складною частиною є необхідність ($\underline{\Rightarrow}$). Її доведення можна знайти у [2, с. 125-126] або у [17, с. 207-210].

■

Означення 19.7. Функцію f із формулювання леми Урисона будемо називати *функцією Урисона* множин A і B.

Теорема 19.2 (Тітце про продовження)**.** *Нехай топологічний простір X задовольняє аксіомі T_4 і $A \subset X$ замкнена. Тоді для будь-якої неперервної функції $f \in C(A, \mathbb{R})$ (відносно індукованої топології A) існує її неперервне продовження на X – функція $\overline{f} \in C(X, \mathbb{R})$ така, що $\overline{f}|_A = f$.*

Доведення. Див. [2, с. 126-127] або [17, с. 219-222].

■

Теорема 19.3 (Урисона про метризацію)**.** *Топологічний простір, що задовольняє другій аксіомі зліченності, є метризовним тоді й тільки тоді, коли він нормальний.*

Доведення. Необхідність ($\Rightarrow$) безпосередньо випливає з твердження 19.5 (причому незалежно від аксіом зліченності). Достатність ($\Leftarrow$) доводиться за допомогою вкладення даного простору X у деякий метричний простір. Метрика тоді переноситься з цього образу на X. Дві такі конструкції описані у [17, с. 214-218]. Зокрема, в одній з них X вкладається у тихонівський добуток відрізків.

∎

Зауваження. У формулюванні попередньої теореми часто замість нормальності використовують регулярність. Дійсно, у просторах, що задовольняють другій аксіомі зліченності, це еквівалентні властивості в силу твердження 19.8.

20 Компактність. Локальна компактність

Компактність у деякому сенсі узагальнює скінченність множини і є одним з найважливіших топологічних інваріантів.

Означення 20.1. Топологічний простір зветься *компактним*, якщо у будь-якого його відкритого покриття існує скінченне підпокриття. Підмножина топологічного простору зветься *компактною*, або *компактом*, якщо вона є компактним простором в індукованій топології.

Зауваження. Це означення нагадує посилене твердження теореми Ліндельофа. Зауважимо, що інколи (наприклад, у [8]) термін "компакт" використовується для хаусдорфових компактних просторів, але у нас це просто синонім компактної підмножини. Також у деяких більш старих джерелах "наша" компактність зветься бікомпактністю.

Твердження 20.1. *Підмножина топологічного простору є компактною тоді й тільки тоді, коли у будь-якого її відкритого покриття існує скінченне підпокриття.*

Доведення. Це безпосередньо випливає з означень: за побудовою індукованої топології, будь-яке відкрите покриття підмножини $K \subset X$ як топологічного простору має вигляд $\{K \cap U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, де $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – її відкрите покриття як підмножини, і аналогічно для скінченних підпокриттів $\{K \cap U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ і $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ відповідно.

∎

Вправа 20.1. Нехай Y – підпростір топологічного простору X. Показати, що підмножина $K \subset Y \subset X$ є компактною в Y тоді й тільки тоді, коли вона компактна в X.

Приклад 20.1. Усі скінченні підмножини будь-якого топологічного простору (зокрема, всі скінченні простори) компактні. Дійсно, якщо $K = \{x_i\}_{i=1}^n$ і $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – її відкрите покриття, то для кожного $i = \overline{1,n}$ існує $\alpha_i \in A$ такий, що $x_i \in U_{\alpha_i}$, а тоді $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ й буде потрібним підпокриттям.

Приклад 20.2. У просторі з антидискретною топологією всі підмножини, очевидно, компактні.

Вправа 20.2. Показати, що у просторі з кофінітною топологією всі підмножини компактні.

Приклад 20.3. У просторі з дискретною топологією $\big\{\{x\}\big\}_{x \in K}$ є відкритим покриттям підмножини K, у якого не існує *нетривіального* (тобто меншого) підпокриття. Тому (і в силу прикладу 20.1) K компактна тоді й тільки тоді, коли вона скінченна.

Приклад 20.4. Відрізок $[a,b] \subset \mathbb{R}$ компактний у стандартній топології. Це твердження леми Гейне – Бореля (або Бореля – Лебега), що відома з курсу аналіза. Для повноти викладення наведемо тут доведення цього факту. Зауважимо, що у ньому використовується лема Коші – Кантора про вкладені відрізки, яку, в свою чергу, можна вивести з повноти метричного простору $\mathbb{R}$. Див., наприклад, її доведення у [5, с. 32-33], де з повноти випливає існування супремума (як саме?).

Твердження 20.2 (Лема Гейне – Бореля)**.** *Будь-який відрізок $[a,b]$ у дійсній прямій зі стандартною топологією є компактним.*

Доведення. Припустимо, що у $I_1 := [a,b]$ існує вікрите покриття $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, що не має скінченного підпокриття. Тоді воно не матиме скінченного підпокриття і як покриття принаймні одного з відрізків $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ та $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, який позначимо через I_2. Аналогічним чином розділивши I_2 навпіл, отримаємо відрізок I_3 з тією ж властивістю. Ітеруючи, отримаємо незростаючу послідовність $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$ відрізків, довжини яких прямують до нуля. За лемою Коші – Кантора тоді у них існує спільна точка $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Нехай індекс $\alpha \in A$ такий, що $c \in U_\alpha$. Оберемо $\varepsilon > 0$ таке, що $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_\alpha$, і n таке, що довжина відрізку I_n менша за ε. Тоді, оскільки $c \in I_n$, $I_n \subset (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_\alpha$, тобто $\{U_\alpha\}$ – скінченне підпокриття відрізку I_n, протиріччя.

■

Вправа 20.3. Довести *теорему Кантора*, що в деякому сенсі узагальнює лему Коші – Кантора: будь-яка незростаюча послідовність $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset K_{n+1} \supset \ldots$ замкнених компактних непорожніх підмножин топологічного простору має непорожній перетин: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$.

Приклад 20.5. Сама пряма $\mathbb{R}$ не є компактним простором, бо, наприклад, її відкрите покриття $\{(n-1, n+1)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ не має нетривіального підпокриття. Всі інтервали та напівінтервали в $\mathbb{R}$ також некомпактні: так, для інтервала (a,b) це демонструє покриття $\left\{\left(a, b-\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=n_0}^{\infty}$, що не має скінченного підпокриття (перевірте це для інших типів інтервалів та напівінтервалів).

Твердження 20.3. *Нехай $f\colon X \to Y$ – неперервне відображення топологічних просторів, а X компактний. Тоді $f(X) \subset Y$ компактна.*

Доведення. Нехай $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – якесь відкрите покриття множини $f(X)$ у просторі Y. Прообрази його елементів утворюють відкрите покриття $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ простору X в силу неперервності f, а отже існує його скінченне підпокриття $\{f^{-1}(U_{\alpha_i})\}_{i=1}^{n}$. Тоді $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{n}$ – скінченне підпокриття для $f(X)$.

∎

Наслідок 20.1. *Компактність є топологічним інваріантом.*

Доведення. Дійсно, якщо $f\colon X \to Y$ – гомеоморфізм, то $Y = f(X)$ та $X = f^{-1}(Y)$, де f і f^{-1} неперервні. Тому X і Y одночасно або компактні, або некомпактні.

∎

Зауваження. Отже, компактність можна використовувати для доведення негомеоморфності. Так, в силу встановленого вище у прикладах 20.4 і 20.5, жоден відрізок $[a,b] \subset \mathbb{R}$ не може бути гомеоморфним жодному інтервалу або напівінтервалу.

Наслідок 20.2. *Факторпростір компактного простору (за відношенням еквівалентності) є компактним.*

Доведення. Дійсно, $X/_\sim = p(X)$, де канонічна проєкція p є неперервним відображенням.

∎

Приклад 20.6. Коло $S^1 \cong [0,1]/_\sim$ (див. приклад 16.5) компактне в силу попередніх двох наслідків, бо відрізок $[0,1]$ компактний згідно з твердженням 20.2.

Теорема 20.1 (Компактність прямого добутку)**.** *Прямий добуток топологічних просторів $X \times Y$ компактний тоді й тільки тоді, коли простори X та Y компактні.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Нехай $X \times Y$ компактний. Згадаємо, що канонічні проєкції неперервні: $p_X \in C(X\times Y, X)$ і $p_Y \in C(X\times Y, Y)$ в силу пункта $\underline{1.}$ твердження 15.2. Отже, $X = p_X(X \times Y)$ і $Y = p_Y(X \times Y)$ компактні за твердженням 20.3.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай X та Y – компактні простори, а $\mathcal{U}$ – відкрите покриття $X\times Y$. За побудовою топології прямого добутку, кожна множина системи $\mathcal{U}$ має вигляд $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma \times V_\gamma$, де U_γ і V_γ відкриті в X і Y відповідно. Замінимо в $\mathcal{U}$ кожну таку множину на набір множин $U_\gamma \times V_\gamma$. Отримаємо нову сукупність $\widetilde{\mathcal{U}} = \{U_\alpha\times V_\alpha\}_{\alpha\in A}$, яка також є відкритим покриттям простору $X \times Y$, і кожна її множина є підмножиною якоїсь множини з $\mathcal{U}$ (у таких випадках кажуть, що покриття $\widetilde{\mathcal{U}}$ *вписане* в $\mathcal{U}$).

Нехай $x \in X$ – довільна точка. Тоді $\{x\} \times Y \cong Y$ згідно з пунктом $\underline{4.}$ твердження 15.2, отже $\{x\} \times Y$ – компакт в $X \times Y$ за наслідком 20.1. При цьому $\widetilde{\mathcal{U}}$ є, зокрема, відкритим покриттям $\{x\} \times Y \subset X \times Y$. Отже, з нього можна виділити скінченне підпокриття $\{U_{x,i} \times V_{x,i}\}_{i=1}^{n_x}$. Можемо вважати, що $(U_{x,i} \times V_{x,i}) \cap (\{x\} \times Y) \neq \varnothing$ для кожного $i = \overline{1, n_x}$ (для цього просто викинемо з підпокриття елементи, що не перетинаються з множиною). Тоді $x \in U_{x,i}$ для кожного i, тому відкрита множина $U_x \coloneqq \bigcap\limits_{i=1}^{n_x} U_{x,i}$ містить x, відкрита смуга $U_x\times Y$ включає $\{x\}\times Y$, і $\{U_{x,i}\times V_{x,i}\}_{i=1}^{n_x}$ – відкрите покриття смуги $U_x \times Y$.

Повторивши цю побудову для кожної $x \in X$, отримаємо відкрите покриття $\{U_x\}_{x\in X}$ компактного простору X. У нього існує скінченне підпокриття $\{U_{x_j}\}_{j=1}^{m}$. Тоді

$$\widehat{\mathcal{U}} \coloneqq \left\{U_{x_j,i} \times V_{x_j,i}\right\}_{i=\overline{1,n_{x_j}},\, j=\overline{1,m}}$$

буде покриттям $X \times Y$ (тобто підпокриттям $\widetilde{\mathcal{U}}$). Справді, для кожної точки $(x, y) \in X \times Y$ існує j таке, що $x \in U_{x_j}$. Оскільки тоді $\{U_{x_j,i} \times V_{x_j,i}\}_{i=1}^{n_{x_j}}$ – покриття $U_{x_j} \times Y \supset \{x\} \times Y$ за побудовою вище, одна з цих множин містить (x, y).

Кожна множина з $\widehat{\mathcal{U}}$, що відповідає індексам $i = \overline{1, n_{x_j}}$, $j = \overline{1, m}$, належить до $\widetilde{\mathcal{U}}$, отже є підмножиною якоїсь множини $W_{ij} \in \mathcal{U}$. Тоді сукупність $\{W_{ij}\}$ є відкритим скінченним покриттям $X \times Y$, що є підпокриттям $\mathcal{U}$. Таким чином, $X \times Y$ компактний.

■

Зауваження. Ця теорема очевидним чином узагальнюється за індукцією: добуток просторів $X_1 \times \ldots \times X_n$ компактний тоді й тільки тоді, коли $X_1, \ldots, X_n$ компактні. Більш того, вона залишається вірною й для тихонівського добутку довільної сукупності просторів. Це її узагальнення зветься *теоремою Тихонова про компактність*. Її доведення можна знайти у [2, с. 135-136] або [17, с. 230-237].

Приклад 20.7. З цієї теореми випливає, зокрема, що замкнені паралелепіпеди $[a^1, b^1] \times \ldots \times [a^n, b^n]$ компактні в $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n}$ в силу твердження 20.2, при цьому сам простір $\mathbb{R}^n$ не є компактним в силу прикладу 20.5 (див. також теорему 22.2 нижче).

Приклад 20.8. Аналогічно, n-вимірний тор $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ компактний, бо коло S^1 компактне (приклад 20.6).

Зауваження. Приклади 20.4 і 20.5 демонструють, зокрема, що у загальному випадку компактність не зберігається при переході до підмножини (не наслідується). Але це так для замкнених множин:

Твердження 20.4. *Будь-яка замкнена підмножина компактного топологічного простору компактна.*

Доведення. Отже, нехай простір X компактний, $K \subset X$ замкнена, і $\mathcal{U}$ – відкрите покриття K. Тоді $\mathcal{U} \cup \{X \setminus K\}$ – відкрите покриття X. Виділимо з нього скінченне підпокриття та викинемо з цього підпокриття множину $X \setminus K$ (якщо вона там є). Отримаємо покриття множини K, що є скінченним підпокриттям $\mathcal{U}$.

■

Далі опишемо зв'язок компактності з аксіомами відокремлюваності.

Твердження 20.5. *Будь-яка компактна підмножина хаусдорфового топологічного простору замкнена.*

Доведення. Нехай підмножина K простору X компактна, а $x \notin K$. В силу хаусдорфовості X, для будь-якої $y \in K$ існують відкриті $U_y \ni x$ і $V_y \ni y$ такі, що $U_y \cap V_y = \varnothing$. Тоді $\{V_y\}_{y \in K}$ – відкрите покриття K, у якого існує скінченне підпокриття $\{V_{y_i}\}_{i=1}^n$. Покладемо $U \coloneqq \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{y_i}$. Це відкритий окіл x, і $U \cap K = \varnothing$ за його побудовою. Отже, довільна точка x множини $X \setminus K$ є внутрішньою, тобто K замкнена.

■

Зауваження. У нехаусдорфових просторах компактні підмножини можуть бути незамкненими: див. приклад 20.2 або вправу 20.2.

Наслідок 20.3. *Нехай $f\colon X \to Y$ – бієктивне неперервне відображення топологічних просторів, X компактний, а Y хаусдорфовий. Тоді f – гомеоморфізм.*

Доведення. Згідно з твердженням 14.2, нам залишилося перевірити відкритість f. Дійсно, нехай $U \subset X$ відкрита. Тоді $X \backslash U$ замкнена. В силу твердження 20.4, $X \backslash U$ – компакт. В силу твердження 20.3, $Y \setminus f(U) = f(X \setminus U)$ – компакт. Нарешті, в силу твердження 20.5, $Y \backslash f(U)$ замкнена. Отже, $f(U)$ відкрита.

■

Наслідок 20.4. *Нехай $f\colon X \to Y$ – ін'єктивне неперервне відображення топологічних просторів, X компактний, а Y хаусдорфовий. Тоді f – вкладення.*

Доведення. Достатньо застосувати попередній наслідок до бієктивного обмеження $f\colon X \to f(X)$, де простір $f(X)$ є хаусдорфовим в силу твердження 19.7.

■

Твердження 20.6. *Якщо топологічний простір хаусдорфовий і компактний, то він нормальний.*

Доведення. Оскільки даний простір X задовольняє аксіомі T_2 (а отже й T_1), для доведення нормальності достатньо перевірити виконання аксіоми T_4. Нехай $A, B \subset X$ – замкнені, $A \cap B = \varnothing$. Згідно з твердженням 20.4, A і B компактні. В силу хаусдорфовості X, для будь-яких $x \in A$ та $y \in B$ існують відкриті $U_{x,y} \ni x$ і $V_{x,y} \ni y$ такі, що $U_{x,y} \cap V_{x,y} = \varnothing$.

Розглянемо довільну $x \in A$. Тоді маємо $\{V_{x,y}\}_{y \in B}$ – відкрите покриття компактної B, тому у нього існує скінченне підпокриття $\{V_{x,y_i}\}_{i=1}^{n_x}$. Покладемо

$$U_x \coloneqq \bigcap_{i=1}^{n_x} U_{x,y_i}; \quad V_x \coloneqq \bigcup_{i=1}^{n_x} V_{x,y_i}.$$

Ці множини відкриті, $U_x \cap V_x = \varnothing$ (бо $U_{x,y_i} \cap V_{x,y_i} = \varnothing$ для будь-якого i), і за побудовою $x \in U_x$, $B \subset V_x$.

Отже, $\{U_x\}_{x \in A}$ є відкритим покриттям компактної A. У нього існує скінченне підпокриття $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{m}$. Візьмемо

$$U \coloneqq \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}; \quad V \coloneqq \bigcap_{i=1}^{m} V_{x_i}.$$

Знову ж, U і V відкриті, $U \cap V = \varnothing$ (бо $U_{x_i} \cap V_{x_i} = \varnothing$ для кожного i), і $A \subset U$, $B \subset V$ за побудовою. Це й демонструє виконання T_4.

■

Зауваження. Відмітимо, що у другому абзаці попереднього доведення ми доводимо регулярність даного простору (тобто виконання T_3), а у третьому – виводимо з неї нормальність.

Означення 20.2. Топологічний простір X називається *локально компактним*, якщо для будь-якої точки $x \in X$ існує відкрита $U \ni x$ така, що її замикання $\overline{U}$ компактне. Підмножина топологічного простору називається *локально компактною*, якщо вона є локально компактним простором в індукованій топології.

Зауваження. З компактності, очевидно, випливає локальна компактність: достатньо взяти $U = X$ для будь-якої точки. Але, взагалі кажучи, не навпаки:

Приклад 20.9. Нескінченний дискретний простір X некомпактний (див. приклад 20.3), але локально компактний: для будь-якої $x \in X$ достатньо взяти $U = \{x\}$, тоді $\overline{U} = U$ – компакт.

Приклад 20.10. Простір $\mathbb{R}^n$ некомпактний (приклад 20.7), але локально компактний: для будь-якої $x = (x^1, \ldots, x^n)$ і $\varepsilon > 0$ замиканням відкритої кулі $U = B_\varepsilon(x) = \prod_{i=1}^{k}(x^i - \varepsilon, x^i + \varepsilon) \ni x$ метрики ρ_∞ буде $D_\varepsilon(x) = \prod_{i=1}^{k}[x^i - \varepsilon, x^i + \varepsilon]$, що буде компактом в силу прикладу 20.7.

Вправа 20.4. Показати, що множина раціональних чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ не є локально компактною.

Твердження 20.7. *Локальна компактність є топологічним інваріантом.*

Доведення. Дійсно, це так, бо гомеоморфізм зберігає околи, замикання і компактність.

■

Вправа 20.5. Показати, що якщо топологічний простір хаусдорфовий і локально компактний, то він регулярний. Підказка: використати твердження 19.3, див. [2, с. 132-133]. Продемонструвати, що такий простір необов'язково нормальний, навівши приклад.

Ще одним узагальненням компактності є паракомпактність:

Вправа 20.6. Топологічний простір X зветься *паракомпактним*, якщо у будь-яке його відкрите покриття $\mathcal{U}$ можна *вписати локально скінченне* покриття $\mathcal{V}$. Вписаність означає, що кожний елемент $\mathcal{V}$ є підмножиною деякого елемента $\mathcal{U}$ (пор. з покриттями у доведенні теореми 20.1), а локальна скінченність – що для будь-якої точки $x \in X$ існує відкрита $U \ni x$, яка перетинається лише зі скінченною кількістю елементів $\mathcal{V}$. Показати, що паракомпактність теж є топологічним інваріантом і що компактні простори паракомпактні.

Показати, що якщо локально компактний топологічний простір задовольняє другій аксіомі зліченності, то він паракомпактний (див. [2, с. 133-134]). Зокрема, тоді $\mathbb{R}^n$ паракомпактний в силу прикладу 20.10.

Вправа 20.7. Показати, що якщо топологічний простір хаусдорфовий і паракомпактний, то він нормальний (див. [17, с. 253-254]).

Зауваження. Крім компактних просторів та $\mathbb{R}^n$ паракомпактними є взагалі усі метричні простори. Доведення цього, а також подальшу інформацію про паракомпактність та її застосування можна знайти, зокрема, у [17, с. 252-261]. Див. також [3, с. 107-108].

21 Секвенційна компактність

В аналізі часто використовується варіант компактності, що формулюється у термінах послідовностей. У цьому розділі ми з'ясуємо зв'язок між цими поняттями, почавши з допоміжних міркувань.

Означення 21.1. Нехай X – топологічний простір. Точка $x \in X$ зветься *точкою накопичення* підмножини $A \subset X$, якщо для будь-якої відкритої $U \ni x$ перетин $U \cap A$ нескінченний.

Зауваження. Точки накопичення множини є її граничними точками, бо у попередньому означенні усі перетини $U \cap A$ залишаться непорожніми, якщо з них викинути x.

Твердження 21.1. *Будь-яка нескінченна підмножина компактного топологічного простору має точку накопичення.*

Доведення. Нехай X компактний і $A \subset X$ нескінченна. Припустимо, що жодна точка $x \in X$ не є точкою накопичення A, тобто існує відкрита $U_x \ni x$ така, що перетин $U_x \cap A$ скінченний. Тоді $\{U_x\}_{x \in X}$ є відкритим покриттям X, у якого не існує скінченного підпокриття, бо будь-яка його скінченна підсистема навіть не покриває A, протиріччя.

$\blacksquare$

Означення 21.2. Топологічний простір називається *секвенційно компактним*, якщо у будь-якої послідовності в ньому існує підпослідовність, що має границю. Підмножина топологічного простору називається *секвенційно компактною*, якщо вона є секвенційно компактним простором в індукованій топології.

Твердження 21.2. *Секвенційна компактність є топологічним інваріантом.*

Доведення. Випливає з того, що гомеоморфізм зберігає підпослідовності та границі.

$\blacksquare$

Твердження 21.3. *Якщо компактний топологічний простір задовольняє першій аксіомі зліченності, то він секвенційно компактний.*

Доведення. Отже, нехай простір X компактний та задовольняє першій аксіомі зліченності. Розглянемо довільну послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Якщо множина A її значень скінченна, то існує постійна підпослідовність $\{x_{n_k} = x\}_{k=1}^{\infty}$, що, очевидно, збігається до x. У іншому випадку, в силу компактності X та твердження 21.1, у A існує точка накопичення $x \in X$.

Нехай тепер $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ – не більш ніж зліченна база в x. Далі діємо як у доведенні твердження 13.1: покладемо $V_k \coloneqq \bigcap\limits_{n=1}^{k} U_n$ для усіх $k \in \mathbb{N}$, тоді $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ – не більш ніж зліченна база в x, що утворює незростаючу послідовність відкритих околів x. Оскільки x – точка накопичення A, для будь-якого натурального k окіл V_k містить нескінченну кількість точок послідовності $\{x_n\}$. Тому можна побудувати підпослідовність, обравши для кожного $k \in \mathbb{N}$ індекс n_k так, що $x_{n_k} \in V_k$ і $n_k < n_{k+1}$. Аналогічно до доведення твердження 13.1 встановлюємо, що тоді $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$.

$\blacksquare$

Твердження 21.4. *Якщо секвенційно компактний топологічний простір задовольняє другій аксіомі зліченності, то він компактний.*

Доведення. Отже, розглянемо простір X, що є секвенційно компактним та задовольняє другій аксіомі зліченності, і нехай $\mathcal{U}$ – деяке його відкрите покриття. За теоремою Ліндельофа у $\mathcal{U}$ існує не більш ніж зліченне підпокриття $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$. Покладемо $V_k \coloneqq \bigcup\limits_{n=1}^{k} U_n$ для кожного $k \in \mathbb{N}$, тоді $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ – не більш ніж зліченне відкрите покриття X, що утворює неспадаючу послідовність:

$$V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_k \subset V_{k+1} \subset \ldots \subset X.$$

Щоб показати компактність X, достатньо довести, що існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що $X = V_k = \bigcup\limits_{n=1}^{k} U_n$. Дійсно, у цьому випадку $\{U_n\}_{n=1}^{k}$ буде скінченним підпокриттям $\mathcal{U}$.

