

оним $x \in V \cap U = \emptyset$, $y \notin \bar{U}$, since $y \notin \bigcap_{U \ni x} \bar{U}$.

$\Leftarrow \forall x \neq y \{x\} = \bigcap_{U \ni x} \bar{U} \Rightarrow \exists \text{ finite } U \ni x : y \notin \bar{U}$,

монотонно \exists finite $V \ni y : V \cap U = \emptyset$. \square , π . ч., X хаусдорф.

15.11. $X - T_1 \Leftrightarrow \forall x \in X \quad \{x\} = \bigcap_{U \text{ окр } x} U$

\Rightarrow . Очевидно, $x \in \bigcap_{U \text{ окр } x} U$. Покажем, что так не может быть ни одна точка: (визр.)

$\forall y \neq x \quad \exists \text{ окр } U \ni x : y \notin U \Rightarrow y \notin \bigcap_{U \text{ окр } x} U$

\Leftarrow $\forall x \neq y \quad y \notin \bigcap_{U \text{ окр } x} U$, тогда $\exists \text{ окр } U \ni x : y \notin U$. Тогда

$\exists \text{ визр. } V : x \in V \subset U, \text{ и } y \notin V$. Т.ч., X задоб. T_1 .

17.18 (X, ρ) -метр. простір, $F \subset X$ замкнена, $K \subset X$ компактна, $F \cap K = \emptyset$.

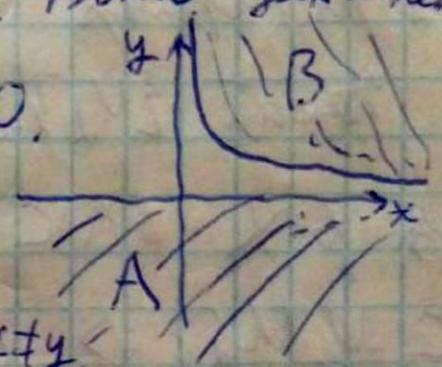
Познати $\rho(F, K) := \inf \{ \rho(x, y) \mid x \in F, y \in K \} > 0$.

$\rho(F, K) = \inf_{y \in K} \rho(F, y)$. Ф-ція $y \mapsto \rho(F, y)$ неперервна (ув. лемми). За Тн. Верштрасса вона приймає на K найм. значення, тобто $\rho(F, K) = \min_{y \in K} \rho(F, y)$. Крім того, $\forall y \in K \quad y \notin F = \bar{F} \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(F, y) > 0$ (зв'язки). Тому $\rho(F, K) > 0$.

(15.24) Компактність обмежі з множин суцільна: нехай $y \in \mathbb{R}^2$

~~Решение~~ (евклидовий) $A = \{y \leq 0\}$, $B = \{x > 0, y \geq \frac{1}{x}\}$. Вони задані, $A \cap B = \emptyset$, але $\rho(A, B) = 0$, бо $\rho\left(\left(n, -\frac{1}{n}\right), \left(n, \frac{2}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.



14.22 (X, ρ) -компактний метр. простір, $f: X \rightarrow X$ -

стислююче: $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y) \forall x, y \in X: x \neq y$.

Також $\exists! x \in X: f(x) = x$.

f - лінійне (з константою 1) \Rightarrow неперервне. Крім того, що $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ - неперервне. Також покладемо $g(x) := \rho(x, f(x)) \forall x$.

$g: X \rightarrow \mathbb{R}$ - неперервна як композиція непер. $x \mapsto (x, f(x)) \in \rho$.

$\nexists \forall x \in X: f(x) = x$. Також $g > 0$. За Тл. Вейерштраса, вона приймає найменше значення у $x_0: g(x_0) = \rho(x_0, f(x_0)) > 0$.

Але також $g(f(x_0)) = \rho(f(x_0), f(f(x_0))) < \rho(x_0, f(x_0)) = g(x_0)$, $g(x_0)$ не найменше!

Отже, $\exists x: f(x) = x$. $\nexists \exists y \neq x: f(y) = y$. Також $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y) = \rho(f(x), f(y)) \nexists$. Отже, x - єдина така.

18.E. def. X - метр. пр. $A \subset X$ звеня ε -сімка ($\forall \varepsilon > 0$), якщо $\forall x \in X \quad \rho(x, A) < \varepsilon : \exists y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon$.

Показати, що \forall сепаративно компактною $X \quad \forall \varepsilon > 0 \exists$ ε -сімка $A \subset X$.