Припустимо, що це не так, тобто $V_k \neq X$ для будь-якого натурального k: існує $x_k \in X$ така, що $x_k \notin V_k$. Отримали послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. В силу секвенційної компактності, у неї існує підпослідовність $\{x_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$, що збігається до деякої $x \in X$. Оскільки $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ є покриттям X, існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що $x \in V_m$, тобто V_m – відкритий окіл x. Тоді, оскільки $x_{k_l} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} x$, існує натуральне L таке, що $x_{k_l} \in V_m$ для будь-якого $l \geqslant L$. При цьому, оскільки $\{x_{k_l}\}$ – підпослідовність $\{x_k\}$, існує $l \geqslant L$ таке, що $k_l \geqslant m$. Тоді $x_{k_l} \in V_m \subset V_{k_l}$, що неможливо за побудовою $\{x_k\}$.

■

Вправа 21.1. Показати, що аксіоми зліченності у попередніх двох твердженнях суттєві, навівши відповідні контрприклади (див. [18, с. 68-70, 125-126]).

Наслідок 21.1. *Підмножина простору, що задовольняє другій аксіомі зліченності, компактна тоді й тільки тоді, коли вона секвенційно компактна.*

Доведення. Це безпосередньо випливає з двох попередніх тверджень, бо друга аксіома зліченності наслідується при переході до підпростору, а перша – випливає з другої.

■

22 Компактність у метричному просторі

Компактні підмножини метричних просторів є важливим предметом вивчення в аналізі. Їм буде присвячена, зокрема, частина курсу функціонального аналіза (див., наприклад, [6]). Тут ми наведемо лише деякі найважливіші поняття і факти, що стосуються таких множин. Перш за все, закінчимо з секвенційною компактністю.

Вправа 22.1. Показати, що секвенційно компактний метричний простір сепарабельний. Підказка: показати спочатку, що з секвенційної компактності метричного простору (X, ρ) випливає існування для будь-якого

$\varepsilon > 0$ скінченної $A \subset X$ такої, що $\rho(x, A) < \varepsilon$ для кожної $x \in X$ (такі множини A звуть *ε-сітками*).

Теорема 22.1 (Секвенційний критерій компактності)**.** *Підмножина метричного простору компактна тоді й тільки тоді, коли вона секвенційно компактна.*

Доведення. Отже, нехай $K \subset X$ – підмножина метричного простору. Зауважимо, що індукована топологія на ній є метричною в силу вправи 9.2.

$\underline{\Rightarrow}$ Якщо K компактна, то вона секвенційно компактна в силу твердження 21.3, бо усі метричні простори задовольняють першій аксіомі зліченності за твердженням 8.3.

$\underline{\Leftarrow}$ Якщо K секвенційно компактна, то вона сепарабельна за попередньою вправою, а отже задовольняє другій аксіомі зліченності згідно з твердженням 11.2. Тоді вона компактна в силу твердження 21.4.

■

Зауваження. Інколи (наприклад, у [2]) секвенційна компактність підмножини $K \subset X$ визначається дещо по-іншому: у будь-якої послідовності в K існує підпослідовність, що має границю в X (яка необов'язково належить до K). Ця умова слабша за умову означення 21.2. Формулювання попередньої теореми тоді набуває наступного вигляду: підмножина метричного простору компактна тоді й тільки тоді, коли вона секвенційно компактна і замкнена (див. [2, с.137-138]). Дійсно, будь-яка компактна K, як ми встановили, секвенційно компактна у сенсі означення 21.2, а отже і в сенсі слабшого означення. Вона замкнена в силу твердження 20.5 (див. також доведення теореми 22.2 нижче). З іншого боку, якщо у будь-якої послідовності в замкненій K існує підпослідовність з границею $x \in X$, то x належить до секвенційного замикання K, а отже, згідно з твердженням 13.2, і до $\overline{K} = K$, і ця підпослідовність збігається до x в K (чому?). Тому K секвенційно компактна у сенсі означення 21.2, а отже, як ми показали, компактна.

Означення 22.1. Підмножина $A \subset X$ метричного простору зветься *обмеженою*, якщо вона міститься в деякій кулі: існують $x \in X$ і $\varepsilon > 0$ такі, що $A \subset B_\varepsilon(x)$.

Твердження 22.1. *Будь-яка компактна підмножина метричного простору обмежена.*

Доведення. Отже, нехай (X, ρ) – метричний простір, а $K \subset X$ компактна. Тоді K секвенційно компактна за теоремою 22.1. Припустимо, що K необмежена. Зафіксуємо довільну точку $x_0 \in X$. Оскільки не існує кулі $B_\varepsilon(x_0)$, що містить K, для будь-якого натурального n існує $x_n \in K \cap (X \setminus B_n(x_0))$. Таким чином отримуємо послідовність $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset K$. В силу секвенційної компактності K, у неї існує підпослідовність $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ з границею x. Зокрема, існує натуральне k_0 таке, що $x_{n_k} \in B_1(x) \subset B_{\rho(x,x_0)+1}(x_0)$ для будь-якого $k \geqslant k_0$ (тут включення куль є простим наслідком нерівності трикутника). Для достатньо великих $k \geqslant k_0$ матимемо $n_k \geqslant \rho(x,x_0)+1$, тому $x_{n_k} \in B_{\rho(x,x_0)+1}(x_0) \subset B_{n_k}(x_0)$, що суперечить вибору x_{n_k}. Таким чином, K обмежена.

■

Теорема 22.2 (Критерій компактності підмножин евклідового простору)**.** *Підмножина простору $\mathbb{R}^n$ (зі стандартною топологією) компактна тоді й тільки тоді, коли вона обмежена і замкнена.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай $K \subset \mathbb{R}^n$ компактна. Тоді вона обмежена в силу попереднього твердження і замкнена в силу твердження 20.5, оскільки всі метричні простори нормальні за твердженням 19.6, зокрема хаусдорфові.

$\underline{\Leftarrow}$ Тепер нехай $K \subset \mathbb{R}^n$ обмежена і замкнена. За означенням обмеженості, існують $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ і $\varepsilon > 0$ такі, що $K \subset B_\varepsilon(x) \subset D_\varepsilon(x) = \prod\limits_{i=1}^n [x^i - \varepsilon, x^i + \varepsilon]$, де кулі розглядаємо у метриці ρ_∞. Оскільки куб $D_\varepsilon(x)$ компактний згідно з прикладом 20.7, а K – його замкнена (і в індукованій топології куба також) підмножина, K компактна за твердженням 20.4 в індукованій топології куба, а отже й у $\mathbb{R}^n$ за вправою 20.1.

■

Приклад 22.1. Стандартна n-вимірна сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, очевидно, обмежена і замкнена, тому компактна. А отже й проєктивний простір $\mathbb{R}P^n \cong S^n/_{\mathbb{Z}_2}$ (див. приклад 18.5) компактний згідно з наслідками 20.1 і 20.2.

Зауваження. У попередній теоремі необхідність виконується для будь-якого метричного простору, а специфічною для $\mathbb{R}^n$ є саме достатність: будь-яка обмежена замкнена підмножина є компактною. Ця властивість (що інколи зветься *обмеженою компактністю* або *властивістю Гейне – Бореля*) вірна також для компактних метричних просторів (в силу твердження 20.4), але невірна в загальному випадку. Наприклад, $K = X = (0, 1)$ з евклідовою метрикою обмежена і замкнена (в собі), але не є компактною.

Вправа 22.2. Показати, що будь-який обмежено компактний (зокрема компактний) метричний простір є повним.

Вправа 22.3. Показати, що повний метричний простір (X, ρ) компактний тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує компакт $K \subset X$ такий, що $\rho(x, K) < \varepsilon$ для будь-якої $x \in X$ (компактна ε-сітка).

Теорема 22.3 (Веєрштрасс)**.** *Нехай топологічний простір X компактний, а функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ неперервна. Тоді f обмежена і приймає на X свої найменше та найбільше значення.*

Доведення. В силу твердження 20.3, $f(X)$ компактна у $\mathbb{R}$ як неперервний образ компактного простору. Тоді $f(X)$ обмежена і замкнена в силу теореми 22.2. З її обмеженості випливає, що функція f обмежена на X, а з замкненості – що $\overline{f(X)} = f(X)$. Крім того, оскільки $f(X)$ обмежена, $m \coloneqq \inf f(X) > -\infty$ і $M \coloneqq \sup f(X) < +\infty$. За означеннями інфімума і супремума, m і M належать до $\overline{f(X)} = f(X)$ (бо в кожному їх ε-околі є точка $f(X)$), тобто функція f приймає на X своє найменше значення m і найбільше M.

■

Означення 22.2. Нехай (X, ρ) – метричний простір. *Діаметром* підмножини $A \subset X$ називається

$$\operatorname{diam} A \coloneqq \sup\{\rho(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Вправа 22.4. Показати, що множина обмежена тоді й тільки тоді, коли її діаметр скінченний. Як він пов'язаний із радіусом кулі з означення обмеженості?

Теорема 22.4 (Лема Лебега)**.** *Нехай $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – відкрите покриття компактного метричного простору X. Тоді існує таке $\delta > 0$, що якщо діаметр підмножини $B \subset X$ менший за δ, то B міститься в одній з множин покриття: існує індекс $\alpha \in A$ такий, що $B \subset U_\alpha$.*

Доведення. Визначимо функцію $f\colon X \to \mathbb{R}$ на даному метричному просторі (X, ρ) умовою

$$f(x) \coloneqq \sup\{\varepsilon > 0 \mid \exists\, \alpha \in A\colon B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha\}.$$

для кожного $x \in X$. Зауважимо, що $f > 0$. Дійсно, для будь-якого $x \in X$ існує $\alpha \in A$ таке, що $x \in U_\alpha$ (бо $\mathcal{U}$ – покриття), і, оскільки U_α відкрита, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$, тому $f(x) \geqslant \varepsilon > 0$.

Покажемо, що f ліпшицева. Дійсно, нехай $x, y \in X$. Розглянемо довільне $\varepsilon > 0$, для якого існує $\alpha \in A$ таке, що $B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$. Якщо $y \notin B_\varepsilon(x)$, тобто $\rho(x, y) \geqslant \varepsilon$, то $f(y) > 0 \geqslant \varepsilon - \rho(x, y)$. Якщо ж $y \in B_\varepsilon(x)$, то

$B_{\varepsilon-\rho(x,y)}(y) \subset B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$ за нерівністю трикутника, тому $f(y) \geqslant \varepsilon - \rho(x,y)$ за побудовою функції f. Отже, в будь-якому разі $\varepsilon \leqslant f(y)+\rho(x,y)$. У цій нерівності перейдемо до супремума за $\varepsilon > 0$, для яких таке α існує, і отримаємо $f(x) \leqslant f(y)+\rho(x,y)$. Тобто $f(x) - f(y) \leqslant \rho(x,y)$. Помінявши місцями x і y, отримаємо $f(y)-f(x) \leqslant \rho(x,y)$, отже $|f(x)-f(y)| \leqslant \rho(x,y)$. Це й означає ліпшицевість f. Звідси випливає, що f неперервна на X.

В силу компактності X і теореми Веєрштрасса, f приймає на X своє найменше значення. Нехай це $2\delta = \min\limits_{x \in X} f(x) = f(x_0) > 0$. Тепер нехай $B \subset X$ така, що $\operatorname{diam} B < \delta$, і $x \in B$ – якась її точка. Тоді $f(x) \geqslant 2\delta > \delta$, тому за означенням супремума існує $\alpha \in A$ такий, що $B_\delta(x) \subset U_\alpha$. Крім того, $B \subset B_\delta(x) \subset U_\alpha$ за означенням діаметра (дійсно, $\rho(x,y) \leqslant \operatorname{diam} B < \delta$ для будь-якої $y \in B$), що й потрібно було показати.

■

Означення 22.3. Число δ з формулювання леми Лебега називають *числом Лебега* покриття $\mathcal{U}$.

Зауваження. Це число, звичайно, визначене неоднозначно: якщо δ – число Лебега $\mathcal{U}$, то й будь-яке не більше за δ додатне значення буде числом Лебега цього покриття.

23 Зв'язність

Неформально кажучи, зв'язність – це властивість простору "складатися з одного шматка". Вона теж є важливим топологічним інваріантом. Простіше спочатку визначити, які простори <u>не</u> є зв'язними:

Означення 23.1. Топологічний простір X зветься *незв'язним*, якщо існують непорожні відкриті $U, V \subset X$ такі, що $U \cap V = \varnothing$ і $X = U \cup V$; і *зв'язним* у протилежному випадку. Підмножина топологічного простору зветься *незв'язною* (відповідно, *зв'язною*), якщо вона є незв'язним (зв'язним) простором в індукованій топології.

Твердження 23.1. *Множина A у топологічному просторі X незв'язна тоді й тільки тоді, коли існують відкриті $U, V \subset X$ такі, що $A \cap U \neq \varnothing$, $A \cap V \neq \varnothing$, $A \cap U \cap V = \varnothing$ і $A \subset U \cup V$.*

Доведення. Дійсно, за побудовою індукованої топології, будь-які дві відкриті підмножини $A \subset X$ як топологічного простору мають вигляд $A \cap U$ і $A \cap V$ для деяких відкритих $U, V \subset X$. Записуючи для них умови з означення незв'язності, отримаємо умови нашого твердження.

■

Означення 23.2. Підмножина топологічного простору називається *відкритозамкненою*, якщо вона одночасно відкрита і замкнена.

Зауваження. Англійською це буде *clopen*. Звичайно, такі множини не є для нас новими. Зокрема, у кожному просторі до відкритозамкнених множин відносяться порожня і сам простір. Зауважимо також, що доповнення до відкритозамкненої множини теж відкритозамкнене.

Твердження 23.2. *Топологічний простір X зв'язний тоді й тільки тоді, коли відкритозамкненими множинами в X є лише $\varnothing$ та X.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Нехай X зв'язний, а $U \subset X$ відкритозамкнена, тобто U та $X \setminus U$ – відкриті. Тоді $X = U \cup (X \setminus U)$, $U \cap (X \setminus U) = \varnothing$. Тому якщо U та $X \setminus U$ були б непорожніми, X був би незв'язним. Отже або $U = \varnothing$, або $X \setminus U = \varnothing$ і тому $U = X$.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай тепер відкритозамкненими множинами в X є лише $\varnothing$ та X. Припустимо, що X незв'язний, тобто у ньому існують непорожні відкриті U і V такі, що $U \cap V = \varnothing$ та $X = U \cup V$. Тоді $U = X \setminus V$ замкнена (а отже відкритозамкнена), при цьому $U \neq \varnothing$ і $U \neq X$ (бо $V \neq \varnothing$), протиріччя. Таким чином, X зв'язний.

■

Приклад 23.1. Порожня множина та одноточкові підмножини зв'язні у будь-якому просторі з тривіальних причин: їх не можна розділити на дві непорожні підмножини.

Приклад 23.2. У просторі з антидискретною топологією існує лише одна непорожня відкрита підмножина – сам простір, тому всі його підмножини зв'язні.

Приклад 23.3. У прямій з топологією напівнескінченних інтервалів усі підмножини зв'язні. Дійсно, нехай $A \subset \mathbb{R}$ і $A \cap U \cap V = \varnothing$ для деяких відкритих $U, V \subset \mathbb{R}$. Оскільки U і V – інтервали вигляду $(a, +\infty)$, один з них міститься в іншому, нехай для визначеності $U \subset V$. Тоді $A \cap U = A \cap U \cap V = \varnothing$. Тому A зв'язна згідно з твердженням 23.1.

Вправа 23.1. Показати, що у нескінченному просторі з кофінітною топологією підмножина є зв'язною тоді й тільки тоді, коли вона порожня, одноточкова або нескінченна.

Приклад 23.4. У просторі з дискретною топологією (і в будь-якій його підмножині) усі підмножини відкритозамкнені. Тому, в силу твердження 23.2, зв'язними у ньому є лише $\varnothing$ і одноточкові підмножини.

Приклад 23.5. У прямій Зоргенфрея зв'язними теж є лише $\varnothing$ і одноточкові підмножини. Дійсно, нехай $A \subset \mathbb{R}$ містить хоча б дві різні точки $x, y \in A$, $x < y$. Тоді існує $a \in (x, y)$, й відкриті (в топології Зоргенфрея) множини $U = (-\infty, a)$ і $V = [a, +\infty)$ задовольняють умові твердження 23.1, отже A незв'язна.

Приклад 23.6. Для $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією ми дамо повний опис зв'язних підмножин. Почнемо з того, що відрізки зв'язні:

Твердження 23.3. *Будь-який відрізок $[a, b]$ у дійсній прямій зі стандартною топологією є зв'язним.*

Доведення. Тут вважаємо, що $a < b$ (інакше матимемо тривіальний випадок одноточкової множини). Нехай якась непорожня підмножина $U \subset [a, b]$ є відкритозамкненою в індукованій топології. В силу твердження 23.2, достатньо довести, що тоді $U = [a, b]$. Можемо вважати, що $a \in U$, бо у іншому випадку $\widehat{U} \coloneqq [a, b] \setminus U$ теж відкритозамкнена, і $a \in \widehat{U}$. Замінивши у подальшому доведенні U на $\widehat{U}$, отримаємо, що $\widehat{U} = [a, b]$, тому $U = \varnothing$, протиріччя.

Оскільки U відкрита і $a \in U$, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $[a, a + \varepsilon) \subset U$. Покладемо

$$c \coloneqq \sup\{d \mid [a, d) \subset U\},$$

тоді $c \geqslant a + \varepsilon > a$. Для будь-якого $e \in [a, c)$ за означенням супремума існує $d \in (e, c)$ таке, що $[a, d) \subset U$, тому $e \in [a, d) \subset U$. Таким чином, $[a, c) \subset U$, отже $[a, c] = \overline{[a, c)} \subset \overline{U} = U$ в силу монотонності замикання і замкненості U. Припустимо, що $c < b$, тоді, оскільки U відкрита і $c \in U$, існує $\delta > 0$ таке, що $(c - \delta, c + \delta) \subset U$. Отримуємо, що $[a, c + \delta) \subset U$, що суперечить вибору c. Отже, $c = b$, тобто $U = [a, b]$.

∎

Зауваження. Коли у цьому доведенні ми використовували монотонність замикання, малися на увазі замикання в індукованій топології $[a, b]$, але вони співпадають з перетинами замикань відповідних множин у $\mathbb{R}$ з $[a, b]$ (чому?). Аналогічні зауваження матимуть місце і для подальших доведень у цьому розділі. Далі наведемо декілька корисних достатніх умов зв'язності підмножин, проілюструвавши їх прикладами.

Означення 23.3. Будемо казати, що підмножини A і B топологічного простору *розділені*, якщо $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$.

Вправа 23.2. Показати, що простір X є незв'язним тоді й тільки тоді, коли існують непорожні розділені $A, B \subset X$ такі, що $X = A \cup B$.

Твердження 23.4. *Нехай* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *– сукупність зв'язних підмножин топологічного простору та існує індекс* $\lambda_0 \in \Lambda$ *такий, що* A_{λ_0} *і* A_λ *не розділені для будь-якого* $\lambda \in \Lambda$. *Тоді об'єднання* $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ *цих множин є зв'язним.*

Доведення. Тут також будемо використовувати твердження 23.2. Нехай непорожня $U \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ відкритозамкнена в індукованій топології. Можемо вважати, що $U \cap A_{\lambda_0} \neq \varnothing$, інакше перейдемо до доповнення, як у попередньому доведенні. Перетин $U \cap A_{\lambda_0}$ є відкритозамкненим в індукованій топології A_{λ_0}, отже, оскільки A_{λ_0} зв'язна, $U \cap A_{\lambda_0} = A_{\lambda_0}$, тобто $A_{\lambda_0} \subset U$. Розглянемо довільний індекс $\lambda \in \Lambda$. За умовою тоді $\overline{A_{\lambda_0}} \cap A_\lambda \neq \varnothing$ або $A_{\lambda_0} \cap \overline{A_\lambda} \neq \varnothing$. У першому з цих випадків, оскільки $\overline{A_{\lambda_0}} \subset \overline{U} = U$ за монотонністю замикання та замкненістю U, $U \cap A_\lambda \neq \varnothing$. У другому випадку існує $x \in A_{\lambda_0} \cap \overline{A_\lambda}$, тоді, оскільки U – відкритий окіл x, $U \cap A_\lambda \neq \varnothing$. Тоді в будь-якому разі $A_\lambda \subset U$ аналогічно до випадку A_{λ_0}. Отже, $U = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Це й доводить зв'язність цього об'єднання.

■

Зауваження. Нагадаємо, що підмножина $A \subset \mathbb{R}$ є *проміжком*, якщо відрізок $[x, y] \subset A$ для будь-яких $x, y \in A$, $x \leqslant y$. До проміжків відносяться $\varnothing$, усі відрізки (зокрема одноточкові множини $\{a\} = [a, a]$), інтервали (скінченні, напівнескінченні та $\mathbb{R}$) і напівінтервали (скінченні та напівнескінченні). Жодна інша підмножина $\mathbb{R}$ не є проміжком.

Теорема 23.1 (Опис зв'язних підмножин прямої)**.** *Підмножина дійсної прямої зі стандартною топологією є зв'язною тоді й тільки тоді, коли це проміжок.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай $A \subset \mathbb{R}$ зв'язна. Припустимо, що це не проміжок, тобто існують $x, y \in A$, $x \leqslant y$ такі, що відрізок $[x, y] \not\subset A$: існує $a \in [x, y] \setminus A$ (очевидно, $a \in (x, y)$). Тоді відкриті підмножини прямої $U = (-\infty, a)$ і $V = (a, +\infty)$ задовольняють умові твердження 23.1, тобто A незв'язна, протиріччя.

$\underline{\Leftarrow}$ Ми вже знаємо, що зв'язними є $\varnothing$, одноточкові множини (приклад 23.1) й відрізки (за твердженням 23.3). Решта проміжків може бути представлена у вигляді об'єднання відрізків, що має загальну точку, наприклад, $(a, b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [a + \frac{b-a}{2^n}, b - \frac{b-a}{2^n}]$. В силу твердження 23.4, де у якості A_{λ_0} можна взяти спільну одноточкову підмножину $\{\frac{a+b}{2}\}$, це об'єднання зв'язне. Аналогічно для інших типів проміжків (перевірте це).

■

Твердження 23.5. *Якщо A і B – підмножини топологічного простору, A зв'язна і $A \subset B \subset \overline{A}$, то B зв'язна.*

Доведення. Представимо B у вигляді об'єднання:

$$B = A \cup \left(\bigcup_{x \in B} \{x\} \right).$$

Для будь-якої $x \in B$ множина A не розділена з $\{x\}$, бо $x \in \overline{A}$. Тому це об'єднання задовольняє умові твердження 23.4 і є таким чином зв'язним.

■

Наслідок 23.1. *Нехай A – підмножина топологічного простору X.*

1. *Якщо A зв'язна, то її замикання $\overline{A}$ зв'язне.*

2. *Якщо A зв'язна і всюди щільна, то X зв'язний.*

Твердження 23.6. *Нехай X – топологічний простір, у якому існує точка $x \in X$ з наступною властивістю: для будь-якої $y \in X$ існує зв'язна $A_{xy} \subset X$ така, що $x, y \in A_{xy}$. Тоді X зв'язний.*

Доведення. Це також простий наслідок твердження 23.4: за умовою

$$X = \{x\} \cup \left(\bigcup_{y \in X} A_{xy} \right),$$

й $\{x\} \subset A_{xy}$ для кожної $y \in X$.

■

Зауваження. Попереднє твердження часто використовують у більш слабкій формі: якщо для будь-яких двох точок $x, y \in X$ існує зв'язна $A_{xy} \subset X$ така, що $x, y \in A_{xy}$, то X зв'язний.

Твердження 23.7. *Нехай $f\colon X \to Y$ – неперервне відображення топологічних просторів, а X зв'язний. Тоді $f(X) \subset Y$ зв'язна.*

Доведення. Якщо $f(X)$ незв'язна, то згідно з твердженням 23.1 існують відкриті $U, V \subset Y$ такі, що $f(X) \cap U \neq \varnothing$, $f(X) \cap V \neq \varnothing$, $f(X) \cap U \cap V = \varnothing$, і $f(X) \subset U \cup V$. Тоді $f^{-1}(U)$ і $f^{-1}(V)$ – відкриті в X за неперервністю f, непорожні, і $X = f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(V)$, тобто X незв'язний.

■

Аналогічно до компактності, звідси випливають наступні наслідки:

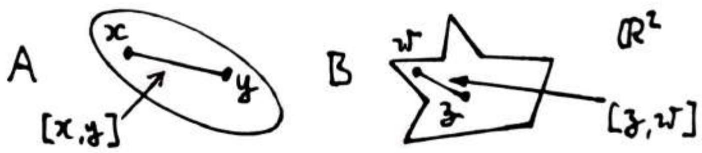
Наслідок 23.2. *Зв'язність є топологічним інваріантом.*

Наслідок 23.3. *Факторпростір зв'язного простору (за відношенням еквівалентності) є зв'язним.*

Нагадаємо деякі поняття геометрії $\mathbb{R}^n$:

Означення 23.4. *Відрізком* з кінцями в точках x та y з $\mathbb{R}^n$ зветься підмножина
$$[x, y] \coloneqq \{(1-t)\,x + t\,y \mid t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^n.$$
Підмножина $A \subset \mathbb{R}^n$ зветься *опуклою*, якщо для будь-яких $x, y \in A$ відрізок $[x, y] \subset A$; й *зірчатою* відносно точки $x \in A$, якщо для будь-якої $y \in A$ відрізок $[x, y] \subset A$.

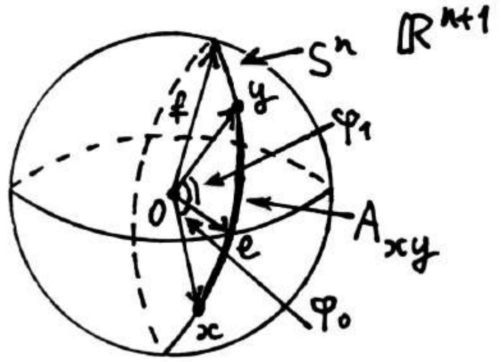
Зауваження. Очевидно, опуклі множини є зірчатими, але, взагалі кажучи, не навпаки, як показано на наступній ілюстрації. При $n = 1$ (тобто для прямої) опуклі підмножини – це в точності проміжки.



Приклад 23.7. Будь-який відрізок у $\mathbb{R}^n$ є зв'язним за твердженнями 23.3 і 23.7, бо має вигляд $[x, y] = f([0, 1])$, де відображення $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, що визначене умовою $f(t) = (1-t)\,x + t\,y$, задається лінійними функціями, а отже є неперервним (насправді це гомеоморфізм $[0, 1]$ та $[x, y]$ – перевірте це). Тому будь-яка $A \subset \mathbb{R}^n$, що є зірчатою відносно $x \in A$, (зокрема, будь-яка опукла A) буде зв'язною за твердженням 23.6: достатньо взяти $A_{xy} = [x, y]$.

Приклад 23.8. Аналогічно за допомогою твердження 23.6 можна показати, що n-вимірна сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ зв'язна для $n \geqslant 1$: для будь-яких $x, y \in S^n$ візьмемо у якості A_{xy} будь-яку дугу великого кола (тобто кола, що є перетином S^n з двовимірною площиною, яка проходить через початок координат), що з'єднує x та y. Дійсно, якщо $x = \cos\varphi_0\, e + \sin\varphi_0\, f$, а $y = \cos\varphi_1\, e + \sin\varphi_1\, f$ для деякого ортонормованого базиса $\{e, f\}$ площини, що проходить через початок координат, x та y (див. рисунок нижче), то визначимо $g\colon [0, 1] \to S^n$ умовою
$$g\colon t \mapsto \cos\left((1-t)\,\varphi_0 + t\,\varphi_1\right)\, e + \sin\left((1-t)\,\varphi_0 + t\,\varphi_1\right)\, f.$$

Тоді g неперервне як обмеження відображення $[0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ з неперервними координатними функціями, а тому дуга $A_{xy} \coloneqq g([0,1])$ ("криволінійний відрізок") зв'язна за твердженнями 23.3 і 23.7 (і знову ж g буде гомеоморфізмом $[0,1]$ і A_{xy}).



У свою чергу, проєктивний простір $\mathbb{R}P^n \cong S^n/_{\mathbb{Z}_2}$ буде тоді зв'язним згідно з наслідками 23.2 і 23.3.

Зауваження. Для доведення негомеоморфності, окрім безпосередньої перевірки зв'язності, буває корисно подивитися на те, що відбувається з просторами, коли ми викидаємо з них точки.

Приклад 23.9. Проміжки $[a,b)$ і (c,d) обидва зв'язні за теоремою 23.1. Тим не менш, вони негомеоморфні. Дійсно, припустимо, що існує гомеоморфізм $f\colon [a,b) \to (c,d)$. Викинемо з $[a,b)$ точку a і обмежимо f на підмножину $[a,b) \setminus \{a\} = (a,b)$, що переходить у $(c,d) \setminus \{f(a)\}$. Тоді обмеження $f|_{(a,b)}\colon (a,b) \to (c,d) \setminus \{f(a)\}$ теж має бути гомеоморфізмом за наслідком 14.1. Але за теоремою 23.1 перша з цих множин зв'язна, а друга – ні, бо $f(a)$ є внутрішньою точкою (c,d), протиріччя.

Вправа 23.3. За допомогою зв'язності показати, що будь-який відрізок $[a,b]$ не гомеоморфний жодному інтервалу (c,d) або напівінтервалу $[c,d)$ (у розділі 20 це було зроблено за допомогою компактності).

Приклад 23.10. Аналогічно доводиться негомеоморфність будь-якого проміжка $A \subset \mathbb{R}$, що складається більш ніж з однієї точки, і S^1, що теж, як ми встановили, обидва зв'язні. Дійсно, у іншому випадку були б гомеоморфні $A \setminus \{a\}$ і $S^1 \setminus \{f(a)\}$, де $a \in A$ – якась внутрішня точка, а f – деякий гомеоморфізм. Але перша з цих множин незв'язна (не проміжок), а друга зв'язна (аналогічно прикладу 23.8, де дуги тепер проводимо так, щоб вони не проходили через $f(a)$, або просто помітимо, що $S^1 \setminus \{f(a)\} \cong \mathbb{R}$, де гомеоморфізмом буде стереографічна проєкція).

Приклад 23.11. Таким же способом доводиться, що $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$: у іншому випадку незв'язна $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ була б гомеоморфною до $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ для деякого гомеоморфізма f. Хоча друга з цих множин і не є опуклою або зірчатою, її зв'язність неважко встановити аналогічно до прикладу 23.7: будь-які дві точки можна з'єднати або відрізком, або, якщо цьому заважає точка $f(0)$, дугою кола. Також можна показати, що $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$ (зробіть це) і використати зв'язність S^{n-1} (приклад 23.8), зв'язність $\mathbb{R}$ та наступну теорему:

Теорема 23.2 (Зв'язність прямого добутку)**.** *Прямий добуток топологічних просторів $X \times Y$ зв'язний тоді й тільки тоді, коли простори X та Y зв'язні.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Якщо $X \times Y$ зв'язний, то $X = p_X(X \times Y)$ та $Y = p_Y(X \times Y)$ зв'язні в силу твердження 23.7, бо канонічні проєкції p_X і p_Y неперервні згідно з пунктом 1. твердження 15.2.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай тепер X та Y зв'язні. Представимо їхній добуток у вигляді об'єднання:

$$X \times Y = X \times \{y\} \cup \left(\bigcup_{x \in X} \{x\} \times Y \right),$$

обравши якусь $y \in Y$. Всі ці множини гомеоморфні X або Y в силу пункта 4. твердження 15.2, а отже зв'язні за наслідком 23.2. При цьому перетин $(\{x\} \times Y) \cap (X \times \{y\}) = \{(x, y)\}$ непорожній для будь-якої $x \in X$. Тому $X \times Y$ зв'язний в силу твердження 23.4.

■

Зауваження. Як і аналогічна теорема про компактність, це узагальнюється за індукцією: добуток просторів $X_1 \times \ldots \times X_n$ зв'язний тоді й тільки тоді, коли $X_1, \ldots, X_n$ зв'язні.

Приклад 23.12. В силу цієї теореми, різноманітні паралелепіпеди $A^1 \times \ldots \times A^n$, де $A^i \subset \mathbb{R}$ – проміжок для кожного i, (наприклад, замкнений куб $[0,1]^n \coloneqq \underbrace{[0,1] \times \ldots \times [0,1]}_{n}$) зв'язні в $\mathbb{R}^n$.

Приклад 23.13. Аналогічно, n-вимірний тор $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ зв'язний, бо коло S^1 зв'язне (приклад 23.8).

24 Зв'язні компоненти

Інтуїтивне уявлення про "шматки", на які розпадається незв'язний простір, формалізоване у наступному означенні:

Означення 24.1. Підмножина топологічного простору називається його *зв'язною компонентою* (або *компонентою зв'язності*), якщо вона є максимальною за включенням зв'язною підмножиною.

Зауваження. Тобто $A \subset X$ є компонентою зв'язності простору X, якщо A зв'язна, і для будь-якої зв'язної $B \subset X$ з $A \subset B$ випливає $A = B$. Зауважимо, що X зв'язний тоді й тільки тоді, коли є своєю єдиною зв'язною компонентою. Дійсно, якщо X зв'язний, то він задовольняє означенню зв'язної компоненти, а будь-яка менша підмножина $A \subset X$, $A \neq X$ – ні, що доводить необхідність, а достатність очевидна. Це спостереження є частковим випадком наступного загального твердження:

Твердження 24.1 (Властивості зв'язних компонент)**.** *Нехай X – топологічний простір.*

1. *Для будь-якої $x \in X$ існує єдина зв'язна компонента A_x простору X, що містить x.*

2. *Для будь-яких $x, y \in X$ або $A_x = A_y$, або $A_x \cap A_y = \varnothing$.*

3. *Зв'язні компоненти X замкнені (а якщо попарно різних зв'язних компонент скінченна кількість, то й відкриті).*

Доведення.

1. Спочатку перевіримо єдиність. Нехай $x \in A \cap B$, де A і B – зв'язні компоненти X. Тоді $A \cup B$ зв'язна за твердженням 23.4, $A \subset A \cup B$ і $B \subset A \cup B$, тому за властивістю максимальності $A = A \cup B = B$.

   Щоб показати існування, визначимо A_x як об'єднання усіх зв'язних $A \subset X$, що містять x. Зауважимо, що серед цих множин є одноточкова $\{x\}$, що міститься в усіх інших, тому A_x зв'язна за твердженням 23.4. При цьому якщо $A \subset X$ зв'язна і $A_x \subset A$, то $x \in A$, тому A є елементом об'єднання A_x: $A \subset A_x$, отже $A = A_x$.

2. Аналогічно до доведення єдиності в попередньому пункті, якщо $A_x \cap A_y \neq \varnothing$, то $A_x \cup A_y$ зв'язна за твердженням 23.4 і містить в собі A_x та A_y, тому в силу максимальності $A_x = A_x \cup A_y = A_y$.

3. Якщо A – зв'язна компонента X, то її замикання $\overline{A}$ зв'язне за наслідком 23.1, і $A \subset \overline{A}$, тому в силу максимальності $\overline{A} = A$, тобто A замкнена. Якщо у X скінченна кількість попарно різних зв'язних компонент, то, в силу попередніх двох пунктів, доповненням до A

буде об'єднання усіх інших зв'язних компонент, що замкнене як скінченне об'єднання замкнених множин, отже A відкрита.

■

Зауваження. З конструкції у доведенні пункта 1. випливає, що A_x – це найбільша за включенням зв'язна підмножина X, що містить x (аналогічно, наприклад, до характеризації внутрішності в пункті 2. твердження 10.1). Пункти 1. і 2. означають, що X є диз'юнктним об'єднанням своїх попарно різних зв'язних компонент (аналогічно до доведення теореми 1.1). Якщо це об'єднання скінченне, то зв'язні компоненти відкритозамкнені в силу пункта 3. Зауважимо також, що зв'язні компоненти непорожнього простору непорожні (чому?).

Приклад 24.1. Нехай, навпаки, дано, що $X = \bigsqcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ – диз'юнктне об'єднання непорожніх відкритозамкнених зв'язних підмножин (наприклад, проміжків дійсної прямої). Зауважимо, що у випадку скінченної кількості цих множин умова відкритозамкненості кожної з A_λ тут еквівалентна тому, що A_λ попарно розділені (перевірте це твердження, що фактично є узагальненням вправи 23.2). Тоді зв'язними компонентами X будуть в точності підмножини A_λ. Дійсно, за умовою A_λ зв'язна для кожного λ. Нехай $A \subset X$ зв'язна і $A_\lambda \subset A$. Припустимо, що $A_\lambda \neq A$. Тоді $A_\mu \cap A \neq \varnothing$ для деякого $\mu \neq \lambda$, тому $U = A_\lambda$ і $V = \bigcup\limits_{\mu\neq\lambda} A_\mu$ задовольняють умові твердження 23.1 для множини A, що суперечить її зв'язності, отже $A_\lambda = A$. Таким чином, усі A_λ дійсно є зв'язними компонентами X. Якщо ж зв'язна $A \subset X$ не збігається з жодною з A_λ, то або вона перетинається з двома різними A_λ і A_μ, $\lambda \neq \mu$, що суперечило б зв'язності A, як вище, або $A \subset A_\lambda$ для деякого λ, і тому A не є максимальною за включенням серед зв'язних. Отже, A не є зв'язною компонентою простору X.

Приклад 24.2. Зв'язними компонентами простору з дискретною топологією є усі його одноточкові підмножини, бо будь-яка більша підмножина незв'язна (див. приклад 23.4). Вони усі відкритозамкнені.

Приклад 24.3. Зв'язними компонентами множини раціональних чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ теж є її одноточкові підмножини (перевірте це), кожна з яких є замкненою (бо $\mathbb{Q}$ наслідує з $\mathbb{R}$ аксіому T_1), але не відкритою (бо за властивістю раціональних чисел будь-який відкритий окіл кожної $x \in \mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ містить інші точки $\mathbb{Q}$). Це демонструє суттєвість умови скінченності у пункті 3. твердження 24.1. Простори, усі зв'язні компоненти яких є одноточковими, як у цьому та попередньому прикладах, інколи називають *цілком незв'язними.*

Твердження 24.2. *При гомеоморфізмі топологічних просторів зв'язні компоненти переходять у зв'язні компоненти.*

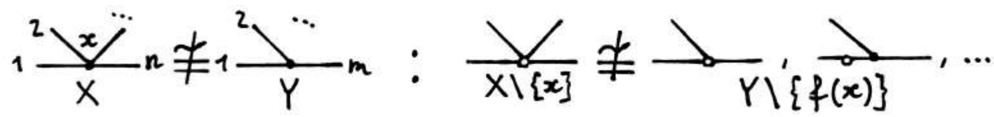
Доведення. Дійсно, за наслідком 23.2 будь-який гомеоморфізм зберігає зв'язність. Також він зберігає включення відповідних підмножин, а отже й максимальність.

∎

Наслідок 24.1. *Число зв'язних компонент топологічного простору є топологічним інваріантом.*

Зауваження. Цей інваріант можна застосовувати до доведення негомеоморфності як безпосередньо (наприклад, об'єднання різних скінченних кількостей множин A_λ з прикладу 24.1 негомеоморфні), так і викидаючи точки, як у прикладах застосування зв'язності з попереднього розділу.

Приклад 24.4. На наступному рисунку продемонстрована ідея доведення негомеоморфності букетів X та Y з n та m відрізків відповідно, що склеєні своїми кінцями, якщо $n \neq m$ і принаймні одне з цих чисел не менше за 3. Зауважимо, що ці простори зв'язні. Припустимо існування гомеоморфізма $f\colon X \to Y$ при, скажімо, $n > m$. Нехай x – спільна точка першого букета (тобто точка, у яку переходять еквівалентні кінці відрізків при факторизації). Тоді $X \setminus \{x\}$ має n зв'язних компонент, а $Y \setminus \{f(x)\}$ може мати різну їх кількість у залежності від розташування $f(x)$, але не більше ніж $\max\{m, 2\} < n$. При тому ці простори повинні бути гомеоморфними за наслідком 14.1, протиріччя. Спробуйте виконати усі необхідні перевірки самостійно.



25 Функції на зв'язному просторі

Зв'язність можна використовувати не лише для доведення негомеоморфності. Розглянемо деякі її застосування, що пов'язані з наступним узагальненням класичної теореми аналіза про проміжне значення:

Теорема 25.1 (Больцано – Коші про проміжне значення)**.** *Нехай топологічний простір X зв'язний, а функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ неперервна. Тоді для будь-яких $x, y \in X$ і для будь-якого $c \in \mathbb{R}$, що належить відрізку з кінцями у $f(x)$ і $f(y)$, існує $z \in X$ така, що $c = f(z)$.*

Доведення. Дійсно, в силу твердження 23.7, $f(X)$ зв'язна в $\mathbb{R}$ як неперервний образ зв'язного простору, тобто є проміжком в силу теореми 23.1. Саме це й стверджується в умові.

■

Наслідок 25.1 (Одновимірна теорема Брауера про нерухому точку). *Для будь-якого неперервного відображення $f\colon D^1 \to D^1$ існує $x \in D^1$ така, що $f(x) = x$.*

Доведення. Нагадаємо, що $D^1 = [-1, 1]$. Припустимо, що $f(x) \neq x$ для будь-якого $x \in D^1$. Визначимо функцію $g\colon D^1 \to \mathbb{R}$ умовою $g(x) \coloneqq f(x) - x$. Вона неперервна, $g(-1) > 0$ (бо $f(-1) \in D^1$ і $f(-1) \neq -1$), і $g(1) < 0$ (аналогічно), тому за попередньою теоремою існує $x \in D^1$ така, що $g(x) = 0$, тобто $f(x) = x$, суперечність.

■

Зауваження. Твердження попереднього наслідку буде вірним і для будь-якого відрізка $[a, b]$ (чому?).

Наслідок 25.2. *Нехай $n \geqslant 1$. Для будь-якої непарної неперервної функції $f\colon S^n \to \mathbb{R}$ (тобто такої, що $f(-x) = -f(x)$ для будь-якої $x \in S^n$, де $-x$ – діаметрально протилежна до x точка сфери), існує $x \in S^n$ така, що $f(x) = 0$.*

Доведення. Дійсно, або $f = 0$ – постійна, або існує $x \in S^n$ така, що $f(x) \neq 0$, але тоді $f(-x)$ має протилежний знак. Залишилося застосувати зв'язність S^n і теорему про проміжне значення.

■

Зауваження. Інший спосіб доведення – припустивши, що $f(x) \neq 0$ для усіх x, розглянути на S^n неперервну функцію g, що визначена умовою $g(x) \coloneqq \frac{f(x)}{|f(x)|}$ і множина значень якої $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ незв'язна, що суперечить твердженню 23.7.

Наслідок 25.3. *Нехай $n \geqslant 1$. Для будь-якої неперервної функції $f\colon S^n \to \mathbb{R}$ існує $x \in S^n$ така, що $f(-x) = f(x)$.*

Доведення. Застосуємо попередній наслідок до непарної неперервної функції $g\colon S^n \to \mathbb{R}$, що визначена умовою $g(x) \coloneqq f(x) - f(-x)$.

■

Зауваження. Звідси можна зробити висновок, що в будь-який момент часу на земній кулі (і навіть на кожному з меридіанів) існують дві діаметрально протилежні точки з однаковою температурою, якщо, звичайно, вважати її неперервною функцією.

Наслідок 25.4. *При $n \geqslant 1$ не існує вкладення S^n у $\mathbb{R}$.*

Доведення. Дійсно, з попереднього наслідку випливає, що жодне неперервне відображення $S^n \to \mathbb{R}$ не є ін'єктивним.

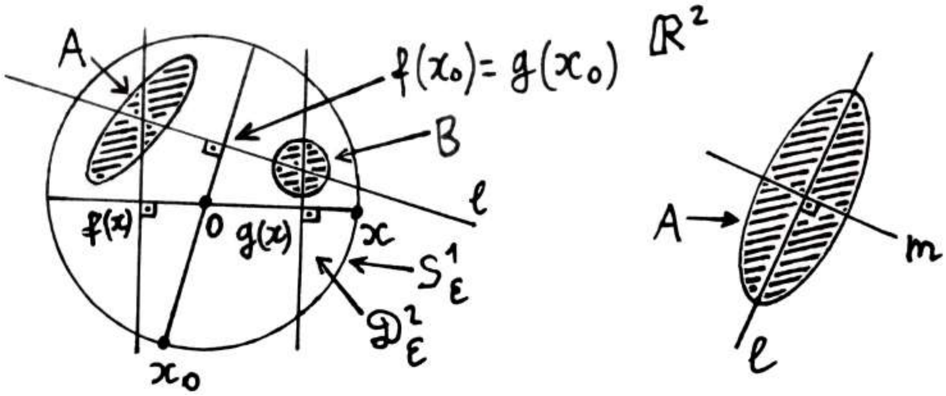
■

Вправа 25.1 (Задачі про млинці)**.** Нехай підмножини $A, B \subset \mathbb{R}^2$ компактні та вимірні (тобто їхню площу можна знайти, наприклад, за допомогою інтеграла Рімана, як вивчається в курсі аналіза). Показати, що тоді вірні наступні твердження.

1. Існує пряма l, що ділить кожну з множин A і B на дві частини рівної площі.

2. Існують ортогональні прямі l і m, що ділять множину A на чотири частини рівної площі.

Ці факти, що проілюстровані нижче, також є наслідками теореми про проміжне значення. Їхні доведення можна знайти у [14, с. 63-67, с. 80-83 перекладу].



Наведемо без додаткових обґрунтувань ідею доведення для задачі 1. (що також ілюструється рисунком вище). Оскільки A і B обмежені, вони містяться у замкненому крузі D^2_ε деякого радіуса $\varepsilon > 0$ з центром у початку координат 0, межею якого є коло S^1_ε. Для кожної точки $x \in S^1_\varepsilon$ існує пряма, що ортогональна до діаметра кола $0x$ та ділить A навпіл. Якщо таких прямих багато (наприклад, коли A незв'язна), то вони утворюють смугу, тоді візьмемо її центральну пряму (вісь симетрії). Позначимо через $f(x)$ відстань від x до цієї прямої. Аналогічно визначається $g(x)$ для множини B. Тоді $f, g \in C(S^1_\varepsilon, [0, 2\varepsilon])$, і за побудовою $f(-x) = 2\varepsilon - f(x)$, $g(-x) = 2\varepsilon - g(x)$. Визначимо функцію h на S^1_ε умовою $h(x) \coloneqq f(x) - g(x)$, вона теж неперервна і непарна за властивостями f і g. Отже, за наслідком 25.2 існує $x_0 \in S^1_\varepsilon$ така, що $f(x_0) = g(x_0)$. Тоді пряма l, що проходить ортогонально до діаметра $0x_0$ на відстані $f(x_0)$ від x_0, і є потрібною.

26 Шляхи та лінійна зв'язність

Існує геометрично наочніший варіант зв'язності, що мотивований, зокрема, прикладами опуклих множин (23.7) і сфер (23.8), кожні дві точки яких з'єднувалися деяким "шляхом" (відрізком і дугою великого кола відповідно). Дамо цим поняттям точні означення.

Означення 26.1. *Шляхом* у топологічному просторі X називають будь-яке неперервне відображення $f\colon [a,b] \to X$ деякого відрізка дійсної прямої в X. Образ $f([a,b])$ тоді зветься *носієм* f. Якщо при цьому $f(a) = x$ і $f(b) = y$, то кажуть, що x – *початок* f, y – *кінець* f, а f *з'єднує* x та y (або x з y).

Зауваження. Якщо не вказане інше, далі завжди будемо областю визначення шляху вважати відрізок $[0,1]$, який для економії місця (і традиційно для топологічної літератури) позначатимемо через I. Далі визначимо деякі операції зі шляхами.

Означення 26.2. Нехай X – топологічний простір. Для будь-якої $x \in X$ постійне відображення $e_x\colon I \to X\colon t \mapsto x$ будемо називати *постійним шляхом* у x. Нехай $f\colon I \to X$ – деякий шлях, тоді $\overline{f}\colon I \to X\colon t \mapsto f(1-t)$ назвемо *оберненим шляхом* до f. Нарешті, нехай $g\colon I \to X$ – теж деякий шлях, причому $f(1) = g(0)$. Тоді *добутком шляхів* f і g зветься відображення $f * g\colon I \to X$, що визначене умовою

$$t \mapsto \left[\begin{array}{ll} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ g(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Зауваження. Усі ці відображення є шляхами. Дійсно, e_x неперервне, бо постійне, $\overline{f}$ неперервне як композиція неперервних. Добуток $f * g$ коректно визначений, бо при $t = \frac{1}{2}$ перший вираз дає $f(1)$, а другий – $g(0)$, що збігаються за умовою, і є неперервним відображенням, бо $t \mapsto f(2t)$ і $t \mapsto g(2t-1)$ неперервні як композиції неперервних (перевірте; це приклад використання техніки т. зв. *фундаментальних покрить*, з якою можна познайомитися у [3, с. 63-64]).