\uparrow це не так: $\exists \varepsilon > 0 : \forall$ сімченна A не ε -сімка. Оберемо якусь $x_1 \in X$. $\{x_1\}$ не ε -сімка $\Rightarrow \exists x_2 \in X : \rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$.

Взагалі, A - не ε -сімка $\Leftrightarrow \exists x \in X : \forall y \in A \quad \rho(x, y) \geq \varepsilon$.

$\{x_1, x_2\}$ - не ε -сімка $\Rightarrow \exists x_3 \in X : \rho(x_1, x_3) \geq \varepsilon, \rho(x_2, x_3) \geq \varepsilon$.

etc. На n -тій кроці: $\exists x_n \in X : \forall i = \overline{1, n-1} \quad \rho(x_i, x_n) \geq \varepsilon$.

П.ч., побудувати послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \forall n, m \quad \rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$.

З іншого боку, X - сеп. комп. $\Rightarrow \exists$ збіжна підпослідовність

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x \in X$. Зокрема, $\exists K \in \mathbb{N} : \forall k \gg K \quad x_{n_k} \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$

$\Rightarrow \forall k, l \gg K \quad \rho(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq \rho(x_{n_k}, x) + \rho(x, x_{n_l}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

18.F. X - метр. пр. $A \subset X$ вкрай щільна $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad A$ - ε -сімка X .

$\Rightarrow \forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad B_{\varepsilon}(x)$ - вискр., $\neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in A : y \in B_{\varepsilon}(x)$,

тобто $\rho(x, y) < \varepsilon$.

18.C. \forall біжн. $U \neq \emptyset \exists x \in U \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subset U$. $A - \epsilon - c$.

$\Rightarrow \exists y \in A : \rho(x, y) < \epsilon$, тоді $y \in B_\epsilon(x) \subset U$.

18.G Метр. пр. X сев. ком. $\Rightarrow X$ сепарабельний.

$\forall n \in \mathbb{N} \exists \frac{1}{n}$ -сітка A_n , симетрна за 18.E. Тоді $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ \checkmark симетрна і ϵ -сітка $\forall \epsilon > 0$. Дійсно, $\exists n : \frac{1}{n} < \epsilon$.

$\forall x \in X \exists y \in A \subset A_n : \rho(x, y) < \frac{1}{n} < \epsilon$. За 18.F, $A - \text{вс. зчлена}$.

19.2x Чи є простір ком. компактною?

1. \mathbb{R}

Так: $\forall x \in \mathbb{R} (x-\epsilon, x+\epsilon)$ для деякого $\epsilon > 0$ - біжн. і $\overline{(x-\epsilon, x+\epsilon)} = [x-\epsilon, x+\epsilon]$ - ком.

2. \mathbb{Q} (з топ., індукованою \mathbb{Q}) $U \neq \emptyset$

Чи. Насправді \forall біжн. $U \subset \mathbb{Q}$, U - не компакт. \nearrow це не так:

~~\exists біжн. $U \subset \mathbb{Q} : \overline{U}$ - ком. U - перетин \mathbb{Q} з од'єднанним інтервалом~~

$\mathbb{R} \Rightarrow [U \neq \emptyset] \Rightarrow \exists (a, b) \subset \mathbb{R} : (a, b) \cap \mathbb{Q} \subset U$. Тоді $\overline{(a, b) \cap \mathbb{Q}} \subset$

$C\bar{U}$ - замкн. топология компакта \Rightarrow компакт (все
все в топологии \mathbb{Q}).

6.3(1). Пусть $Y \subset X$ - топология, $A \subset Y$, $\text{cl}_X A = \text{cl}_Y A$ - замкн. A
в топ. X и (индуктивно) топ. Y в значении тогда $\text{cl}_Y A = \text{cl}_X A \cap Y$.

Доказано, $\text{cl}_Y A = \bigcap_{V \text{ замкн. в } Y} V = \bigcap_{W \text{ замкн. в } X} W \cap Y = \left(\bigcap_{A \subset W} W \right) \cap Y = \text{cl}_X A \cap Y$.

Отсюда, замкн. $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ в \mathbb{Q} , - не является его замкн. в \mathbb{R}
 $[a, b]$ (до $\forall \varepsilon > 0 \forall x \in [a, b] \exists y \in (a, b) \cap \mathbb{Q} : y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap [a, b]$) и
 $\mathbb{Q} : \overline{(a, b) \cap \mathbb{Q}} = [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Т.е., $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ - комп. в \mathbb{Q} , за
заб. базис топ. комп. в $\mathbb{R} \Rightarrow$ определена и замкн. Ане
 $[a, b] \cap \mathbb{Q} = [a, b]$ (в \mathbb{R} , з. т.е. не нарушить), тогда она замкн. \mathbb{Q} .