При цьому e_x з'єднує x з собою. Якщо f з'єднує x з y, то $\overline{f}$ з'єднує y з x. Якщо до того ж g з'єднує y з z, то $f * g$ з'єднує x з z. Зауважимо також, що шляхи $(f * g) * h$ і $f * (g * h)$, якщо вони визначені, мають спільний носій (зокрема спільні початок та кінець), але, взагалі кажучи, не збігаються, тобто добуток шляхів не є асоціативним (перевірте це; у яких випадках така асоціативність все ж має місце?).

Означення 26.3. Топологічний простір X зветься *лінійно зв'язним*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ існує шлях у X, що з'єднує x та y. Підмножина топологічного простору зветься *лінійно зв'язною*, якщо вона є лінійно зв'язним простором в індукованій топології.

Твердження 26.1. *Множина A у топологічному просторі X лінійно зв'язна тоді й тільки тоді, коли для будь-яких $x, y \in A$ існує шлях у X такий, що він з'єднує x та y, а його носій лежить у A.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Дійсно, якщо A лінійно зв'язна, то для будь-яких $x, y \in A$ існує шлях $f \in C(I, A)$ такий, що $f(0) = x$, $f(1) = y$. Тоді його композиція з відображенням включення $i\colon A \to X$ є неперервною, тобто шляхом у X, і тому задовольняє умові твердження.

$\underline{\Leftarrow}$ Якщо $f \in C(I, X)$ – шлях, для якого $f(0) = x$, $f(1) = y$ і $f(I) \subset A$, то відображення $f\colon I \to A$ є неперервним як обмеження неперервного, тобто є шляхом у A з індукованою топологією, що з'єднує x та y. Тому A лінійно зв'язна за означенням.

■

Зауваження. В силу цього твердження далі ми, як правило, будемо демонструвати лінійну зв'язність підмножин A простору X, розглядаючи шляхи в X, носії яких лежать у A. Також інколи ми писатимемо $C(I, A) \subset C(I, X)$, маючи на увазі, що шляху f з першої множини відповідає композиція $i \circ f$ з другої.

Приклад 26.1. Порожня множина (тривіальним чином) і одноточкові підмножини $\{x\}$ (бо постійний шлях e_x з'єднує x з собою) є лінійно зв'язними у будь-якому просторі.

Приклад 26.2. У $\mathbb{R}^n$ відрізок $[x, y]$ є носієм шляху $f\colon t \mapsto (1-t)\,x + t\,y$ (див. приклад 23.7). Тому будь-яка опукла підмножина A простору $\mathbb{R}^n$ лінійно зв'язна за означенням. Зокрема, усі проміжки дійсної прямої $\mathbb{R}$ лінійно зв'язні.

Якщо ж A зірчата відносно $x \in A$, то для будь-яких $y, z \in A$ позначимо через f та g шляхи, носіями яких є відрізки $[x, y]$ та $[x, z]$ відповідно. Тоді шлях $\overline{f} * g$ (носієм якого є дволанкова ламана) з'єднує y і z. Тому усі зірчаті множини лінійно зв'язні.

Приклад 26.3. Аналогічно, у прикладі 23.8 ми встановили, що будь-які дві точки сфери S^n для $n \geqslant 1$ можна з'єднати дугою великого кола, що є носієм деякого шляху g (який був явно описаний у згаданому прикладі). Тому S^n лінійно зв'язна (а отже й проєктивний простір $\mathbb{R}P^n \cong S^n/_{\mathbb{Z}_2}$ згідно з наслідками 26.1 і 26.2 нижче).

Твердження 26.2. *Нехай $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – сукупність лінійно зв'язних підмножин топологічного простору та існує індекс $\lambda_0 \in \Lambda$ такий, що $A_{\lambda_0} \cap A_\lambda \neq \varnothing$ для будь-якого $\lambda \in \Lambda$. Тоді об'єднання $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ цих множин лінійно зв'язне.*

Доведення. Нехай $x, y \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, тобто існують $\lambda, \mu \in \Lambda$ такі, що $x \in A_\lambda$ і $y \in A_\mu$. За умовою, також існують $z \in A_{\lambda_0} \cap A_\lambda$ і $w \in A_{\lambda_0} \cap A_\mu$. В силу лінійної зв'язності цих множин, існують шляхи f, g і h в A_λ, A_{λ_0} і A_μ, що з'єднують x з z, z з w і w з y відповідно. Тоді $(f * g) * h$ – шлях у $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, що з'єднує x з y, доведено.

■

Зауваження. Зауважимо, що ця достатня умова слабша за аналогічну умову зв'язності (твердження 23.4), бо умову нерозділеності в ній замінено на сильнішу умову перетину. Деякі інші властивості лінійно зв'язних просторів повторюють властивості зв'язних дослівно:

Твердження 26.3. *Якщо $\varphi\colon X \to Y$ – неперервне відображення топологічних просторів, а X лінійно зв'язний, то $\varphi(X) \subset Y$ лінійно зв'язна.*

Доведення. Дійсно, для будь-яких $\varphi(x), \varphi(y) \in \varphi(X)$ існує шлях $f \in C(I, X)$, що з'єднує x та y у X. Тоді $\varphi \circ f \in C(I, \varphi(X))$ (неперервне як композиція неперервних) – шлях, що з'єднує $\varphi(x)$ та $\varphi(y)$ у $\varphi(X)$.

■

Наслідок 26.1. *Лінійна зв'язність є топологічним інваріантом.*

Наслідок 26.2. *Факторпростір лінійно зв'язного простору (за відношенням еквівалентності) є лінійно зв'язним.*

Теорема 26.1 (Лінійна зв'язність прямого добутку)**.** *Прямий добуток топологічних просторів $X \times Y$ лінійно зв'язний тоді й тільки тоді, коли простори X та Y лінійно зв'язні.*

Доведення. Дослівно повторимо доведення теореми 23.2 (із заміною посилань на твердження 23.7, 23.4 і наслідок 23.2 на твердження 26.3, 26.2 і наслідок 26.1 відповідно).

■

Зауваження. Є й інший спосіб доведення достатності у цій теоремі. Нехай X та Y лінійно зв'язні. Для будь-яких $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in X \times Y$ тоді існують шляхи $f \in C(I, X)$ та $g \in C(I, Y)$, що з'єднують x_0 з x_1 та y_0 з y_1 відповідно. Тоді $(f, g)\colon I \to X \times Y$, що визначене умовою $t \mapsto (f(t), g(t))$, неперервне за пунктом <u>3.</u> твердження 15.2, тобто є шляхом, що з'єднує (x_0, y_0) з (x_1, y_1). Як і аналогічні теореми про компактність і зв'язність, це узагальнюється на будь-який скінченний добуток $X_1 \times \ldots \times X_n$ (за індукцією або з використанням викладеного тут альтернативного способу доведення).

Приклад 26.4. Паралелепіпеди $A^1 \times \ldots \times A^n$, де $A^i \subset \mathbb{R}$ – проміжки, зокрема замкнений куб I^n, лінійно зв'язні в $\mathbb{R}^n$ в силу цієї теореми і прикладу 26.2.

Приклад 26.5. Аналогічно, n-вимірний тор $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ лінійно зв'язний (див. приклад 26.3).

27 Зв'язок зв'язності та лінійної зв'язності. Локальні властивості зв'язності

Зауважимо, що усі приклади лінійно зв'язних просторів та множин, що наведені у попередньому розділі, повторюють приклади зв'язності з розділу 23. Це не є випадковим:

Твердження 27.1. *Будь-який лінійно зв'язний топологічний простір є зв'язним.*

Доведення. Дійсно, якщо простір X лінійно зв'язний, то він задовольняє умові твердження 23.6, де у якості A_{xy} для $x, y \in X$ беремо носій $f(I)$ шляху f, що з'єднує x та y (він зв'язний за твердженням 23.7 як неперервний образ зв'язного I), отже X зв'язний.

■

Приклад 27.1. Таким чином, усі лінійно зв'язні підмножини дійсної прямої зі стандартною топологією – це проміжки за теоремою 23.1. Іншими словами, в $\mathbb{R}$ лінійна зв'язність, зв'язність і опуклість (див. також приклад 26.2) – це еквівалентні властивості підмножин, і задовольняють їм в точності проміжки.

Приклад 27.2 (Гребінка та блоха)**.** Нехай $X = A \cup B$ – підмножина площини $\mathbb{R}^2$, де "гребінка"

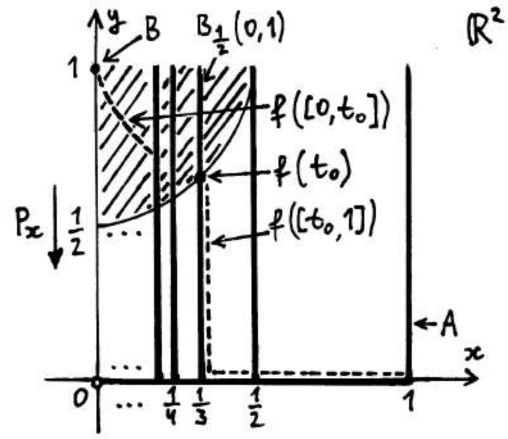
$$A \coloneqq (0,1] \times \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right)$$

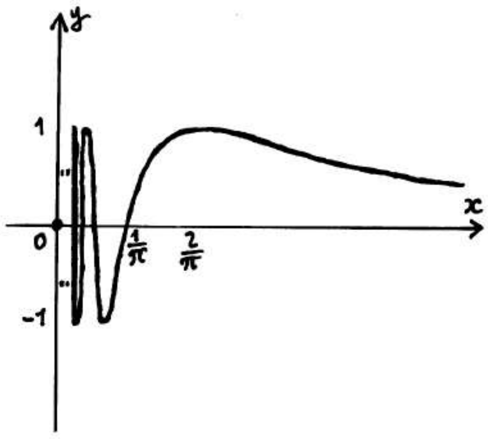
є об'єднанням проміжків, а "блоха" $B \coloneqq \{(0,1)\}$ – одноточкова множина (див. ілюстрацію цієї множини та подальших міркувань цього прикладу нижче зліва). Тоді A і B – лінійно зв'язні (для A це випливає з твердження 26.2), отже зв'язні за попереднім твердженням. Помітимо, що $A \subset X \subset \overline{A}$, тому X зв'язна за твердженням 23.5.

Припустимо, що X лінійно зв'язна. Тоді, зокрема, існує шлях $f \in C(I, X)$, що з'єднує "блоху" з протилежним кутом квадрата, у якому міститься "гребінка": $f(0) = (0,1)$, $f(1) = (1,0)$. Розглянемо функцію $t \mapsto \rho((1,0), f(t))$ на I (де ρ – евклідова метрика, точніше, її обмеження на X; кулі далі також будемо розглядати для цієї метрики). Вона неперервна (чому?), тому прообраз точки $\frac{1}{2}$ замкнений та повинен містити свій інфімум. До того ж, цей прообраз непорожній за теоремою про проміжне значення, бо функція приймає значення 0 при $t = 0$ і $\sqrt{2}$ при $t = 1$. Тому існує $t_0 \coloneqq \min\{t \mid \rho((1,0), f(t)) = \frac{1}{2}\} > 0$. Тоді $f([0,t_0)) \subset B_{\frac{1}{2}}(0,1)$ (бо інакше знову ж за теоремою про проміжне значення знайшлася б $t < t_0$ з $\rho((1,0), f(t)) = \frac{1}{2}$). З монотонності замикання і властивості неперервних відображень ($f(\overline{C}) \subset \overline{f(C)}$ для будь-якої C; перевірте це) маємо:

$$f([0,t_0]) = f\left(\overline{[0,t_0)}\right) \subset \overline{f([0,t_0))} \subset \overline{B_{\frac{1}{2}}(0,1)} = D_{\frac{1}{2}}(0,1).$$

Тобто обмеження шляху f на $[0,t_0]$ залишається серед вертикальних "зубців гребінки" і не доходить до її горизонтальної частини, причому $\rho((1,0), f(t_0)) = \frac{1}{2}$, отже принаймні $f(t_0) \in A$. Тому під дією ортогональної проєкції p_x на вісь x множина $f([0,t_0])$ перейде у множину вигляду $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in M} \subset \mathbb{R}$ (де $M \subset \mathbb{N}$ непорожня), що є незв'язною. З іншого боку, ця множина $(p_x \circ f)([0,t_0])$ є образом зв'язної множини під дією неперервного відображення, що суперечить твердженню 23.7. Отже, X не є лінійно зв'язною. Це демонструє, що обернене твердження до 27.1, взагалі кажучи, невірне.





Приклад 27.3 (Топологічний синус)**.** Аналогічно можна показати, що підмножина площини $X \coloneqq \{(0,0)\} \cup \big\{(x,y) \mid y = \sin\frac{1}{x},\ x > 0\big\}$ (див. рисунок вище справа; також замість точки $(0,0)$ можна взяти всю вісь y) теж є зв'язною, але не лінійно зв'язною. Зробіть це самостійно, або див. [18, с. 137-138], де обговорюються властивості цього (щоправда, для функції $\sin\frac{1}{x}$, що визначена на $(0,1]$, а не на $(0,+\infty)$, що забезпечує компактність замикання такої множини) та споріднених прикладів.

Таким чином, щоб зі зв'язності виводити лінійну зв'язність, потрібні додаткові умови.

Означення 27.1. Топологічний простір X зветься *локально зв'язним* (відповідно, *локально лінійно зв'язним*), якщо для будь-яких $x \in X$ й відкритої $U \ni x$ існує відкрита зв'язна (лінійно зв'язна) $V \subset X$ така, що $x \in V \subset U$.

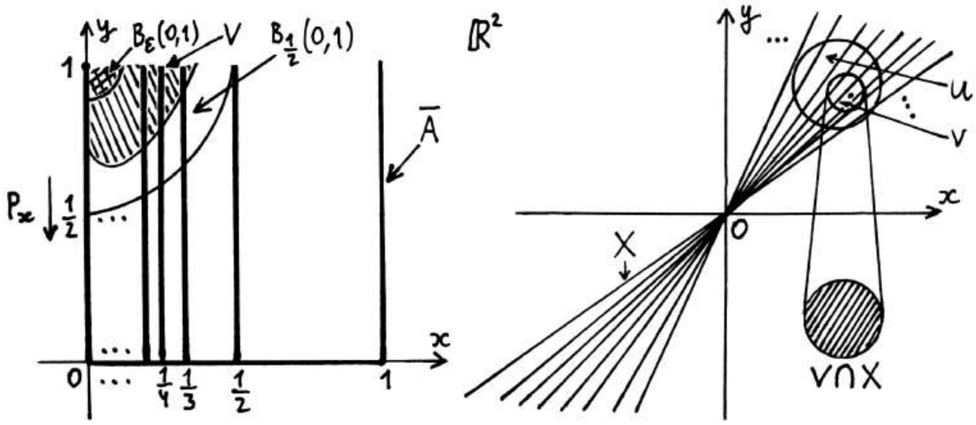
Зауваження. З означень та відомих інваріантностей випливає, що ці властивості є топологічними інваріантами (перевірте це). З локальної лінійної зв'язності простору випливає його локальна зв'язність за твердженням 27.1. При цьому із жодної з властивостей зв'язності та локальної зв'язності простору, взагалі кажучи, не випливає інша, і так само для відповідних лінійних властивостей. Це демонструють наступні приклади:

Приклад 27.4. Простір з дискретною топологією, що складається більш ніж з однієї точки, незв'язний за прикладом 23.4 (а отже й не лінійно зв'язний), але локально лінійно зв'язний (а отже локально зв'язний): у якості V можна взяти одноточкову множину $\{x\}$.

Приклад 27.5. У позначеннях прикладу 27.2 розглянемо множину

$$X \coloneqq \overline{A} = [0,1] \times \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right) \cup \{0\} \times [0,1],$$

тобто "гребінку", якій повернули перший "зубець" (див. рисунок знизу зліва; перевірте, що замикання A саме таке). Цей простір лінійно зв'язний за твердженням 26.2, а отже зв'язний. При цьому він не локально зв'язний (а отже не локально лінійно зв'язний). Дійсно, нехай локальна зв'язність має місце. Тоді у відкритому околі $B_{\frac{1}{2}}(0,1)$ точки $(0,1)$ міститься деякий її зв'язний відкритий окіл $V\colon (0,1) \in V \subset B_{\frac{1}{2}}(0,1)$. У свою чергу, тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B_\varepsilon(0,1) \subset V$. Звідси, аналогічно до міркувань у прикладі 27.2, маємо, що $p_x(V) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n\in M} \subset \mathbb{R}$ для непорожньої $M \subset \mathbb{N}$ (що містить, зокрема, усі n такі, що $\frac{1}{n} < \varepsilon$). Ця множина незв'язна, що суперечить зв'язності V і твердженню 23.7. Зауважимо, що при цьому сама A є локально лінійно зв'язним простором (перевірте це).



Приклад 27.6. Підмножина площини $X := \{(x, y) \mid \exists\, \lambda \in \mathbb{Q}\colon y = \lambda x\}$, тобто об'єднання прямих з раціональними кутовими коефіцієнтами, що проходять через початок координат, також лінійно зв'язна, але не є локально зв'язним простором (перевірте це, використавши ідею, що проілюстрована зверху справа).

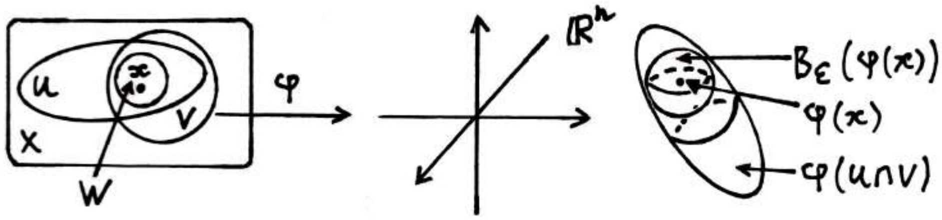
Приклад 27.7. Простір $\mathbb{R}^n$ локально лінійно зв'язний: для будь-яких $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ з відкритості U випливає існування $\varepsilon > 0$ такого, що $V := B_\varepsilon(x) \subset U$, причому евклідова куля $V = B_\varepsilon(x)$ опукла (перевірте це; ще простіше показати, що вона зірчата відносно x, використавши радіальні відрізки), а отже лінійно зв'язна згідно з прикладом 26.2. Цей випадок можна узагальнити:

Означення 27.2. Топологічний простір X називається *локально евклідовим*, якщо існує таке ціле невід'ємне n, що для будь-якої $x \in X$ існують відкрита $U \ni x$ і гомеоморфізм $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ (де на U розглядається індукована топологія).

Зауваження. При $n = 0$ це дає дискретний простір (чому?). Неважко встановити, що локальна евклідовість є топологічним інваріантом. Крім $\mathbb{R}^n$ (просто покладемо $U = \mathbb{R}^n$ і $\varphi = id_{\mathbb{R}^n}$), локально евклідовою також є будь-яка відкрита $V \subset \mathbb{R}^n$ (перевірте це). Інші приклади (скажімо, S^n) будуть наведені у розділах 29 та 30.

Твердження 27.2. *Будь-який локально евклідовий топологічний простір є локально лінійно зв'язним.*

Доведення. Отже, нехай простір X локально евклідовий, $x \in X$, U – відкрита і містить x. Тоді за означенням існують відкрита $V \ni x$ і гомеоморфізм $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^n$. За властивостями гомеоморфізма $\varphi(U \cap V)$ відкрита в $\mathbb{R}^n$, тому існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B_\varepsilon(\varphi(x)) \subset \varphi(U \cap V)$, де евклідова куля $B_\varepsilon(\varphi(x))$ лінійно зв'язна. Тоді за наслідком 26.1 $W := \varphi^{-1}\big(B_\varepsilon(\varphi(x))\big) \subset U \cap V \subset U$ є відкритим лінійно зв'язним околом x (див. умовну ілюстрацію цього нижче).



∎

Теорема 27.1 (Достатня умова лінійної зв'язності областей)**.** *Будь-яка відкрита зв'язна підмножина локально лінійно зв'язного топологічного простору є лінійно зв'язною.*

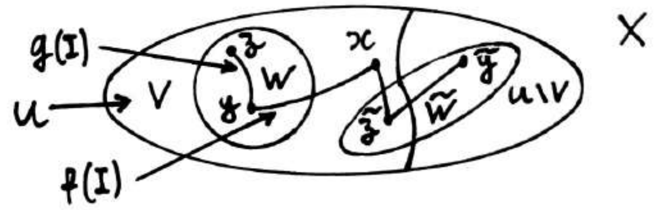
Зауваження. Зокрема, кожний зв'язний локально лінійно зв'язний простір є лінійно зв'язним. Відкриті зв'язні підмножини топологічного простору часто називають його *областями*, що пояснює назву теореми. Зауважимо, що підмножини площини з прикладів 27.2 і 27.3 не є відкритими, тобто умова відкритості у теоремі суттєва.

Доведення. Отже, нехай простір X локально лінійно зв'язний, а підмножина $U \subset X$ відкрита і зв'язна. Якщо $U = \varnothing$, твердження є очевидним. Тому можемо вважати, що існує $x \in U$. Покладемо

$$V := \{y \in U \mid \exists\, f \in C(I, U)\colon f(0) = x,\ f(1) = y\}.$$

Тобто V складається з усіх точок U, з якими можна з'єднати x деяким шляхом, що лежить в U.

Покажемо, що V відкрита (в топології X, а отже й у індукованій топології U). Дійсно, нехай $y \in V$. В силу локальної лінійної зв'язності простору X, існує відкрита лінійно зв'язна W така, що $y \in W \subset U$. За побудовою V існує шлях $f \in C(I, U)$, що з'єднує x та y. Оскільки W лінійно зв'язна, для будь-якої $z \in W$ існує шлях $g \in C(I, W) \subset C(I, U)$, що з'єднує y і z. Тому шлях $f * g \in C(I, U)$ з'єднує x і z, тобто $z \in V$. Таким чином, ми показали, що $W \subset V$, а отже будь-яка $y \in V$ є внутрішньою точкою V, що й було потрібно. Цей і наступний кроки доведення умовно показані на наступному рисунку:



Тепер покажемо, що $U \setminus V$ відкрита (теж в X, а отже в U). Аналогічно до попередньої частини доведення, для кожної $\widetilde{y} \notin V$ також існує відкрита лінійно зв'язна $\widetilde{W}$ така, що $\widetilde{y} \in \widetilde{W} \subset U$. Припустимо, що існує $\widetilde{z} \in V \cap \widetilde{W}$. Тоді існують шляхи $\widetilde{f} \in C(I, U)$ і $\widetilde{g} \in C(I, \widetilde{W}) \subset C(I, U)$, що з'єднують x та $\widetilde{z}$ і $\widetilde{z}$ та $\widetilde{y}$ відповідно. Тому шлях $\widetilde{f} * \widetilde{g} \in C(I, U)$ з'єднує x та $\widetilde{y}$, тобто $\widetilde{y} \in V$, протиріччя. Отже, $\widetilde{W} \cap V = \varnothing$, тобто будь-яка точка $\widetilde{y}$ множини $U \setminus V$ є внутрішньою. Тому V замкнена в U.

Таким чином, V – непорожня (бо містить x) відкритозамкнена підмножина U. В силу зв'язності U і твердження 23.2, тоді $V = U$, тобто точку x можна з'єднати з будь-якою точкою $y \in U$ деяким шляхом, що лежить в U. З цього випливає лінійна зв'язність U аналогічно до зірчатих множин у прикладі 26.2: x можна з'єднати з будь-якими $y, z \in U$ шляхами f і g відповідно, тоді $\overline{f} * g$ з'єднує y і z.

■

28 Компоненти лінійної зв'язності. Теорема Жордана

Введемо поняття компонент для лінійної зв'язності так само, як для зв'язності. Виявляється, що більшість їх властивостей повторюють властивості зв'язних компонент, за виключенням замкненості, як побачимо у прикладі 28.1 нижче.

Означення 28.1. Підмножина топологічного простору зветься його *компонентою лінійної зв'язності*, якщо вона є максимальною за включенням лінійно зв'язною підмножиною.

Твердження 28.1 (Властивості компонент лінійної зв'язності)**.** *Нехай X – топологічний простір.*

1. *Для будь-якої $x \in X$ існує єдина компонента лінійної зв'язності B_x простору X, що містить x.*

2. *Для будь-яких $x, y \in X$ або $B_x = B_y$, або $B_x \cap B_y = \varnothing$.*

3. *Будь-яка компонента лінійної зв'язності X міститься у деякій його зв'язній компоненті.*

Доведення. Перші два пункти доводяться дослівно як перші два пункти твердження 24.1 (із заміною твердження 23.4 на твердження 26.2). Третій випливає з того, що кожна компонента B_x лінійної зв'язності X є зв'язною за твердженням 27.1, а отже міститься у найбільшій за включенням зв'язній підмножині X, що містить x, – її зв'язній компоненті.

$\blacksquare$

Зауваження. Як і для зв'язності, звідси випливає, що B_x – це найбільша за включенням лінійно зв'язна підмножина X, що містить x, і що X є диз'юнктним об'єднанням своїх попарно різних компонент лінійної зв'язності. Зокрема, це означає, що належність точок до однієї компоненти лінійної зв'язності є відношенням еквівалентності (звичайно, це так і для зв'язних компонент, і взагалі для будь-якого розбиття X на підмножини, що попарно не перетинаються). Для цього відношення можна сформулювати корисний критерій:

Твердження 28.2. *Дві точки $x, y \in X$ топологічного простору належать одній компоненті лінійної зв'язності тоді й тільки тоді, коли існує шлях, що їх з'єднує.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Нехай B – компонента лінійної зв'язності простору X. В силу її лінійної зв'язності, для будь-яких $x, y \in B$ існує шлях $f \in C(I, B) \subset C(I, X)$, що з'єднує x та y.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай точки $x, y \in X$ можна з'єднати шляхом $f \in C(I, X)$. Тоді $x, y \in f(I)$, причому $f(I)$ є лінійно зв'язною за твердженням 26.3, отже міститься в деякій компоненті лінійної зв'язності X (як у найбільшій за включенням лінійно зв'язній підмножині X, що містить x).

$\blacksquare$

Приклад 28.1. Ще раз повернемося до прикладу 27.2. Оскільки $X = A \sqcup B$ не є лінійно зв'язним, а A і B – є, вони є максимальними за включенням лінійно зв'язними підмножинами (аналогічно до прикладу 24.1), тобто компонентами лінійної зв'язності X, що містяться у його єдиній зв'язній компоненті X. При цьому компонента A не є замкненою (вона всюди щільна в X).

Приклад 28.2. Нагадаємо означення ортогональної групи:

$$\mathrm{O}(n) = \big\{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \bigm| AA^T = A^T A = E\big\}.$$

Тут через $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ позначено векторний простір усіх $(n \times n)$-матриць з коефіцієнтами, шо належать до поля $\mathbb{K}$, який природним чином ототожнюється з $\mathbb{K}^{n^2}$. У нашому випадку $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Перенесемо на $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ стандартну топологію $\mathbb{R}^{n^2}$ (тобто вважатимемо відкритими в точності ті підмножини, що переходять у відкриті підмножини $\mathbb{R}^{n^2}$ при такому ототожненні) й розглянемо індуковану топологію на $\mathrm{O}(n)$. Згадаємо, що будь-яка ортогональна матриця має визначник 1 або -1 (це неважко вивести з наведеного вище означення), тобто $\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \sqcup \mathrm{O}^-(n)$, де $\det A = 1$ для $A \in \mathrm{SO}(n)$ (це т. зв. *спеціальна ортогональна група*, що є підгрупою у $\mathrm{O}(n)$ – перевірте, що для неї виконується означення A.3) і $\det A = -1$ для $A \in \mathrm{O}^-(n)$. Покажемо, що ці дві підмножини є лінійно зв'язними. З курсу лінійної алгебри відомо, що для будь-якої $A \in \mathrm{SO}(n)$ існує $B \in \mathrm{O}(n)$ така, що

$$A = B \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & & & & \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k & & & \\ & & & \sin\varphi_k & \cos\varphi_k & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} B^T.$$

Покладемо для $t \in I$

$$f(t) \coloneqq B \begin{pmatrix} \cos t\varphi_1 & -\sin t\varphi_1 & & & & & & \\ \sin t\varphi_1 & \cos t\varphi_1 & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \cos t\varphi_k & -\sin t\varphi_k & & & \\ & & & \sin t\varphi_k & \cos t\varphi_k & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} B^T.$$

Відображення $f\colon I \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ неперервне, бо задається неперервними функціями, й діє в $\mathrm{SO}(n)$, бо для будь-якого t матриця $f(t)$ ортогональна як добуток ортогональних, а її визначник дорівнює добутку

$(\det B)^2 = 1$ на визначник середньої матриці, що теж дорівнює 1. Таким чином, $f \in C(I, \mathrm{SO}(n))$ – шлях, що з'єднує $f(0) = BEB^T = BB^T = E$ і $f(1) = A$. Отже, $\mathrm{SO}(n)$ лінійно зв'язна (аналогічно до завершення доведення теореми 27.1: якщо будь-які дві матриці можна з'єднати шляхами з E, то їх можна з'єднати й одну з одною). Аналогічно можна показати, що $\mathrm{O}^-(n)$ лінійно зв'язна (зробіть це). При цьому $\mathrm{O}(n)$ не є зв'язною (а отже й лінійно зв'язною) за твердженням 23.7, оскільки неперервна (бо поліноміальна) функція det переводить $\mathrm{O}(n)$ у незв'язну множину $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$. Тобто $\mathrm{SO}(n)$ і $\mathrm{O}^-(n)$ є компонентами зв'язності та лінійної зв'язності $\mathrm{O}(n)$. Зокрема, вони відкритозамкнені. Зауважимо, що $\mathrm{O}(n)$ є локально евклідовим простором, але доведення цього факта виходить за межі даного курсу.

Вправа 28.1. Показати, що *унітарна група*

$$\mathrm{U}(n) \coloneqq \left\{ A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \;\middle|\; A\,\overline{A^T} = \overline{A^T}\,A = E \right\}$$

та її підгрупа – *спеціальна унітарна група* $\mathrm{SU}(n) \coloneqq \{A \in \mathrm{U}(n) \mid \det A = 1\}$ – лінійно зв'язні (з топологіями, що вводяться аналогічно до попереднього прикладу, але з використанням очевидного ототожнення просторів $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$, $\mathbb{C}^{n^2}$ і $\mathbb{R}^{2n^2}$).

Вправа 28.2. Показати, що *псевдоортогональна група*

$$\mathrm{O}(1,1) \coloneqq \left\{ A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}) \;\middle|\; A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A^T = A^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

з топологією, що вводиться аналогічно до попередніх прикладів, складається з чотирьох компонент зв'язності та лінійної зв'язності.

Наступні два твердження доводяться і використовуються аналогічно до відповідних властивостей зв'язних компонент.

Твердження 28.3. *При гомеоморфізмі компоненти лінійної зв'язності переходять у компоненти лінійної зв'язності.*

Наслідок 28.1. *Число компонент лінійної зв'язності топологічного простору є топологічним інваріантом.*

Зауваження. На завершення теми зв'язності наведемо без доведення теорему, що є хрестоматійним прикладом "геометрично очевидного", але насправді нетривіального твердження. Навіть у класичному випадку

$n = 1$ її повне доведення досить складне. Різні його варіанти можна знайти у [7, с. 112-115] (для більш слабкого твердження), [17, с. 376-394] (це доведення використовує техніку гомотопій та фундаментальних груп з алгебраїчної топології) та [19], а для часткового випадку ламаних – у [1, с. 250-252]. У [12, с. 169-174, с. 218-219 перекладу] показано, як довести цю теорему для довільної вимірності (теж нетривіальними методами алгебраїчної топології).

Теорема 28.1 (Жордан)**.** *Нехай відображення* $f\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$*, де* $n \geqslant 1$*, ін'єктивне і неперервне. Тоді* $\mathbb{R}^{n+1} \setminus f(S^n)$ *складається з двох зв'язних компонент* A *і* B*, кожна з яких є відкритою підмножиною* $\mathbb{R}^{n+1}$*, причому* $\partial A = \partial B = f(S^n)$*,* A *обмежена, а* B *необмежена.*

Зауваження. В силу теореми 27.1, оскільки зв'язні A і B є відкритими в локально лінійно зв'язному (чому?) $\mathbb{R}^{n+1} \setminus f(S^n)$, вони є у ньому лінійно зв'язними, а отже є також компонентами лінійної зв'язності. З наслідку 20.4 випливає, що в умовах теореми f є вкладенням S^n у $\mathbb{R}^{n+1}$, бо S^n компактна, а $\mathbb{R}^{n+1}$ хаусдорфовий. Наприклад, якщо $f = i$ – стандартне вкладення (тобто включення) S^n у $\mathbb{R}^{n+1}$, то $A = B^{n+1}$ і $B = \mathbb{R}^{n+1} \setminus D^{n+1}$. При $n = 1$ відображення f з умови теореми Жордана зветься *простою замкненою (жордановою) кривою* у $\mathbb{R}^2$, A – *внутрішністю* цієї кривої, а B – її *зовнішністю* (інколи аналогічну термінологію використовують і в більших вимірностях). До речі, чи є A дійсно внутрішністю якоїсь підмножини $\mathbb{R}^{n+1}$?

29 Многовиди

У різних задачах математики та її застосувань природним чином зустрічаються топологічні простори, що локально влаштовані як евклідовий простір $\mathbb{R}^n$. Зокрема, вони є одним з традиційних об'єктів дослідження у топології та диференціальній геометрії.

Означення 29.1. Хаусдорфовий топологічний простір M, що задовольняє другій аксіомі зліченності, зветься n-вимірним *многовидом*, де $n \in \mathbb{Z}_+$ – деяке ціле невід'ємне число, якщо він локально евклідовий: для будь-якої $p \in M$ існують відкрита $U \ni p$ і гомеоморфізм $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ (де на U розглядається індукована топологія). У цьому випадку пара (U, φ) зветься *картою* M (а U – *носієм* цієї карти). Деяка сукупність карт M зветься його *атласом*, якщо їхні носії утворюють відкрите покриття M. Число n називають *вимірністю* M і позначають $\dim M$.

Зауваження. З означення випливає, зокрема, що умова локальної евклідовості еквівалентна існуванню у M деякого атласа. Властивість простору бути многовидом є топологічним інваріантом (чому?), як і його вимірність (див. пункт 7. твердження 29.2 нижче). Нагадаємо, що поняття локальної евклідовості у нас вже виникало у зв'язку з локальною лінійною зв'язністю: див. означення 27.2 і обговорення після нього.

Приклад 29.1. Для вимірності 0 маємо у означенні многовида гомеоморфізм $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^0$ на одноточковий простір, тобто відкритий окіл U теж повинен бути одноточковим: $U = \{p\}$. Це означає, що топологія M дискретна. Тобто 0-вимірні многовиди – це в точності не більш ніж зліченні (в силу другої аксіоми зліченності) дискретні простори.

Приклад 29.2. Простір $\mathbb{R}^n$ є n-вимірним многовидом для будь-якої $n \in \mathbb{Z}_+$: достатньо покласти $U := \mathbb{R}^n$ і $\varphi := id_{\mathbb{R}^n}$. Більш того, будь-яка відкрита підмножина $V \subset \mathbb{R}^n$ також буде n-вимірним многовидом. Дійсно, вона наслідує хаусдорфовість та другу аксіому зліченності з $\mathbb{R}^n$, і для будь-якої $p \in V$ існує $\varepsilon > 0$ таке, що відкрита евклідова куля $B_\varepsilon(p) \subset V$. При цьому $B_\varepsilon(p) \cong B^n \cong \mathbb{R}^n$ (див. вправу 14.2), тому можна взяти $U := B_\varepsilon(p)$.

Вправа 29.1. Узагальнити це спостереження, показавши, що якщо M – n-вимірний многовид, а $V \subset M$ відкрита, то V також є n-вимірним многовидом.

Приклад 29.3. Сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ є n-вимірним многовидом. Дійсно, хаусдорфовість і другу аксіому зліченності вона наслідує з $\mathbb{R}^{n+1}$. Позначимо через $N := (0, \dots, 0, 1)$ і $S := (0, \dots, 0, -1)$ відповідно північний і південний полюси сфери. Розглянемо її відкрите покриття $\{U, V\}$, де $U := S^n \setminus \{N\}$ і $V := S^n \setminus \{S\}$. Тоді з прикладу 14.5 випливає, що стереографічні проєкції $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ і $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ відносно точок N і S відповідно є гомеоморфізмами. Таким чином, сфера S^n задовольняє умові локальної евклідовості, а $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ – її атлас.

Приклад 29.4. Дійсний проєктивний простір $\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) /_{\mathbb{R}_*}$ (див. приклад 18.5) теж є n-вимірним многовидом. Перш за все, він хаусдорфовий і задовольняє другій аксіомі зліченності (чому?). Для кожного i від 1 до $n+1$ покладемо

$$U_i := \big\{(x^1 : \ldots : x^{n+1}) \bigm| x^i \neq 0\big\}.$$

Кожна з цих множин відкрита (бо відкритий її прообраз під дією канонічної проєкції, що є доповненням до гіперплощини $x^i = 0$), і вони утворюють покриття $\mathbb{R}P^n$ (бо у кожної його точки принаймні одна однорідна координата ненульова). Для кожного i розглянемо тоді відображення

$$\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n\colon (x^1 : \ldots : x^{n+1}) \mapsto \left(\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right).$$

Вони коректно визначені (бо однорідні координати визначені з точністю до множення на спільне ненульове число) і неперервні як факторизації неперервних відображень з підмножин $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ у $\mathbb{R}^n$. Геометричний сенс цих відображень наступний: $\varphi_i(x^1 : \ldots : x^{n+1})$ – це координати точки перетину прямої, що задає точку проєктивного простору $(x^1 : \ldots : x^{n+1})$, з гіперплощиною $x^i = 1$, де i-ту координату, що, власне, дорівнює 1, пропущено (перевірте це). Обернені до них відображення мають вигляд

$$(\varphi_i)^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to U_i\colon (y^1, \ldots, y^n) \mapsto (y^1 : \ldots : y^{i-1} : 1 : y^i : \ldots : y^n).$$

Їх існування демонструє, зокрема, бієктивність φ_i. Відображення $(\varphi_i)^{-1}$ неперервні як композиції неперервних відображень $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ та канонічної проєкції. Разом це означає, що $\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n$ – гомеоморфізм для кожного i, тобто $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ – атлас $\mathbb{R}P^n$, що й завершує доведення його локальної евклідовості.

Вправа 29.2. Показати, що комплексний проєктивний простір $\mathbb{C}P^n$ з вправи 18.5 є $2n$-вимірним многовидом.

Твердження 29.1. *Нехай M і N – многовиди. Тоді $M \times N$ є* $(\dim M + \dim N)$*-вимірним многовидом.*

Доведення. Простір $M \times N$ хаусдорфовий за вправою 19.4 і задовольняє другій аксіомі зліченності за вправою 15.2. Позначимо $m := \dim M$ і $n := \dim N$. Для будь-якої точки $(p, q) \in M \times N$ тоді за означенням існують відкриті околи $U \ni p$ в M і $V \ni q$ в N разом з гомеоморфізмами $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ і $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$. Тоді за побудовою топології прямого добутку $U \times V$ – відкритий окіл (p, q), а відображення

$$\varphi \times \psi\colon U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}\colon (r, s) \mapsto (\varphi(r), \psi(s))$$

бієктивне, неперервне і має обернене $(\varphi \times \psi)^{-1} = \varphi^{-1} \times \psi^{-1}$, що також неперервне (перевірте це). Таким чином, $\varphi \times \psi$ – гомеоморфізм. Це демонструє локальну евклідовість $M \times N$ а також те, що $\dim(M \times N) = m + n$. ■

Приклад 29.5. Циліндр $S^1 \times \mathbb{R}$ є двовимірним многовидом в силу прикладів 29.2, 29.3 та попереднього твердження.

Зауваження. Твердження 29.1 очевидним чином узагальнюється за індукцією на довільну скінченну кількість множників. Зокрема, $\dim(M_1 \times \ldots \times M_n) = \dim M_1 + \ldots + \dim M_n$.

Приклад 29.6. Тор $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ є n-вимірним многовидом в силу прикладу 29.3 та попереднього зауваження.

Твердження 29.2 (Топологічні властивості многовидів)**.** *Нехай M – деякий многовид.*

1. *M локально компактний.*

2. *M нормальний.*

3. *Якщо M компактний, то існує його вкладення в $\mathbb{R}^k$ для деякого k.*

4. *M метризовний.*

5. *M локально лінійно зв'язний. Зокрема, відкрита підмножина $V \subset M$ є лінійно зв'язною тоді й тільки тоді, коли є зв'язною.*

6. *Зв'язні компоненти M відкритозамкнені, збігаються з його компонентами лінійної зв'язності та є многовидами тієї ж вимірності, що й M. Їх не більш ніж зліченна кількість (і скінченна, якщо M компактний).*

7. *Якщо N – деякий многовид, що гомеоморфний M, то їхні вимірності збігаються: $\dim N = \dim M$ (топологічна інваріантність вимірності).*

8. *Якщо M зв'язний і $\dim M = 1$, то M гомеоморфний $\mathbb{R}$ або S^1 (класифікація одновимірних многовидів).*

Доведення. Нехай $n = \dim M$.

1. Для будь-якої $p \in M$ нехай (U, φ) – карта M з $U \ni p$. Оберемо якесь $\varepsilon > 0$ і позначимо через $\widetilde{B}_\varepsilon(p) \coloneqq \varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(p))) \subset U$ і $\widetilde{D}_\varepsilon(p) \coloneqq \varphi^{-1}(D_\varepsilon(\varphi(p))) \subset U$ прообрази евклідових куль $\mathbb{R}^n$. Тоді $\widetilde{B}_\varepsilon(p)$ – відкритий окіл p (в індукованій топології відкритої U, а отже й у M), бо $B_\varepsilon(\varphi(p))$ відкрита в $\mathbb{R}^n$, а φ – гомеоморфізм.

Замикання $\widetilde{B}_\varepsilon(p)$ в індукованій топології U є, з одного боку, прообразом замикання $\varphi^{-1}\left(\overline{B_\varepsilon(\varphi(p))}\right) = \varphi^{-1}(D_\varepsilon(\varphi(p))) = \widetilde{D}_\varepsilon(p)$ у $\mathbb{R}^n$ (бо φ – гомеоморфізм), а з іншого – перетином замикання цього околу в топології M з U (покажіть це). Таким чином, $\widetilde{D}_\varepsilon(p) \subset \overline{\widetilde{B}_\varepsilon(p)}$, де справа стоїть саме замикання в топології M. Разом з тим, $D_\varepsilon(\varphi(p))$ компактна в $\mathbb{R}^n$ (в силу теореми 22.2 як обмежена і замкнена), тому $\widetilde{D}_\varepsilon(p)$ компактна у топології U як прообраз компакта під дією гомеоморфізма φ, а отже компактна і в топології M за вправою 20.1. Тоді, оскільки M хаусдорфовий, $\widetilde{D}_\varepsilon(p)$ замкнена за твердженням 20.5. Оскільки вона містить $\widetilde{B}_\varepsilon(p)$, $\overline{\widetilde{B}_\varepsilon(p)} \subset \widetilde{D}_\varepsilon(p)$. Маємо таким чином, що $\overline{\widetilde{B}_\varepsilon(p)} = \widetilde{D}_\varepsilon(p)$ – компакт. Це й означає локальну компактність.

2. Оскільки M локально компактний за попереднім пунктом і хаусдорфовий, він регулярний в силу вправи 20.5. Оскільки він до того ж задовольняє другій аксіомі зліченності, він нормальний в силу твердження 19.8.

3. Для будь-якої $p \in M$ нехай (U_p, φ_p) – карта M з $U_p \ni p$. Тоді (у позначеннях пункта 1., де для кожної p використовуємо у побудові відповідне φ_p) $\left\{\widetilde{B}_1(p)\right\}_{p\in M}$ утворюють відкрите покриття M. Використавши компактність, виділимо з нього скінченне підпокриття $\left\{\widetilde{B}_1(p_i)\right\}_{i=1}^m$. Для кожного i від 1 до m замкнені множини $M \setminus \widetilde{B}_2(p_i)$ і $\widetilde{D}_1(p_i)$ не перетинаються, адже

$$\widetilde{D}_1(p_i) = \varphi_{p_i}^{-1}(D_1(\varphi_{p_i}(p_i))) \subset \varphi_{p_i}^{-1}(B_2(\varphi_{p_i}(p_i))) = \widetilde{B}_2(p_i).$$

Простір M нормальний в силу попереднього пункта, тому за лемою Урисона (теорема 19.1) існує функція Урисона ψ_i множин $M \setminus \widetilde{B}_2(p_i)$ і $\widetilde{D}_1(p_i)$. Зокрема, ψ_i неперервна, дорівнює 0 на $M \setminus \widetilde{B}_2(p_i)$ і 1 на $\widetilde{D}_1(p_i)$. Побудуємо відображення $f\colon M \to \mathbb{R}^{m(n+1)}$ як $f \coloneqq (f_1, \ldots, f_m)$, де для кожного i відображення $f_i\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ визначене умовою

$$f_i(q) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} (\psi_i(q)\varphi_{p_i}(q), \psi_i(q)), & q \in U_{p_i}; \\ 0, & q \notin U_{p_i}. \end{array}\right.$$

Зауважимо, що тут $\psi_i(q)\varphi_{p_i}(q) \in \mathbb{R}^n$, а $\psi_i(q) \in \mathbb{R}$, тому f_i – дійсно відображення у $\mathbb{R}^{n+1}$. Множини U_{p_i} та $M \setminus \widetilde{D}_2(p_i)$ утворюють відкрите покриття M. Обмеження f_i на першу з них має вигляд $(\psi_i\, \varphi_{p_i}, \psi_i)$ і є неперервним в індукованій топології. Обмеження на другу за побудовою є тотожнім нулем (бо $M \setminus \widetilde{D}_2(p_i) \subset M \setminus \widetilde{B}_2(p_i)$ аналогічно до включень вище, отже на ній $\psi_i = 0$), тому теж неперервне. Тоді f_i неперервне (чому?). Звідси маємо, що f неперервне, бо задається неперервними функціями.

При цьому за побудовою відображення f є ін'єктивним. Дійсно, нехай $f(q) = f(r)$ для деяких $q, r \in M$. Існує i таке, що $q \in \widetilde{B}_1(p_i) \subset \widetilde{D}_1(p_i) \subset U_{p_i}$, тому $\psi_i(q) = 1$, а отже й $\psi_i(r) = 1$. Це означає, що $r \in \widetilde{B}_2(p_i) \subset U_{p_i}$, бо за межами цієї множини $\psi_i = 0$. Тоді, порівнюючи значення відображення f_i у цих точках, маємо

$$(\varphi_{p_i}(q), 1) = f_i(q) = f_i(r) = (\varphi_{p_i}(r), 1).$$

Але на U_{p_i} відображення φ_{p_i} бієктивне, тому $q = r$. Таким чином, f є неперервним ін'єктивним відображенням з компактного M у хаусдорфовий $\mathbb{R}^{m(n+1)}$, а отже вкладенням за наслідком 20.4.

4. Випливає з теореми 19.3 Урисона про метризацію, оскільки M нормальний за пунктом 2. і задовольняє другій аксіомі зліченності.

   Для компактного M це твердження випливає також з попереднього пункта. Дійсно, ми можемо просто перенести на M за допомогою f обмеження евклідової метрики $\mathbb{R}^k$ на $f(M)$: умова $\rho(p, q) := |f(p) - f(q)|$ для $p, q \in M$ задає метрику ρ на M. Перевірте, що це дійсно метрика і що топологія M є метричною для неї.

5. Це твердження 27.2. Еквівалентність зв'язності та лінійної зв'язності для відкритих підмножин випливає тоді з теореми 27.1 (і твердження 27.1, що вірне для будь-яких лінійно зв'язних підмножин).

6. Нехай A – деяка зв'язна компонента M. Вона є замкненою в силу пункта 3. твердження 24.1. Для будь-якої $p \in A$ нехай (U, φ) – карта M з відкритою $U \ni p$. Тоді U зв'язна, бо гомеоморфна зв'язному простору $\mathbb{R}^n$, а отже $U \subset A$, тобто p – внутрішня точка A. Таким чином, A відкрита і зв'язна, а отже лінійно зв'язна за попереднім пунктом. Тоді вона збігається з компонентою лінійної зв'язності M (чому?). Компонента A є n-вимірним многовидом в силу її відкритості та вправи 29.1.

   Нарешті, помітимо, що зв'язні компоненти утворюють відкрите покриття M, у якого не існує нетривіального підпокриття. Таким чином, якщо б їхня кількість була незліченною, це суперечило б другій аксіомі зліченності та теоремі Ліндельофа. Аналогічно, нескінченна кількість зв'язних компонент значила б, що M некомпактний (тут суттєвою є лише відкритість зв'язних компонент і друга аксіома зліченності для першого з тверджень, а не те, що M – многовид).

7. Див. [2, с. 205-206].

8. Див. [10], [15, с. 143-147], а також [14, с. 77-79, с. 95-96 перекладу] для компактного випадку (коли M гомеоморфний S^1).

■

Зауваження. Усі многовиди також є паракомпактними. Це випливає, наприклад, з вправи 20.6 та пункта 1. попереднього твердження.