3. \mathbb{R}^n

Тогда, аналог $\mathbb{R} : U = B_\varepsilon(x)$, $\bar{U} = \bar{D}_\varepsilon(x)$ - комп.

4. Диск.

Тогда, $U = \{x\}$: $\bar{U} = \{x\}$ - комп.

12.5. $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ - топології на X , $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

1. Чи вірно, що (X, \mathcal{T}_2) зв'язний $\Rightarrow (X, \mathcal{T}_1)$ зв'язний?

Так. ~~Вірно~~ Вірно тому, $A \subset X$ зв'язна в $\mathcal{T}_2 \Rightarrow$ зв'язна в \mathcal{T}_1 . Доведемо ерв-не: A незв'язна в $\mathcal{T}_1 \Rightarrow$ незв'язна в \mathcal{T}_2 .

A незв'язна в $\mathcal{T}_1 \Leftrightarrow \exists U, V \in \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 : A \subset U \cup V, A \cap U \neq \emptyset, A \cap V \neq \emptyset, A \cap U \cap V = \emptyset \Rightarrow A$ незв'язна в \mathcal{T}_2 .

2. \Leftarrow ?

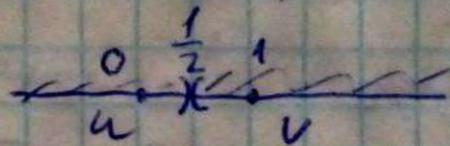
Ні. Неприклад $|X| > 1 \Rightarrow X$ зв'язна в топології мон. і незв'язна в густій.

12.4 Чи зв'язна $A = \{0, 1\}$

1. у \mathbb{R} ?

Ні: $U = (-\infty, \frac{1}{2})$, $V = (\frac{1}{2}, +\infty)$ - відкр., $A \cap U = \{0\} \neq \emptyset$, $A \cap V = \{1\}$

$\neq \emptyset$, $A \subset U \cup V$, $A \cap U \cap V \subset U \cap V = \emptyset$.



2. у \mathbb{R} з $\{(a, +\infty)\}$

Так $\exists U, V$ як вище: $U = (a, +\infty)$, $V = (b, +\infty)$. Нехай $a \leq b$.

Прогі $V \subset U \Rightarrow A \cap V = A \cap V \cap U = \emptyset$. \downarrow

3. $\exists \mathbb{R}_{T_1}$ (\mathbb{R} з кривим топ.):

Кі. $U := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $V := \mathbb{R} \setminus \{1\}$ є Δ -відкр., $A \cap U = \{1\} \neq \emptyset$,
 $A \cap V = \{0\} \neq \emptyset$, $A \subset U \cup V = \mathbb{R}$, $U \cap V = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \Rightarrow A \cap U \cap V = \emptyset$.

12.8(2). Опукати всі зб'язні підмножини \mathbb{R}_{T_1} .

Знаємо, що $\mathbb{Q} \cup \{x\} \forall x$ зб'язні зв'язки.

Але по до попередньої: якщо $A = \{x_i\}_{i=1}^n$ - скінч., $n = |A| > 1$,

то $U := \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$, $V := \mathbb{R} \setminus \{x_i\}_{i=2}^n$ - відкр., $A \cap U = \{x_i\}_{i=2}^n \neq \emptyset$,

$A \cap V = \{x_1\} \neq \emptyset$, $A \subset U \cup V = \mathbb{R}$, $U \cap V = \mathbb{R} \setminus A$, маємо $U \cap V \cap A = \emptyset$.

Отже, A незб'язна.

Насамперед $|A| = \infty$. \uparrow Яка незб'язна, маємо $\exists U, V$ як вище.

$U \cup V$ відкр. $\Rightarrow U \cup V$ відкр. $U \cup V \cap A = \emptyset$, де $|A| = \infty \Rightarrow U \cup V = \emptyset$.

Але маємо $U = \emptyset$ або $V = \emptyset$ (до \forall зб'язні неперервні перетворення) \downarrow .

Отже, A зб'язна $\Leftrightarrow A = \mathbb{Q}$, $A = \{x\}$ або $|A| = \infty$.

Це вірно і \forall нескінченного X з кривим топ.

12.14. $A \subset X$ зв'язна $\Rightarrow \forall$ відкриттою підмножиною $U \subset X$
 $A \subset U$ або $A \subset X \setminus U$.