Вправа 29.3. Показати, що твердження пункта 6. (крім того, що зв'язні компоненти є многовидами) узагальнюються на довільний локально лінійно зв'язний простір. Які з них вірні для довільного локально зв'язного простору? Чи можна сформулювати умови, слабші за умови локальної (лінійної) зв'язності, за яких ці твердження залишаються вірними?

30 Поверхні

Поверхні є класичним об'єктом вивчення у топології, а сформульована у даному розділі теорема 30.1 класифікації компактних зв'язних поверхонь – одним з найперших в історії математики нетривіальних топологічних результатів.

Означення 30.1. *Поверхнею* зветься двовимірний многовид.

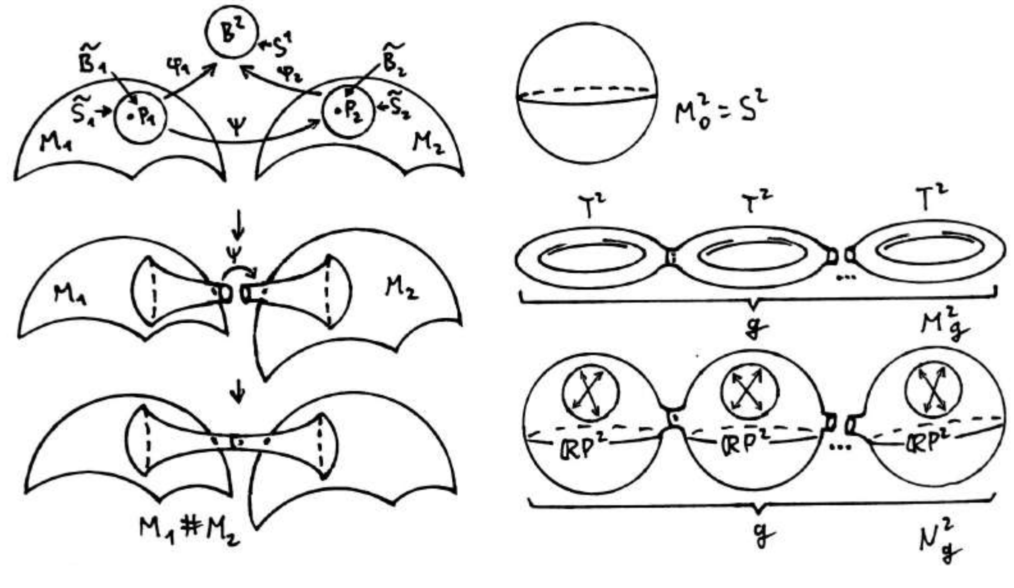
Приклад 30.1. З більш загальних прикладів попереднього розділу випливає, що площина $\mathbb{R}^2$, двовимірна сфера S^2, проєктивна площина $\mathbb{R}P^2$, циліндр $S^1 \times \mathbb{R}$, двовимірний тор T^2, а також їхні довільні відкриті підмножини (наприклад, відкритий круг $B^2 \subset \mathbb{R}^2$, що гомеоморфний $\mathbb{R}^2$) є поверхнями.

Вправа 30.1. Показати, що поверхні другого порядку в $\mathbb{R}^3$ – еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди – є поверхнями. Чи гомеоморфні вони якимось поверхням з попереднього прикладу? Чи будуть поверхнями конуси другого порядку?

Вправа 30.2. Показати, що пляшка Клейна K^2 з прикладу 16.4 є поверхнею.

Зауваження. При цьому, скажімо, замкнена напівплощина $\mathbb{R}^2_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$, замкнений круг $D^2 \subset \mathbb{R}^2$, гомеоморфна йому замкнена двовимірна напівсфера (тобто перетин S^2 з замкненим напівпростором $\mathbb{R}^3$ відносно площини, що проходить через початок координат), обмежений замкнений циліндр $S^1 \times [a,b]$ і замкнений лист Мебіуса з прикладу 16.2 не є поверхнями. Наприклад, у будь-якої точки вигляду $(x,0) \in \mathbb{R}^2_+$ не існує околу, що гомеоморфний $\mathbb{R}^2$ (але методів, що розвинені у цьому курсі, недостатньо, щоб це показати). Чи можете ви вказати такі "проблемні" точки у інших перелічених просторів? Зауважимо, що подібні точки (а саме ті, у яких існує окіл, що гомеоморфний $\mathbb{R}^2_+$) називають *межовими*, але вони не обов'язково є межовими для підмножини евклідового простору у сенсі означення 10.1. Простори такого типу належать до т. зв. *многовидів з межею*. Див., наприклад, [2, с. 230-232] або [15, с. 42-45].

Означення 30.2. Нехай M_1 і M_2 – компактні зв'язні поверхні, $p_1 \in M_1$ і $p_2 \in M_2$ – деякі їх точки, відкриті $\widetilde{B}_1 \ni p_1$ і $\widetilde{B}_2 \ni p_2$ – такі, що існують гомеоморфізми (відносно індукованих топологій) $\varphi_1 \colon \widetilde{D}_1 \to D^2$ і $\varphi_2 \colon \widetilde{D}_2 \to D^2$, де $\widetilde{D}_i = \overline{\widetilde{B}_i}$ для $i = 1,2$, причому обмеження $\varphi_i|_{\widetilde{S}_i}$ є гомеоморфізмами меж $\widetilde{S}_i = \partial\widetilde{B}_i$ на коло $S^1 = \partial B^2$ для $i = 1,2$. Тоді склеювання $M_1 \setminus \widetilde{B}_1$ і $M_2 \setminus \widetilde{B}_2$ за відображенням $\psi := \left(\varphi_2|_{\widetilde{S}_2}\right)^{-1} \circ \varphi_1|_{\widetilde{S}_1} \colon \widetilde{S}_1 \to \widetilde{S}_2$ зветься *зв'язною сумою* M_1 і M_2 та позначається $M_1 \# M_2$.



Зауваження. Див. ілюстрацію зверху зліва. Відкриті околи $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$ і гомеоморфізми φ_1, φ_2 з потрібними властивостями можна побудувати, використавши карти, як у доведенні пункта 1. твердження 29.2: якщо (U,φ) – карта M_1 з $U \ni p_1$, то можна взяти $\widetilde{B}_1 := \widetilde{B}_1(p_1) = \varphi^{-1}(B_1(\varphi(p_1)))$, тоді за згаданим доведенням $\widetilde{D}_1 = \widetilde{D}_1(p_1) = \varphi^{-1}(D_1(\varphi(p_1)))$, і

$$\widetilde{S}_1 = \partial\widetilde{B}_1 = \overline{\widetilde{B}_1} \setminus \operatorname{Int}\widetilde{B}_1 = \widetilde{D}_1 \setminus \widetilde{B}_1 = \varphi^{-1}(S_1(\varphi(p_1))).$$

Крім того, можна без обмеження загальності вважати, що $\varphi(p_1) = 0$, розглянувши за необхідності композицію φ з паралельним перенесенням (що є гомеоморфізмом за прикладом 14.3). Покладемо тоді $\varphi_1 := \varphi|_{\widetilde{D}_1}$. Перевірте, що це відображення задовольняє умові. Аналогічно зробимо для другої поверхні.

Можна показати, що для компактних зв'язних поверхонь описана у попередньому означенні конструкція не залежить від вибору p_1, p_2, $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$, φ_1 і φ_2 з точністю до гомеоморфізма, тобто якщо $M_1 \cong N_1$ і $M_2 \cong N_2$, то $M_1\#M_2 \cong N_1\#N_2$ для будь-яких виборів точок, околів і гомеоморфізмів. Таким чином, зв'язна сума $M_1\#M_2$ визначена коректно у цьому сенсі. При цьому $M_1\#M_2$ також буде компактною зв'язною поверхнею. Крім того, вірно, що $M_1\#M_2 \cong M_2\#M_1$, $(M_1\#M_2)\#M_3 \cong M_1\#(M_2\#M_3)$ і $M_1\#S^2 \cong M_1$ для будь-яких компактних зв'язних поверхонь M_1, M_2 і M_3 (тобто класи гомеоморфності таких поверхонь з операцією зв'язної суми утворюють *абелеву напівгрупу з одиницею*). Також цю операцію можна ітерувати, розглядаючи зв'язні суми довільної скінченної кількості поверхонь.

Означення 30.3. *Орієнтовною* (компактною зв'язною) *поверхнею роду* g, де $g \in \mathbb{Z}_+$, зветься $M_0^2 := S^2$ для $g = 0$ і $M_g^2 := \underbrace{T^2\#\ldots\#T^2}_{g}$ для $g > 0$.

Неорієнтовною (компактною зв'язною) *поверхнею роду* g, де $g \in \mathbb{N}$, зветься $N_g^2 := \underbrace{\mathbb{R}P^2\#\ldots\#\mathbb{R}P^2}_{g}$.

Зауваження. Ці поверхні зображені вище справа (у неорієнтовному випадку – умовно). Поверхню $M_2^2 = T^2\#T^2$ інколи звуть *кренделем*. Також виявляється, наприклад, що $N_2^2 = \mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$ гомеоморфна пляшці Клейна K^2, а $T^2\#\mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$. Ми покажемо це нижче в ході доведення наступної теореми. Зауважимо, що, як і у окремих випадках $\mathbb{R}P^2$ і K^2, жодна з поверхонь N_g^2 не вкладається у $\mathbb{R}^3$ (на відміну від поверхонь M_g^2, вкладення яких у $\mathbb{R}^3$ зображені на рисунку вище), але всі вони вкладаються у $\mathbb{R}^4$.

Теорема 30.1 (Класифікація компактних зв'язних поверхонь)**.** *Будь-яка компактна зв'язна поверхня гомеоморфна рівно одній з M_g^2, N_g^2.*

Зауваження. У формулюваннях цієї теореми в літературі інколи йдеться про поверхні "без межі" (у нас за означенням усі такі, див. зауваження вище про многовиди з межею) та "замкнені" (в даному контексті це означає просто компактність).

Доведення теореми класифікації складатиметься з двох частин. По-перше, ми доведемо, що кожна компактна зв'язна поверхня M гомеоморфна якійсь зі списку M_g^2, N_g^2. По-друге, покажемо, що різні поверхні зі списку негомеоморфні, за допомогою топологічних інваріантів. Для цього ми побудуємо нові, специфічні саме для поверхонь, інваріанти.

Див. також [14, с. 79-91, с. 97-111 перекладу], [15, с. 159-182], [17, с. 446-476] або викладення дещо іншого підходу до доведення у [7, с. 149-171].

Доповнення. Необхідні відомості з алгебри

У цьому розділі будуть наведені потрібні для цього курсу початкові відомості з теорії груп. Детальніше викладення міститься, наприклад, у [4], або частині I книги [9] (гл. 1–3). Зокрема, там можна знайти доведення викладених тут тверджень, але більшість з них неважко перевірити самостійно, що й рекомендується робити у якості вправ.

Означення A.1. *Групою* зветься множина G разом з бінарною *груповою операцією*, тобто відображенням $G \times G \to G\colon (a,b) \mapsto ab$, що задовольняє наступним умовам:

- $(ab)c = a(bc)$ для будь-яких $a, b, c \in G$ (*асоціативність* операції);
- існує *нейтральний елемент* (або *одиниця групи*) e такий, що $ae = ea = a$ для будь-якого $a \in G$;
- для будь-якого $a \in G$ існує *обернений елемент* $a^{-1} \in G$ такий, що $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Якщо крім того групова операція *комутативна*, тобто $ab = ba$ для будь-яких $a, b \in G$, то групу G називають *абелевою*.

Як бачимо, групова операція виглядає як множення чисел. Ці позначення називаються *мультиплікативними*, і саме їх ми й будемо тут використовувати. Як і у цьому означенні, одиницю групи будемо у загальному випадку позначати через e. Натомість, для абелевих груп часто застосовують *адитивні* позначення, тобто групова операція виглядає як додавання ($(a,b) \mapsto a + b$), нейтральний елемент позначається нулем ($a + 0 = a$ для будь-якого $a \in G$), а обернений виглядає як протилежний (для будь-якого $a \in G$ існує $-a \in G$ такий, що $a + (-a) = 0$). Такий вибір позначень мотивується, зокрема, наступними прикладами. Виконайте для них усі необхідні перевірки самостійно.

Приклад A.1. *Тривіальною* зветься група $\{e\}$, що складається лише з одиниці.

Приклад A.2. Усі цілі числа з операцією додавання утворюють абелеву групу $\mathbb{Z}$. Це ж вірно для множини дійсних $\mathbb{R}$ чисел з цією операцією, а також для множин елементів будь-якого поля та будь-якого векторного простору з їх відповідними операціями додавання.

Приклад A.3. Узагальнимо попередній приклад, розглянувши множини $\mathbb{Z}^n$ і $\mathbb{R}^n$ впорядкованих наборів з n цілих (відповідно, дійсних) чисел. Це абелеві групи з операціями покомпонентного додавання: $(x^1, \dots, x^n) + (y^1, \dots, y^n) = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n)$.

Приклад А.4. Усі ненульові дійсні числа з операцією множення теж утворюють абелеву групу $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Це ж вірно для множини ненульових елементів будь-якого поля з його операцією множення (т. зв. *мультиплікативна група поля*). Крім того, абелеву групу утворюють усі додатні дійсні числа з тією ж операцією множення.

Приклад А.5. Для будь-якого натурального n будемо вважати цілі числа k і l еквівалентними, якщо вони рівні за модулем n: $k \equiv l \mod n$, тобто $k-l$ кратне n. Відповідна множина класів еквівалентності позначається $\mathbb{Z}_n$. У якості її елементів зручно розглядати класи еквівалентності перших n цілих невід'ємних чисел: $\mathbb{Z}_n = \{[0], \ldots, [n-1]\}$, де $[k]$ складається з усіх цілих чисел, що мають залишок k при діленні на n. Тоді коректно визначена операція додавання $[k] + [l] := [k + l]$, що перетворює $\mathbb{Z}_n$ на абелеву групу з n елементів. Вона зветься *групою залишків за модулем* n. Звичайно, група $\mathbb{Z}_1$ тривіальна.

Приклад А.6. Для натурального n усі перестановки множини $\{1, \ldots, n\}$ з операцією композиції утворюють скінченну *симетричну групу* S_n. При $n \geqslant 3$ вона є неабелевою.

Означення А.2. Відображення груп $\alpha\colon G \to H$ зветься їх *гомоморфізмом*, якщо зберігає групову операцію: $\alpha(ab) = \alpha(a)\,\alpha(b)$ для будь-яких $a, b \in G$. Гомоморфізм груп зветься їх *ізоморфізмом*, якщо є бієкцією. Якщо існує ізоморфізм $\alpha\colon G \to H$, то говорять, що група G ізоморфна групі H (або що групи G і H ізоморфні). Ми позначатимемо це $G \simeq H$.

З означення також випливає, що гомоморфізм зберігає одиницю групи та обернені елементи: $\alpha(e) = e$ (зауважимо, що тут e зліва й справа позначає, взагалі кажучи, різні елементи: одиниці G і H відповідно), $\alpha(a^{-1}) = \alpha(a)^{-1}$ для будь-якого $a \in G$ (перевірте це). Відображення груп, що обернене до ізоморфізма, теж є ізоморфізмом в силу означень. Ізоморфність є відношенням еквівалентності на множині груп (чому?) та означає, що їх структури фактично однакові з алгебраїчної точки зору. Зокрема, ізоморфізм зберігає абелевість групи.

Приклад А.7. Відображення $x \mapsto \ln x$ є ізоморфізмом між групами додатних дійсних чисел з операцією множення та усіх дійсних чисел з операцією додавання, що розглядалися у прикладах А.4 і А.2 відповідно (перевірте це).

Означення А.3. Нехай G – деяка група. Підмножина $H \subset G$ зветься *підгрупою* G, якщо $ab \in H$ і $a^{-1} \in H$ для будь-яких $a, b \in H$.

Будь-яка підгрупа H групи G містить одиницю $e \in G$ (покажіть це) і з обмеженням на H групової операції сама перетворюється на групу, бо для неї виконані умови означення A.1. Дві умови попереднього означення часто записують як одну: $ab^{-1} \in H$ для будь-яких $a, b \in H$, що є еквівалентною до них (чому?).

Приклад A.8. Будь-яка група G містить *тривіальні* підгрупи $\{e\}$ (див. приклад A.1) та G.

Приклад A.9. Додатні дійсні числа утворюють підгрупу групи ненульових дійсних чисел з прикладу A.4, бо добуток двох додатних чисел і обернене до додатного є додатними. Аналогічним чином підмножина $\mathbb{Z}^n$ у $\mathbb{R}^n$ з прикладу A.3 (зокрема $\mathbb{Z}$ у $\mathbb{R}$) є підгрупою.

Література

[1] О.А. Борисенко. Диференціальна геометрія і топологія. Х.: Основа, 1995.

[2] Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. Введение в топологию. Издание второе, дополненное. М.: Наука, 1995.

[3] О.Я. Виро, О.А. Иванов, Н.Ю. Нецветаев, В.М. Харламов. Элементарная топология. М.: МЦНМО, 2012.

[4] О.Г. Ганюшкін, О.О. Безущак. Теорія груп: навчальний посібник. Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2005.

[5] А.Я. Дороговцев. Математичний аналіз. Частина 1. Київ: Либідь, 1993.

[6] В.М. Кадець. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Львів: Чижиков І.Е., 2012.

[7] M.A. Armstrong. Basic Topology. Springer, 1983.

[8] N. Bourbaki. General Topology. Chapters 1–4. Springer, 1995. Переклад: Н. Бурбаки. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.

[9] D.S. Dummit, R.M. Foote. Abstract Algebra. Third Edition. Wiley, 2004.

[10] D. Gale. The Classification of 1-Manifolds: A Take-Home Exam. The American Mathematical Monthly, 94 (1987), p. 170-175.

[11] S. Geschke. Convex Open Subsets of $\mathbb{R}^n$ Are Homeomorphic to n-dimensional Open Balls. Preprint, Hausdorff Center for Mathematics, July 4 2012.

[12] A. Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2001. Переклад: А. Хатчер. Алгебраическая топология. М.: МЦНМО, 2011.

[13] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen. Geometry and the Imagination. AMS Chelsea, 1999. Переклад: Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.

[14] C. Kosniowski. A First Course in Algebraic Topology. Cambridge University Press, 1980. Переклад: Ч. Коснёвски. Начальный курс алгебраической топологии. М.: Мир, 1983.

[15] J.M. Lee. Introduction to Topological Manifolds. Second Edition. Springer, 2011.

[16] S.A. Morris. Topology Without Tears. Ebook, 2012 (at www.topologywithouttears.net).

[17] J.R. Munkres. Topology. Second Edition. Prentice Hall, 2000.

[18] L.A. Steen, J.A. Seebach, Jr. Counterexamples in Topology. Dover Publications, 1995.

[19] H. Tverberg. A Proof of the Jordan Curve Theorem. Bulletin of the London Mathematical Society, 12 (1980), p. 34–38.

Доповнення.
Доведення теореми класифікації поверхонь

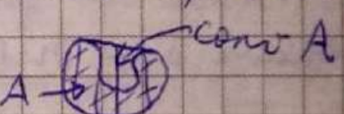
Див. наступні аркуші.

31. Доведення теореми класифікації: тріангуляції та розгортки

Def 31.1 n-вимірним евклідовим симплексом зветься підмножина $\mathbb{R}^m$ (де $0 \le n \le m$), що є опуклою оболонкою $n+1$ точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ таких, що вони не лежать у жодному $(n-1)$-вимірному афінному підпросторі $\mathbb{R}^m$: $\sigma^n = \operatorname{conv}\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Ці точки звуться вершинами даного симплекса.

Rem. Нагадаємо, що опукла оболонка підмножини $A \subset \mathbb{R}^m$ — це найменша за включенням опукла підмножина, що містить A, або, що те ж саме, перетин усіх опуклих підмн., що містять A:

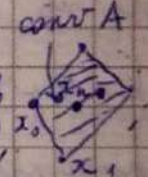
$$\operatorname{conv} A = \bigcap_{\substack{B \text{ - опукла} \\ B \supset A}} B \qquad (\text{Впр.})$$



Зокрема, для скінченної $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$:

$$\operatorname{conv} A = \operatorname{conv}\{x_0, \dots, x_n\} = \Big\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \;\Big|\; \forall i\ \lambda_i \ge 0,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \Big\},$$

— це лін. комбінації — у сенсі радіус-векторів (Впр.)



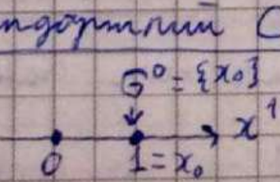
(наприклад, у $\mathbb{R}^2$ це опуклий багатокутник, [redacted] вершини якого належать до A, але, взагалі кажучи, не усі точки A — вершини).

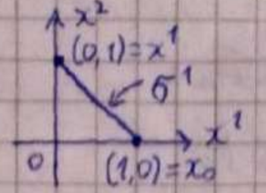
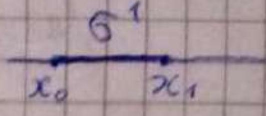
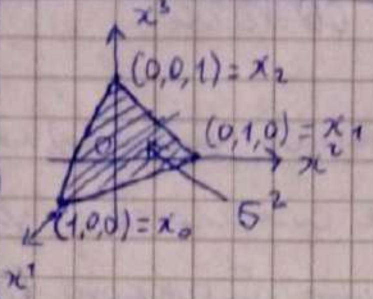
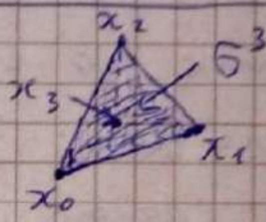
Впр. 31.0. Усі евклідові n-вим. симплекси гомеоморфні D^n (з індук. топ.)

Ex 31.1 Стандартний n-вим. симплекс у $\mathbb{R}^{n+1}$:

$\sigma^n := \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \forall i\ x^i \ge 0, \sum_{i=1}^{n+1} x^i = 1\}$. Оскільки [redacted] $(x^1, \dots, x^{n+1}) = x^1(1,0,\dots,0) + \dots + x^{n+1}(0,\dots,0,1)$, згідно з описан. вище, це опукла оболонка точок $x_0 = (1,0,\dots,0), \dots, x_n = (0,\dots,0,1)$, і вони дійсно не лежать ні в якому $(n-1)$-вим. аф. підпр. $\mathbb{R}^{n+1}$ (Впр.), тому це n-вим. симплекс з вершинами $x_0, \dots, x_n$.

Rem Тобто, симплекси — це:

	Стандартний $\subset \mathbb{R}^{n+1}$	Довільний $\subset \mathbb{R}^n$
$n=0$: точка	$\sigma^0 = \{x_0\}$ 	$\{x_0\} = \sigma^0 = \mathbb{R}^0$

$n=1$: відрізок		
$n=2$: трикутник		
$n=3$: тетраедр	Не вмісно намалювати $\mathbb{R}^4$:(	

Rem Якщо $\sigma^n \subset \mathbb{R}^m$ – симплекс з вершинами $x_0, \dots, x_n$, то $\forall k \le n$ $\forall$ підмножина $\{y_0, \dots, y_k\} \subset \{x_0, \dots, x_n\}$ не лежить у жодному $(k-1)$-вим. аф. підпросторі $\mathbb{R}^m$ (бо інакше $x_0, \dots, x_n$ лежали б у $(n-1)$-вимірному – додавання точки збільшує вимірність афінної оболонки максимум на 1), тобто $\operatorname{conv}\{y_0, \dots, y_k\}$ – k-вимірний симплекс з вершинами $y_0, \dots, y_k$ (при $k=0$ це просто одна з вершин $\{x_i\}$, при $k=n$ – сам σ^n)

def 3.12 Симплекс $\sigma^k = \operatorname{conv}\{y_0, \dots, y_k\}$ для $\{y_0, \dots, y_k\} \subset \{x_0, \dots, x_n\}$ зветься k-вимірною гранню $\sigma^n = \operatorname{conv}\{x_0, \dots, x_n\}$. 1-вимірні грані звуться його ребрами.

Rem Усього різних k-вим. граней C_{n+1}^{k+1}.

def 3.13 n-вимірним топологічним симплексом у топологічному просторі X зветься будь-яка підмножина вигляду $\sigma^n = \varphi(\sigma^n_E)$, де $\sigma^n_E \subset \mathbb{R}^m$ – n-вим. евкл. симплекс, а $\varphi: \sigma^n_E \to \sigma^n$ – гомеоморфізм (відносно індукованих топологій). Образи вершин і k-вим. граней σ^n_E тоді звуться вершинами і k-вим. гранями σ^n.

Rem. З def. k-вим. грані n-вим. топ. симплекса є k-вимірними топ. симплексами.