U - в.з. у $X \Rightarrow A \cap U$ - в.з. у (індуктивна мон.) A . A - зв.
 $\Rightarrow A \cap U = A$ (може $A \subset U$) або $A \cap U = \emptyset$ (може $A \subset X \setminus U$).

12.15. $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ - зв'язні у топ. пр. X , $\forall k \in \mathbb{Z} A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset$.
Тоді $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ зв'язна.

Нехай $U \subset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ - в.з. і $U \neq \emptyset$. Тоді $\exists k: U \cap A_k \neq \emptyset$.

$U \cap A_k$ - в.з. і A_k зв. $\Rightarrow U \cap A_k = A_k$, тобто $A_k \subset U$.

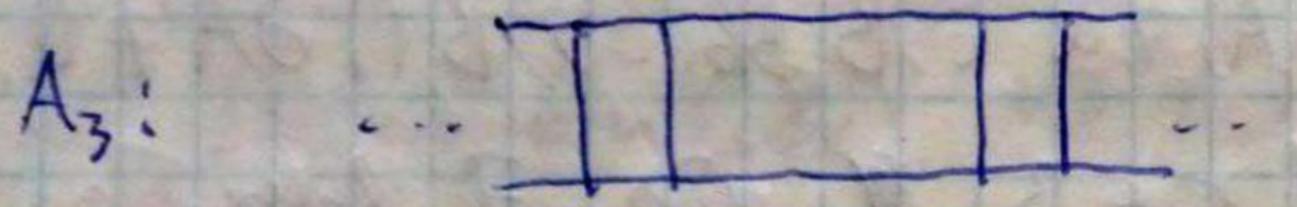
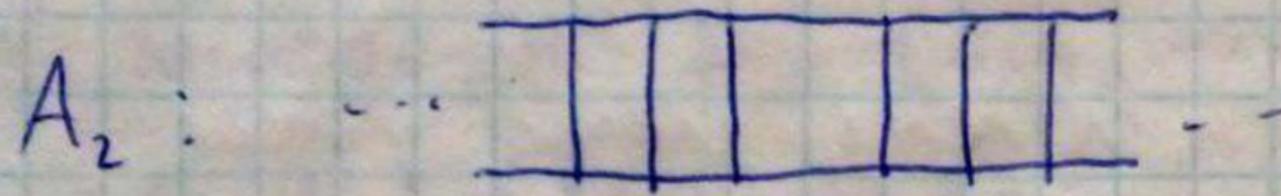
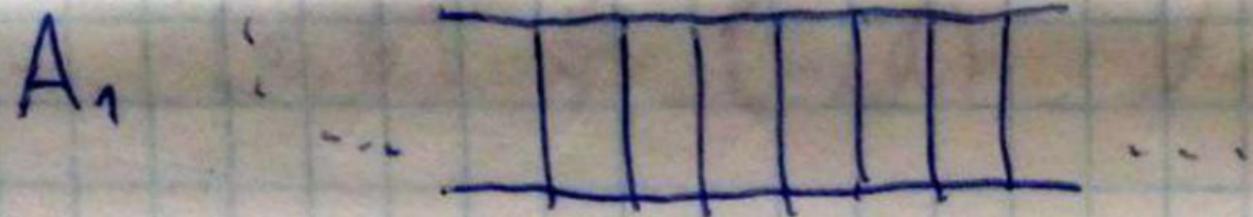
$A_{k-1} \cap A_k \neq \emptyset$ і $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset \Rightarrow A_{k-1} \cap U \neq \emptyset$ і $A_{k+1} \cap U \neq \emptyset$.

Аналог, $A_{k-1}, A_{k+1} \subset U$ etc. Т.ч., $\forall l \in \mathbb{Z} A_l \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$.

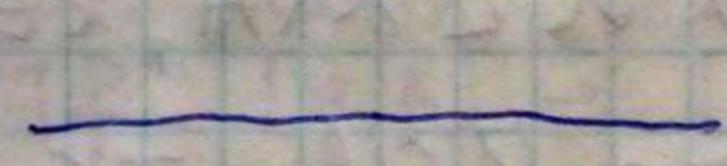
За критерієм, $\bigcup_k A_k$ - зв'язна.

12.20. Нехай $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ - зв'язні. Чи зв'язна $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$?

Взагалі кажучи, ні. Конструктивна:



etc.

$\bigcap_k A_k$: 

} зв'язні підмножини \mathbb{R}^2

- незв'язна,

12.25 X $\neq \emptyset$ 'asymmetri', $A \neq \emptyset$, $A \neq X \Rightarrow \partial A \neq \emptyset$.
 μ_1 $\partial A = \emptyset$. Π logi $\chi_{\text{int}} A = A \setminus \partial A = A$ i $\bar{A} = A \cup \partial A = A$, mod mo

A - б.з., $\neq \emptyset \Rightarrow \neq X \downarrow$.