Ex 3.12 поверхні M:

Rem. Тобто n-вим. топологічний симплекс — образ n-вим. евклідового при вкладенні φ.

def 3.14 Сукупність топологічних симплексів $\mathcal{A} = \{\sigma^{n_\alpha}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ у топ. просторі X зветься його *триангуляцією*, якщо:

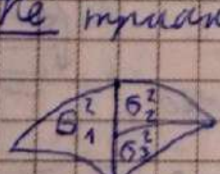
1. $\mathcal{A}$ — покриття X: $X = \bigcup_{\alpha \in A} \sigma^{n_\alpha}_\alpha$ фундаментальне, тобто $V \subset X$ замкнена $\Leftrightarrow$ $V \cap \sigma^{n_\alpha}_\alpha$ замкн. $\forall \alpha \in A$. Зокрема, топ. симплекси $\mathcal{A}$ замкнені.
2. $\forall$ симплекса $\sigma^{n_\alpha}_\alpha \in \mathcal{A}$ усі його грані також належать до $\mathcal{A}$.
3. $\forall$ симплексів $\sigma^{n_\alpha}_\alpha, \sigma^{n_\beta}_\beta \in \mathcal{A}$ або $\sigma^{n_\alpha}_\alpha \cap \sigma^{n_\beta}_\beta = \varnothing$, або $\sigma^{n_\alpha}_\alpha \cap \sigma^{n_\beta}_\beta = \sigma^{n_\gamma}_\gamma \in \mathcal{A}$ — спільна n_γ-вимірна грань цих симплексів $(0 \leq n_\gamma \leq \min\{n_\alpha, n_\beta\})$.

У цьому випадку пара $(X, \mathcal{A})$ зветься *симпліційним простором* (або симпл. ко́мпле́ксом).

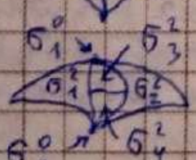
Pr 3.10 Якщо σ^n — n-вим. топ. симплекс у m-вимірному многовиді M, то $n \leq m$. ▷ Б/д; аналогічно топ. інваріантності вимірності (п. 7 Pr 2.9.2). ◁

Rem. Тобто $\forall$ триангуляція n-вимірного многовиду складається з симпл. вимірностей $0, 1, \ldots, n$, при цьому обов'язково $\in$ n-вимірні (теж б/д), а отже й усі менших вимірностей — їхні грані. Зокрема, $\forall$ триангуляція поверхні складається з топ. трикутників, відрізків (ребер) і точок (вершин).

Ex 3.13 *Не* триангуляції поверхні:



$\sigma^2_1 \cap \sigma^2_2$ — частина ребра σ^2_1, а не ціле ребро.



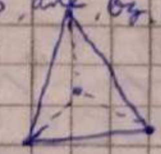
$\sigma^2_1 \cap \sigma^2_2 = \sigma^0_1 \sqcup \sigma^0_2$ — дві різні вершини.

Th 3.11 (Радо) $\forall$ поверхні $\exists$ триангуляція. Якщо поверхня компактна, то $\exists$ скінченна (тобто зі скінченної кількості симплексів) триангуляція.

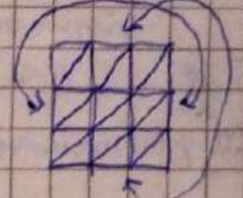
▷ Див. частковий випадок у [10, с. 35]. ◁ (Тут посилання на літературу за загальним списком у конспекті є усім)

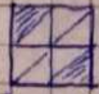
Рем. Ця теорема вірна для многовидів вимірності ≤ 3, але, взагалі кажучи, невірна для ≥ 4

Ex 3.14 Для S^2 найпростіша тріанг. поверхня виглядає як тетраедра:



Для T^2 використаємо опис $[0,1]^2/\sim$ (як у Ex.16.3), тоді одна з тріанг.:

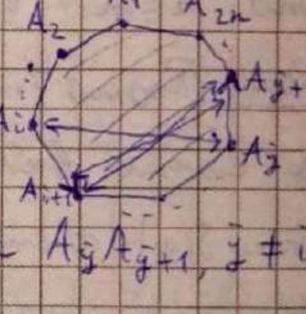


(Зауважимо, що  — не тріанг.: відмічені трикутники перетинаються не в 3 різних вершинах, але по подвійному ребру).

Для $\mathbb{RP}^2 \cong D^2/\sim$ (див. Ex.18.5: круг з ототожненням діам. прот. точками на межі):

Впр 3.11 Чи буде тріанг. T^2 як вище, також тріангуляцією пляшки Клейна K^2? (тобто чи переходить це розбиття у тріанг. при відповідній факторизації?) (див. Ex.16.4.)

Def 3.15 Нехай $A_1\ldots A_{2n}$ — (опуклий) $2n$-кутник у $\mathbb{R}^2$ (з внутр. точками; топологія індукована стандартною). Розглянемо на ньому наступне відношення еквівалентності $\sim$:



- внутрішні точки еквівалентні лише собі.
- $\forall\, i = \overline{1,2n}$ ребро A_iA_{i+1} (тут і далі позначаємо $A_{2n+1} := A_1$) ототожнюється рівно з одним ребром A_jA_{j+1}, $j \neq i$ одним з двох способів:
  - або $tA_i + (1-t)A_{i+1} \sim tA_j + (1-t)A_{j+1}$ $\forall t \in I$ (як на малюнку);
  - або $tA_i + (1-t)A_{i+1} \sim (1-t)A_j + tA_{j+1}$ $\forall t \in I$:

Якщо при цьому факторпростір $A_1\ldots A_{2n}/\sim$ гомеоморфний поверхні M, то $A_1\ldots A_{2n}$ разом з $\sim$ зветься розгорткою M.

Рем. У т.ч. розглядатимемо двокутники (круги): A_1 A_2 з параметризацією ребер кутом.

Пс 3.11 $\forall\, A_1\ldots A_{2n}$ з $\sim$ як у def $A_1\ldots A_{2n}/\sim$ — компактна зв'язна поверхня.

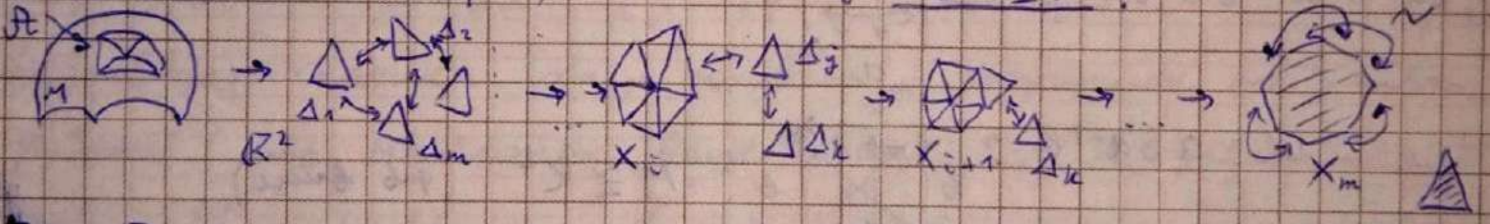
▷ Впр 3.12 Перевірити, що це 2-вимірний многовид (підказка: розглянути окремо образи внутр. точок з околами вигляду, внутр. точок ребер з околами (аж-но до доведення у Ex.16.1.) і вершин з околами).

Див. також [13, с. 88-91].

Оскільки $A_1\ldots A_{2n}$ компактний у $\mathbb{R}^2$ (обмежений і замкнений) і зв'язний (опуклий), $A_1\ldots A_{2n}/\sim$ компактний за Cor 20.2 і зв'язний за Cor 23.3 ◁

Th 31.12 ∀ компактної зв'язної поверхні M існує розгортка.

D (Ідея) За Th 31.1 Радо, у M ∃ скінченна триангуляція A. Розріжемо її на окремі трикутники $\{\Delta_i\}_{i=1}^{m}$ і розмістимо їх (їхні гомеоморфні образи) у $\mathbb{R}^2$ так, що вони не перетинаються. Тоді M гомеоморфна фактор-простору $\left(\bigsqcup_{i=1}^{m}\Delta_i\right)/\sim$ топ. суми цих трикутників за деякою відн. еквівалентності, що з'єднує їхні ребра (по 2) і вершини. Зробимо скінч. кількість (m) кроків, поклавши на першому $X_1=\Delta_1$, на другому – $X_2=\Delta_1\sqcup\Delta_i/\sim$ (цей тр-к гомеоморфний 4-кутнику у $\mathbb{R}^2$), де $\sim$ – склеювання Δ_1 з якимось Δ_i по ребру, ..., на m-тому – $X_m=X_{m-1}\sqcup\Delta_j/\sim$ (і отримуємо $(m+2)$-кутник) – знову приклеюємо тр-к. Оскільки M – зв'язна, на кожному кроці знайдеться, що приклеїти, і X_m – це $2n$-кутник (де $2n=m+2$ і який можна зробити опуклим гомеоморфізмом $\mathbb{R}^2$) такий, що $M\cong X_m/\sim$, де $\sim$ – як у def. 31.5:



Rem Поставимо у відповідність кожній розгортці $A_1\dots A_{2n}$ разом з $\sim$ як у def. 31.5 слово W вигляду $b_1^{\varepsilon_1}\dots b_{2n}^{\varepsilon_{2n}}$, де

– кожна з b_i – це одна з літер $a_1,\dots,a_n$, причому кожна з a_n зустрічається рівно 2 рази

– $\forall\, i$ $\varepsilon_i=\pm1$, причому пара $\dots \underset{i}{a_k^{\varepsilon_i}} \dots \underset{j}{a_k^{\varepsilon_j}}\dots$ означає, що ребра A_iA_{i+1} і A_jA_{j+1} склеюються:

– першим способом з def. 31.5 (у прямому порядку), якщо $\varepsilon_i=\varepsilon_j$;

– другим способом з def. 31.5 (у оберненому порядку), якщо $\varepsilon_i=-\varepsilon_j$.

Іншими словами, ми записуємо W, обходячи розгортку і позначаючи кожні два ребра, що ототожнюються, парою однакових літер у степенях, що відповідають типу ототожнення.

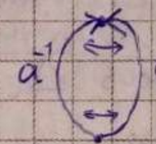
def. 31.6. Дві розгортки назвемо еквівалентними, якщо поверхні що їх відповідають, гомеоморфні. Два слова w_1 і w_2 будемо звати еквівалентними ($w_1 \sim w_2$), якщо розгортки, що їх відповідають, еквівалентні (зокрема однакові).

Rem. Зокрема, ∀ слово можна "читати" з будь-якого місця, циклічно переставляючи літери:

$$b_1^{\varepsilon_1} b_2^{\varepsilon_2}\dots b_{2n}^{\varepsilon_{2n}} \sim b_2^{\varepsilon_2}\dots b_{2n}^{\varepsilon_{2n}} b_1^{\varepsilon_1} \sim \dots \sim b_{2n}^{\varepsilon_{2n}} b_1^{\varepsilon_1}\dots b_{2n-1}^{\varepsilon_{2n-1}}$$

(бо це одна й та сама розг.), у зворотньому порядку або замінивши ∀ ε_i на протилежні — це все екв. перетворення.

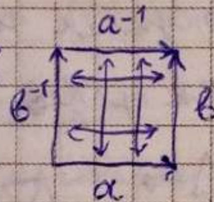
Ex. 31.5.

$W = aa^{-1}$ ($\sim a^{-1}a$) : 

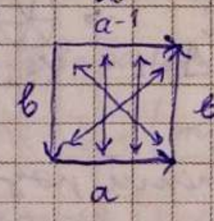
: $M \cong S^2$ (чому?)

$W = aa$: 

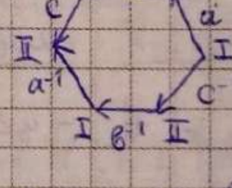
: $M \cong \mathbb{R}P^2$ (див. вище).

$W = aba^{-1}b^{-1}$: ($\sim ba^{-1}b^{-1}a \sim b^{-1}a^{-1}ba \sim \dots$) 

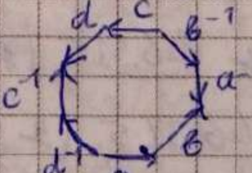
: $M \cong T^2$ (див. вище).

$W = aba^{-1}b$: 

: $M \cong K^2$ (див. вище)

Впр. 31.3. Показати, що $W = abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$: 

теж задає T^2, тобто $aba^{-1}b^{-1} \sim abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$ (при цьому для другої розгортки вершини склеюються вже не в одну, а в дві, див. малюнок). Бачимо, що слова з різною кільк. літер теж можуть бути еквівалентними.

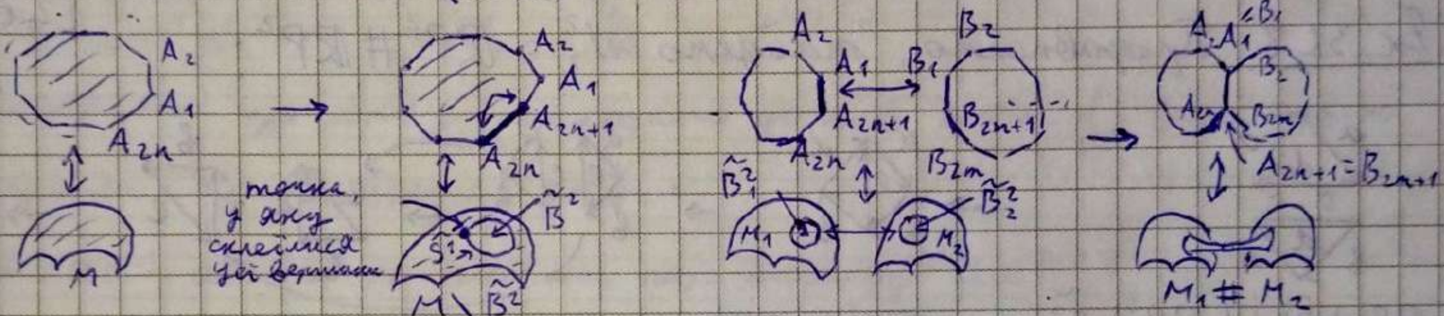
Rem. $W = aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$: 

задає $M_2^2 = T^2 \# T^2$

(крендель ), але побачити це вже не так просто (див. ілюстрацію у [13, с.91-94] або [9, с.299-301]).

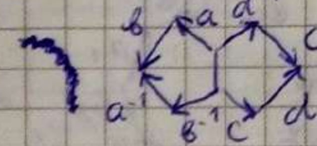
Опишемо зв'язну суму у термінах розгорток. Нехай $(A_1 \dots A_{2n}, \sim)$ (що відп. W) — розгортка M_1, топ. образ круга
така, що всі вершини ототожнюються

$\tilde{\mathcal{D}}^2 \subset M$ — як у def. 30.2 зв'язної суми. Тоді $M \setminus \tilde{B}^2$ ($\tilde{B}^2 = \mathrm{Int}\,\tilde{\mathcal{D}}^2$) гомеоморфна фактор-простору $A_1 \ldots A_{2n}A_{2n+1}/\sim$, де для ребер $A_1A_2, \ldots, A_{2n-1}A_{2n}$ ми зберегли ті ж ототожнення, $A_{2n+1}A_1$ ототожнюємо як раніше $A_{2n}A_1$, $A_{2n}A_{2n+1}$ (внутр. точки) не ототожнюємо ні з чим. При цьому A_{2n} і A_{2n+1} все одно ототожнюються, тому $A_{2n}A_{2n+1}/\sim \;\cong S^1$ (як у Ex.16.5). Воно й відповідає $\tilde{S}^1 = \partial\tilde{\mathcal{D}}^2$ (б/д):



(це відповідає приписуванню до W "зайвої" літери c) Т.ч., якщо зробити це для M_1 і M_2, то $M_1 \# M_2 = M_1\setminus\tilde{B}_1^2 \sqcup M_2\setminus \tilde{B}_2^2/\sim$ відповідає склейка їхніх "доповнених" розгорток по зайвих ребрах (див. малюнок вище). Якщо M_1 і M_2 задавалися словами W_1 і W_2 відп., то $M_1\#M_2$ т.ч. відповідає $W = W_1W_2$. При цьому усі вершини цієї розгортки також ототожнюються.

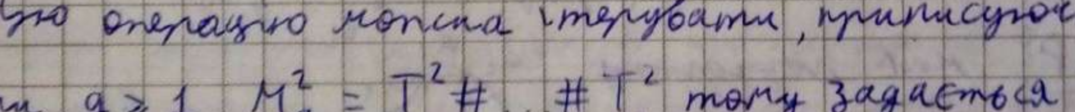
Ex.31.6 Отже, $T^2 \# T^2$ дійсно відповідає



$aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$.

Цю операцію можна ітерувати, приписуючи нові слова. Зокрема, при $g \geq 1$ $M_g^2 = \underbrace{T^2\#\ldots\#T^2}_{g}$, тому задається $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$. Ан-но для N_g^2 (див. нижче)

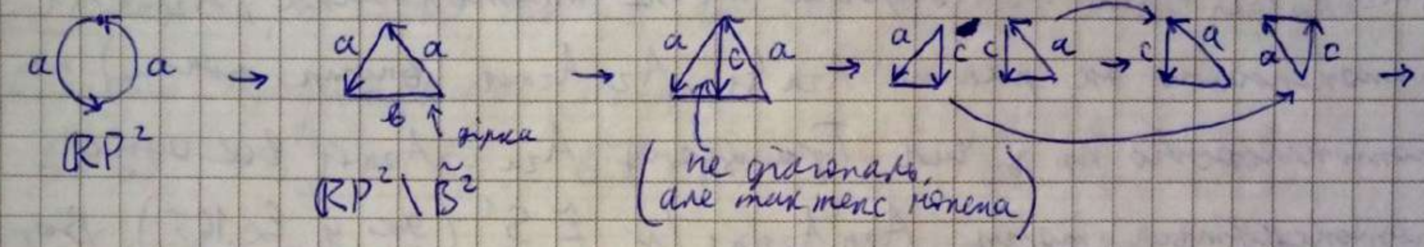
Rem. Розгортки (у т.ч. "узагальнені" як вище) можна переклеювати, переходячи до еквівалентних (і до екв. слів), розрізаючи і склеюючи, як на малюнку:

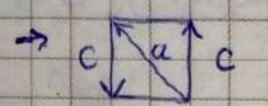


(далі не будемо вказувати степені на розгортках, стрілок достатньо).

(c відп. діагоналі $A_1\ldots A_{2n}$) Тут посередині — не розгортка, але факторизація цієї топ. суми 2 багатокутників дає той же результат, що розгортки зліва і справа.

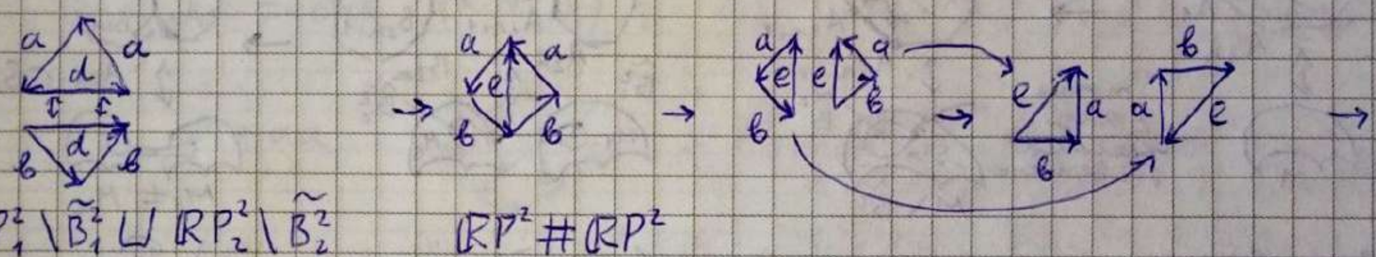
Ex. 31.7. Виріжемо дірку у проективній площині $\mathbb{RP}^2$:

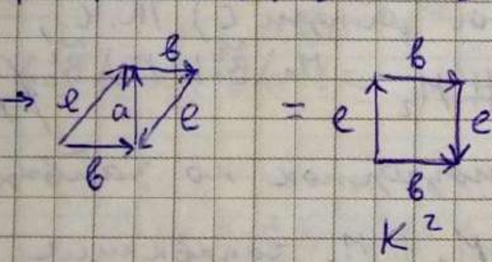




Тобто $\mathbb{RP}^2\setminus\tilde{B}^2 \cong$ листу Мебіуса (Ex. 16.2)! Див. також [2, с. 61-64].

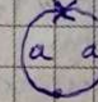
Ex. 31.8. Продовжимо. Знайдемо $N_2^2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$:

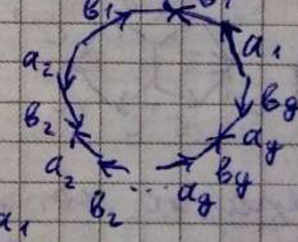


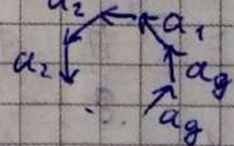


Отже, $\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2 \cong K^2$!

(див. також ілюстрацію 10 у [9, с. 308]) ■.

Cor. 31.1. $M_0^2 = S^2$ має розгортку , що відп. слову aa^{-1}.

$M_g^2 = \underbrace{T^2\#\ldots\#T^2}_{g}$ (при $g>0$) має розгортку , що відп. слову $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$.

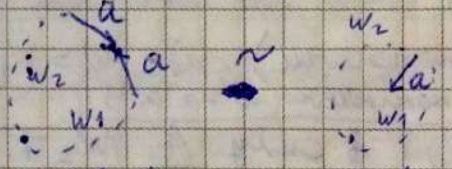
$N_g^2 = \underbrace{\mathbb{RP}^2\#\ldots\#\mathbb{RP}^2}_{g}$ має розгортку , що відп. слову $a_1a_1a_2a_2\ldots a_ga_g$.

▷ (Перша частина доведення теореми класифікації Th. 30.1.) Ми будемо слідувати [10, с. 35-42]. Див. також [13, с. 97-111]. Тут ми доведемо, що $\forall$ компактна зв'язна поверхня M гомеоморфна деякій M_g^2 при $g\in\mathbb{Z}_+$ або N_g^2 при $g\in\mathbb{N}$. Для цього ми розглянемо довільну її розгортку (що $\exists$ за Pr. 31.2) і будемо її перекleювати, поки вона не набуде вигляду як у Cor. 31.1.

Отже, нехай дана розгортка відповідає слову W.

Лем. 31.1. Якщо $W \neq aa^{-1}$ або $a^{-1}a$, то $W \sim W'$, де у слові W' немає послідовних пар вигляду aa^{-1} або $a^{-1}a$ (у т.ч. на кінцях: $a^{-1} \ldots a$ або $a \ldots a^{-1}$).

▷ Просто прибираємо відповідні ребра розгортки (скінч. кількість раз):



$W_1 a a^{-1} W_2 \sim W_1 W_2$. ◭

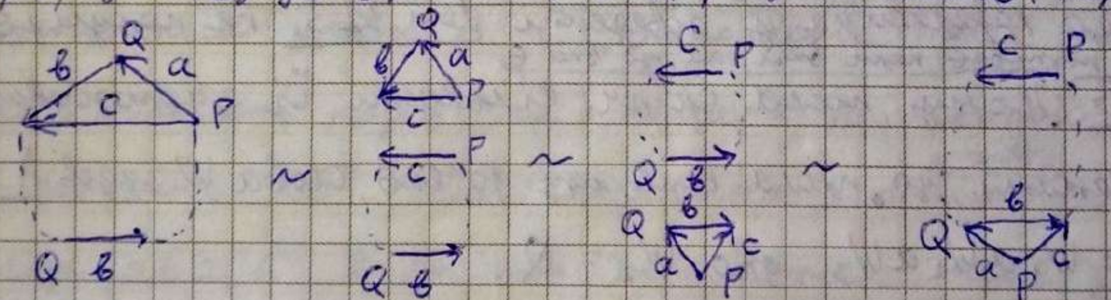
Застосувавши цю лему, переходимо до екв. слова (і відп. екв-ної розгортки), що задовольняє умові:

A. $W = aa^{-1}$ або W не містить пар вигляду aa^{-1}.

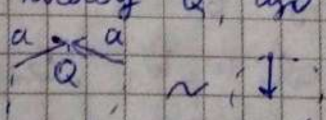
(для $a^{-1}a$ просто замінимо a на a^{-1}).

Лем. 31.2. $W \sim W'$, де W' відповідає розгортка, усі вершини якої ототожнюються.

▷ Нехай $\exists$ принаймні два різних класа екв-сті вершин, і a — ребро, що поєднує вершини P і Q різних класів. Переклеїмо:



(тобто склеюємо за ребром b, що наступне за a, один з кінців якого — Q.) Напрямок b тут неістотний). У новій (екв-ній) розгортці на одну вершину, що екв-на P, більше, і на одну, що екв-на Q, менше, кількість вершин у інших класах екв-сті [redacted] не змінюється. Зробивши скінч. кількість таких кроків, ми залишимося з 1 вершиною з класу Q, що з необхідністю буде розташована як



, тому після переходу до екв-ної розгортки цього класу не залишиться. Ан-но вчиняємо з усіма класами екв-ті, доки не залишиться один. ▲

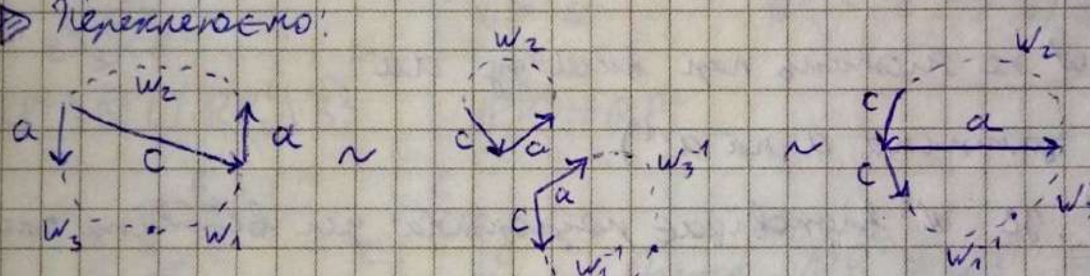
Т.ч., можемо вважати, що після переходу до екв-ного слова W крім А. задовольняє також

В. Розгортка, що відп. W, має лише один клас екв-ті вершин.

Для $\forall$ ребра розгортки літера a, що йому відповідає, входить у W одним з 2 способів: або $W = W_1 a W_2 a W_3$, де W_1, W_2, W_3 не містять a чи a^{-1} (і можуть бути порожніми), або $W = W_1 a W_2 a^{-1} W_3$,
(якщо це $W_1 a^{-1} W_2 a W_3$, просто поміняємо a на a^{-1})
де також W_1, W_2, W_3 не містять a чи a^{-1}, і в силу А. $W_2 \neq \varnothing$ і ($W_1 \neq \varnothing$ або $W_3 \neq \varnothing$). Для першого з них маємо:

Лем. 31.3. $W_1 a W_2 a W_3 \sim W_1' a a W_2'$.

▷ Переклеюємо:



$W_1 a W_2 a W_3 \quad \sim \quad W_1' c c W_2'$

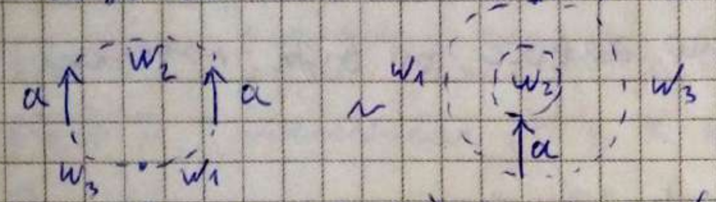
Залишилося перепозначити c знову через a. ▲

Зауважимо, що переклейка у доведенні Лем. 31.3. не порушує
(та не розриває пари вит. aa, що вже є)
умови А. та В. Тому, після скінч. кількості її застосувань, ми можемо вважати, що після переходу до екв. слова W задов. А.–С., де

С. Якщо $W = W_1 a W_2 a W_3$, то $W_2 = \varnothing$.

Лем. 31.4. Нехай $W = W_1 a W_2 a^{-1} W_3$ задов. умовам А.–С. Тоді $\exists\, b \in W_2$ така, що $b^{-1} \in W_1$ або $b^{-1} \in W_3$.
(Тобто $W = W_1 a W_2' b W_2'' a^{-1} W_3' b^{-1} W_3''$ або $W = W_1' b^{-1} W_1'' a W_2' b W_2'' a^{-1} W_3$, або ан-но з заміною b і b^{-1} місцями).

▷ Нехай такої b (тобто пари ребер) не існує, тобто $\forall\, b \in W_2$ або входить в пару $bb \subset W_2$ (за С.), або в пару $b \ldots b^{-1}$ чи $b^{-1} \ldots b$, де $b^{-1} \in W_2$. Тоді те ж вірне і для $W_3 W_1$: слова W_2 і $W_3 W_1$ складаються з пар літер, що відп. [redacted] многочпар ребер, що не перетинаються. Це означає, що початок і кінець a належать до різних класів екв-сті вершин:

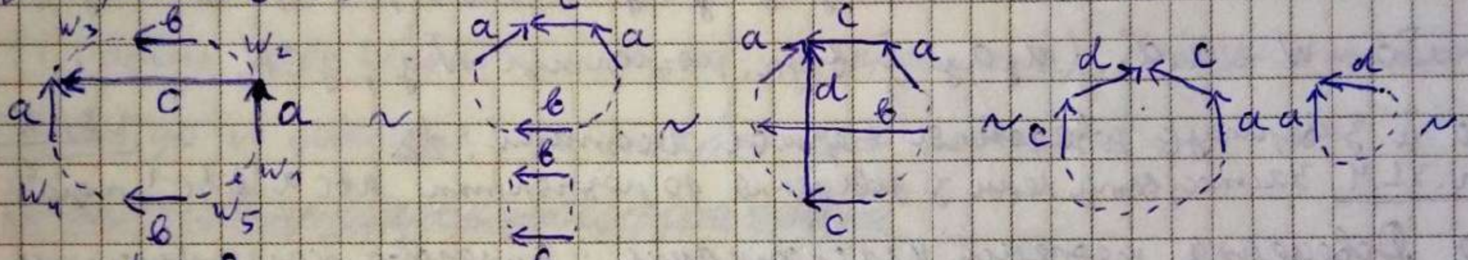


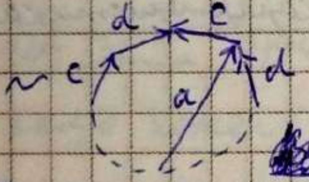
не існує екв-сті, що ототожнює [redacted] початок a (що належить також до ребер з W_3W_1) і кінець (що є до ребер з W_2). Це суперечить В. △

Після очевидних екв-стей (заміни літер або циклічних перестановок) можемо вважати, що $\forall$ пари $a \dots a^{-1}$ маємо $W = W_1 a W_2 b W_3 a^{-1} W_4 b^{-1} W_5$ (де $W_1 - W_5$ не містять a, a^{-1}, b, b^{-1}).

Лем. 31.5. $W_1 a W_2 b W_3 a^{-1} W_4 b^{-1} W_5 \sim W_1' a b a^{-1} b^{-1} W_2'$.

▷ Переклеюємо:





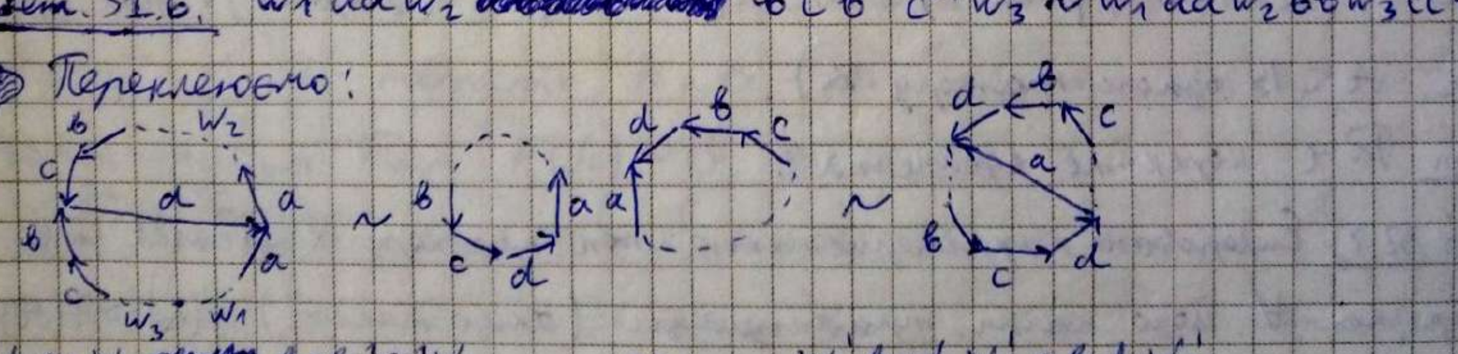
Залишилося перепозначити $a := d$, $b := c$. △

[redacted]

Зауважимо, що при переклеюваннях з доведення Лем. 31.5 не порушуються умови A.–C. та не розриваються четвірки вигляду $aba^{-1}b^{-1}$, що вже є. Виконавши тепер цю операцію скінч. кількість разів, ми прийдемо до екв-ного слова, що або дорівнює aa^{-1}, або складається з пар aa і четвірок вигляду $aba^{-1}b^{-1}$. Коли воно складається лише з таких пар, це розгортка N_g^2, лише з четвірок – M_g^2. А якщо ні?

Лем. 31.6. $W_1 a a W_2$ [redacted] $b c b^{-1} c^{-1} W_3 \sim W_1 a a W_2' b b W_3' c c W_4'$.

▷ Переклеюємо:



$W_1 a a W_2$ [redacted] $b c b^{-1} c^{-1} W_3 \sim W_1' b c d W_2' c b d W_3'$

Після трьох застосувань Лем. 31.3. і перепозначень отримаємо потрібний результат. △

Cor. 31.2. $\mathbb{R}P^2 \# T^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.

▷ Просто застосуємо цю операцію до розгортки (слова) $aabcb^{-1}c^{-1}$, що відп. поверхні зліва, і отримаємо $aabbcc$, що відп. поверхні справа. △

Знову ж, операції у доведенні Lem. 31.6. не порушують пари вигл. aa та четвірки вигл. $aba^{-1}b^{-1}$, що вже є. Т.ч., застосувавши цю лему скінченне число раз, отримаємо що після переходу до еквівалентного:

- або $w = aa^{-1}$ і відп. розгортці $S^2 = M_0^2$;
- або $w = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ і відп. розгортці M_g^2, $g \in \mathbb{N}$.
- або $w = a_1a_1 \dots a_g a_g$ і відп. розгортці N_g^2, $g \in \mathbb{N}$,

що й завершує доведення першої частини. △ 3 Впр. 31.3.

Впр. 31.4 Застосувати леми з доведення до розгортки $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$ тора.

32. Доведення теореми класифікації: ейлерова характеристика та орієнтовність

def. 32.1. Нехай $\mathcal{A}$ – скінченна тріангуляція топ. простору X, що має c_k симплексів вимірності k, $k = \overline{0,m}$. Тоді її ейлеровою характеристикою зветься $\chi(\mathcal{A}) := \sum_{k=0}^{m} (-1)^k c_k$.

Th. 32.1. Ейлерова характеристика не залежить від вибору тріангуляції та є топологічним інваріантом простору. Тобто $\forall$ топ. пр. X і Y та $\forall$ їхніх скінч. тріангуляцій $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ відп. якщо $X \cong Y$ (X гомеоморфний Y), то $\chi(\mathcal{A}) = \chi(\mathcal{B})$ (зокрема, $\forall$ двох скінч. тріанг. $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ одного простору X).

Rem. Т.ч., коректне означення:

def. 32.2. Ейлеровою характеристикою топ. простору X зветься ейл. хар-ка $\forall$ його скінч. тріангуляції (якщо такі $\exists$) $\chi(X) := \chi(\mathcal{A})$.

Cor. 32.1. Якщо у X і Y $\exists$ скінч. тріангуляції і $X \cong Y$, то $\chi(X) = \chi(Y)$.

Rem. Тут існування скінч. тріанг. достатньо вимагати лише

Від одного з просторів в силу наступної конструкції:

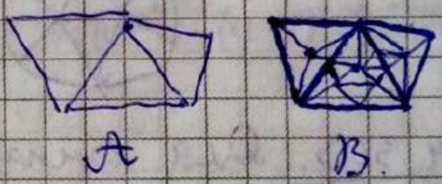
Def 32.3 Нехай A - тріанг. X, $F: X \to Y$ - гомеоморфізм. Тоді $F(A) := \{F(\sigma^n) \mid \sigma^n \in A\}$ будемо називати образом A під дією F (перенесенням A з X на Y за допомогою F).

Rem. $\forall$ топ. симплекса $\sigma^n \in A$ $\sigma^n = \varphi(\sigma^n_E)$, де σ^n_E - n-вим. евкл. симплекс і $\varphi: \sigma^n_E \to \sigma^n$ - гомеоморфізм. Тоді $F(\sigma^n) = (F \circ \varphi)(\sigma^n_E)$ буде топ. симплексом у Y. Всі вимоги з def 31.4 тріангуляції, очевидно, зберігаються для $F(A)$, як і скінченність та ейл. хар-ка.

Cor 32.2. $F(A)$ - тріангуляція Y, скінч., якщо A - скінч., і $\chi(F(A)) = \chi(A)$.

Rem. Ми доведемо Th. 32.1. у курсі "Основи алгебраїчної топології" (і навіть для слабшого відн. екв-ті просторів). Наведемо ще один шлях до її доведення, що працює для поверхонь:

Def 32.4. Тріангуляція B зветься розбиттям тріангуляції A, якщо кожен симплекс B є підмножиною деякого симплекса A. Дві тріангуляції A і B простору X звуться еквівалентними ($A \sim B$) якщо мають спільне розбиття, тобто $\exists$ тріангуляція C пр. X така, що C - розбиття як A, так і B.



Pr. 32.1. Це відношення екв-ті тріангуляцій X.

▷ Впр 32.1 (показати принаймні для скінч. тріанг. поверхонь) ◁

Th. 32.2. (Hauptvermutung для поверхонь) (Радо)
Нехай M і N - поверхні, A і B - їхні тріангуляції, $F: M \to N$ - гомеоморфізм. Тоді $F(A) \sim B$. ▷ Див. [22] ◁

Rem. (як і Th. 31.1) Це твердження вірне також для 3-вимірних (і 1-вим.) многовидів, але не для більшої вим. і не для загальних просторів.

Pr. 32.2. Якщо скінченна тріангуляція B є розбиттям скінч. тріанг. A, то $\chi(B) = \chi(A)$.

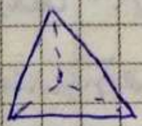
▷ Упр 32.2 (показати для поверхонь) △

Cor. 32.3 Для скінч. тріангуляцій $A \sim B \Rightarrow \chi(A) = \chi(B)$.
▷ Якщо C – спільне розб., то $\chi(A) = \chi(C) = \chi(B)$. △

Rem. Т.ч. маємо доведення Th. 32.1 для компактних поверхонь: ▷ Якщо $M \cong N$: $F: M \to N$ – відп. гомеоморфізм, то $\forall$ скінч. тріанг. A і B пов. M і N відп. $\underbrace{\chi(A)}_{\chi(M)=} \overset{!}{=} \chi(F(A)) = \left[\underset{\text{Th. 32.2}}{\overset{\text{Cor. 32.3}}{}}\right] = \chi(B) = \chi(N)$ △

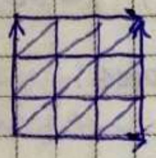
Ex. 32.1 Для поверхонь використовують традиційні позначення: $C_0 = V$ (vertices) кільк. вершин, $C_1 = E$ (edges) кільк. ребер, $C_2 = F$ (faces) кільк. граней (трикутників), отже $\chi(M) = V - E + F$.

S^2:



$V = 4$, $E = 6$, $F = 4$, тому $\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$.

T^2:



$V = 9$, $E = 27$, $F = 18$, тому $\chi(T^2) = 9 - 27 + 18 = 0$.

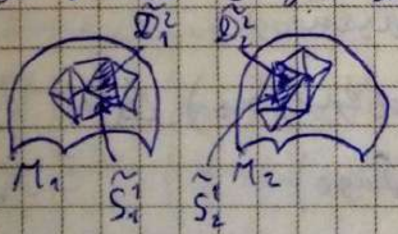
$\mathbb{R}P^2$:

$V = 6$, $E = 15$, $F = 10$, тому $\chi(\mathbb{R}P^2) = 6 - 15 + 10 = 1$.

Pr. 32.3. Для компактних зв'язних поверхонь M_1 і M_2

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$$

▷ Зауважимо, що у M_1 і M_2 $\exists$ скінч. тріанг. за Th. 31.1, а отже визначені ейл. хар-ки, як і у $M_1 \# M_2$.



Ідея: побудувати тріангуляції M_1 і M_2 так, щоб $\tilde{D}_1^2$ і $\tilde{D}_2^2$ (топ. диски, за якими ми клеїмо) були топ. трикутниками цих тріангуляцій (а $\tilde{S}_1^1$ і $\tilde{S}_2^1$ складалися з їхніх ребер). Або навпаки: для довільних 2 скінч. тріанг. обрати $\tilde{D}_1^2$ і $\tilde{D}_2^2$ саме так. Нехай V_1, E_1, F_1 і V_2, E_2, F_2 – кількості вершин, ребер, граней цих тріанг. M_1 і M_2 відп. Тоді, об'єднавши попарно ребра $\tilde{S}_1^1$ і $\tilde{S}_2^1$, ми отримаємо трі-

тріангуляцію $M_1 \# M_2$, для якої:

$F = F_1 + F_2 - 2$ (викинули $\tilde{D}_1^2$ і $\tilde{D}_2^2$),

$E = E_1 + E_2 - 3$ (ототожнили ребра попарно),

$V = V_1 + V_2 - 3$ (ототожнили вершини попарно),

тому $\chi(M_1 \# M_2) = V - E + F = (F_1 + F_2 - 2) - (E_1 + E_2 - \cancel{3}) + (V_1 + V_2 - \cancel{3}) =$

$= (V_1 - E_1 + F_1) + (V_2 - E_2 + F_2) - 2 = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$. ▲

Cor. 32.4. 1. $\chi(M_g^2) = 2 - 2g \ \forall g \in \mathbb{Z}_+$. Зокрема, $M^2_{g_1} \not\cong M^2_{g_2}$ для $g_1 \neq g_2$.

2. $\chi(N_g^2) = 2 - g \ \forall g \in \mathbb{N}$. Зокрема, $N^2_{g_1} \not\cong N^2_{g_2}$ для $g_1 \neq g_2$.

▷ 1. $\chi(M_0^2) = \chi(S^2) \overset{\text{за Ex. 32.1.}}{=} 2$. Для $g > 0$:

$\chi(M_g^2) = \chi(\underbrace{T^2 \# \ldots \# T^2}_{g}) = [\text{Pr. 32.3.}] = \chi(\underbrace{T^2 \# \ldots \# T^2}_{g-1}) \# \chi(T^2) - 2 =$

$= [\text{Ex. 32.1.}] = \chi(\underbrace{T^2 \# \ldots \# T^2}_{g-1}) - 2 = \ldots = \chi(T^2) - 2(g-1) = [\text{Ex. 32.1.}] = 2 - 2g$.

2. Ан-но, $\chi(N_g^2) = \chi(\underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \ldots \# \mathbb{R}P^2}_{g}) = [\text{Pr. 32.3}] = \chi(\underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \ldots \# \mathbb{R}P^2}_{g-1}) +$

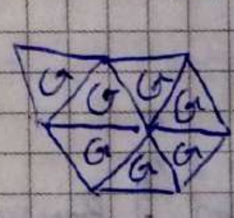
$+ \chi(\mathbb{R}P^2) - 2 = [\text{Ex. 32.1.}] = \chi(\underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \ldots \# \mathbb{R}P^2}_{g-1}) - 1 = \ldots = \chi(\mathbb{R}P^2) - (g-1) = [\text{Ex. 32.1}] =$

$= 1 - (g-1) = 2 - g$.

Негомеоморфність тоді випл. з Cor. 32.1. (тобто з Th. 32.1.). ▲

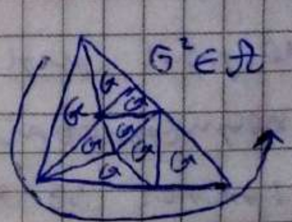
Залишилося перевірити, що поверхні з різних груп негомеоморфні!

def. 32.5. Тріангуляція A поверхні M зветься орієнтуючою, якщо на кожному її трикутнику можна обрати (один з двох) напрям обходу вершин так, що напрями, індуковані на кожному ребрі суміжними трикутниками, протилежні. M зветься орієнтовною, якщо на ній $\exists$ орієнтуюча тріангуляція, і неорієнтовною в іншому вип.



Pr. 32.4. Нехай B – розбиття тріанг. A деякої поверхні. Тоді A орієнтуюча $\Leftrightarrow$ B орієнтуюча.

▷ Ідея: кожен трикутник A – об'єднання тріан. B, тому напрям обходу його вершин



індукує узгоджені напрями обходу усіх тр-ків B, що до нього входять, і навпаки (наприклад, його можна перенести гомеоморфізмом у $\mathbb{R}^2$ і обрати там напрям, орієнтувавши $\mathbb{R}^2$ — проти годинникової стрілки або за). ▲

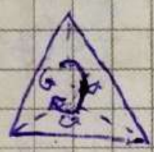
<u>Сл. 32.5.</u> $A \sim B \Rightarrow$ (A орієнтуюча $\Leftrightarrow$ B орієнтуюча).

▷ Якщо C - спільне розб., то A орієнт. $\Leftrightarrow C$ орієнт. $\Leftrightarrow B$ орієнт. ▲

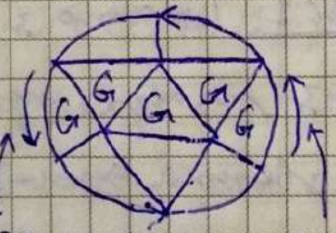
<u>Сл. 32.6.</u> Поверхня M орієнтовна $\Leftrightarrow \forall$ її тріанг. орієнтуюча.
Пов. M неорієнтовна $\Leftrightarrow$ у M $\exists$ неорієнтуюча тріанг.

▷ За <u>Тм. 32.2</u>, $\forall$ дві тріангуляції M екв-ні. За <u>Сл. 32.5</u>, вони тоді або усі орієнт., або усі неорієнт. Тоді за <u>def. 32.5</u> маємо потр. ▲

<u>Ex. 32.2.</u>

S^2 :  орієнт., тому S^2 орієнт.

T^2 :  орієнт., тому T^2 орієнт.

$\mathbb{R}P^2$:  неорієнт., тому $\mathbb{R}P^2$ неорієнт.

<u>Rem.</u> У випадку $\mathbb{R}P^2$ ми намагалися обирати напрям обходу, починаючи з деякого тр-ка (скажімо, центрального), тоді однозначно визначений напрям обходу сусідніх і т.д., поки не дійдемо до ребра, де індуковані напрями збігаються. У загалі, для компактних зв'язних поверхонь напрям обходу одного тр-ка визначає напрям усіх інших скінченної тріангуляції і дозволяє встановити орієнтовність або неорієнтовність (у загальному компактному випадку це треба робити для кожної зв'язної компоненти).

Впр. 32.3. Встановити орієнтовність для інших прикладів поверхонь (у т.ч. некомпактних).

Cor. 32.7. Орієнтовність є топологічним інваріантом поверхонь.
(і Lem. 32.5.)

▷ За Th. 32.2., якщо $F: M \to N$ – гомеоморфізм поверхонь, то $\forall$ триангул. A і B пов. M і N відп., то $F(A) \sim B$. M орієнт. $\Leftrightarrow$ [Cor. 32.6] $\Leftrightarrow$ A орієнт. $\Leftrightarrow$ [перенесимо напрями обходу за доп. F] $\Leftrightarrow$ $F(A)$ орієнт. $\Leftrightarrow$ [Th. 32.2., Cor. 32.5.] $\Leftrightarrow$ B орієнт. $\Leftrightarrow$ [Lem. 32.5., Cor. 32.6.] $\Leftrightarrow$ N орієнт. △

Pr. 32.5. Нехай M_1 і M_2 – компактні зв'язні поверхні.

1. Якщо M_1 і M_2 орієнтовні, то $M_1 \# M_2$ орієнтовна.
2. Якщо M_1 або M_2 неорієнтовна, то $M_1 \# M_2$ неорієнтовна.

▷ Впр. 32.4. △

Cor. 32.8. Усі M_g^2 орієнтовні, а усі N_g^2 неорієнтовні. Зокрема, $M^2_{g_1} \not\cong N^2_{g_2}$ $\forall g_1, g_2$.

▷ Випливає з Pr. 32.5, Ex. 32.2. і Cor. 32.7. △

Т.ч., завершення доведення Th. 30.1. (те, що різні поверхні зі списку негомеоморфні) міститься у Cor. 32.4. і Cor. 32.8.

Є також інші інваріанти, що дозволяють це встановити, наприклад, фундаментальна група (див. [13, с.231-238] та наступний курс "Основи алгебраїчної топології").