12.26. $A, B \subset X$. $B \cap A \neq \emptyset$, $B \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \Rightarrow B \cap \partial A \neq \emptyset$.

$\begin{matrix} & & B \\ & \nearrow & \\ A & & \\ \partial A & & \end{matrix}$ $\nearrow B \cap \partial A = \emptyset$. $\text{Положи } \forall x \in B \forall \text{ око } \exists \text{ окр.}$
 $U \ni x: U \cap A = \emptyset$, тогда $U \subset X \setminus A$, $x \in \text{Int } X \setminus A$,
око $\exists \text{ окр. } U \ni x: U \cap (X \setminus A) = \emptyset$, тогда $U \subset A$, $x \in \text{Int } A$.

$\text{П.ч.}, B \subset \text{Int } A \cup \text{Int } (X \setminus A)$. B не \emptyset за окр. , $\neq \emptyset$ за окр. ,
не перем. $\Rightarrow B$ не \emptyset \downarrow . $B \cap \text{Int } A \cup B \cap \text{Int } (X \setminus A)$

12.9. X не \emptyset $\Leftrightarrow \exists \text{ супр } f \in C(X, S^0)$

$\Rightarrow \exists U, V$ - $\text{окр.}: U \neq \emptyset, V \neq \emptyset, U \cap V = \emptyset, X = U \cup V$. Положи
 $f(x) := \begin{cases} -1, & x \in U \\ 1, & x \in V \end{cases}$ кон. вызначене , $\text{супр } \cup \text{ непер.}$

(До $\text{мон. } S^0$ $\text{гускр.}, f^{-1}(\{-1\}) = U \cup f^{-1}(\{1\}) = V$ - окр.).

$\Leftarrow \nearrow X$ - зб. $\text{Положи } f$ $\text{непер.} \Rightarrow \{-1, 1\} = f(X)$ $\text{зб.} \downarrow$

13.E. Доказати за гомоморфизм зб'язності :

- $[a, b] \not\cong [c, d) \quad \forall a, b, c, d$ (у м.ч. когда $d = +\infty$, $c = -\infty$ а то)

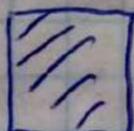
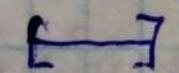
Можно-зум $f: [a, b] \rightarrow (c, d)$ не существует. Если $f|_{(a, b)}: (a, b) \rightarrow (c, d) \setminus \{f(a)\}$ - не может-зум, а не (a, b) зб., а $(c, d) \setminus \{f(a)\}$ не (не проминен). Все когда $a < b$, при $a = b$ $|[a, b]| = 1 < \infty = |(c, d)|$

- $[a, b] \not\cong [c, d) \quad \forall a, b, c, d$ (у м.ч. когда $d = +\infty$). Значу $a = b$ - minub. , maxub. ввансаемо $a < b$.

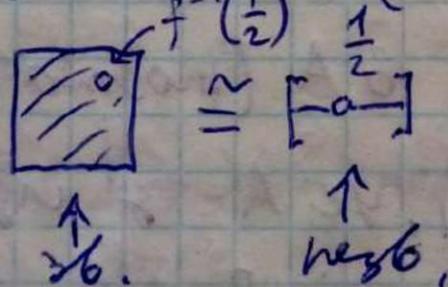
Ау-но! М \exists $f: [a, b] \rightarrow [c, d)$ - зумео-зум , моги $f|_{(a, b)}: (a, b) \rightarrow$

$\rightarrow [c, d) \setminus \{f(a), f(b)\}$ - зумео-зум зб'агннн на незб'агннн

($f(a) \neq f(b)$, мери огна з нис можно навансамб (c, d)).

13.4.  $\not\cong$  (наприклад, $I^2 \not\cong I$)

Все max. до



12. М. \mathbb{Q} -цифков, незв'язний топ. простір, подібно до зв. компакт-топки.
 $\forall A \subset \mathbb{Q} \quad |A| > 1 \Rightarrow A$ незв'язна. Дійсно, $\exists x \neq y \in A \Rightarrow \exists$
 $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : z \in (x, y)$, тоді для $U = (-\infty, z) \cap \mathbb{Q}$, $V = (z, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ вик.
умова незв'язності. Вірне загальне тв.:

X цифков незв'язний $\Leftrightarrow (\forall A \subset X \quad |A| > 1 \Rightarrow A$ незв'язна)

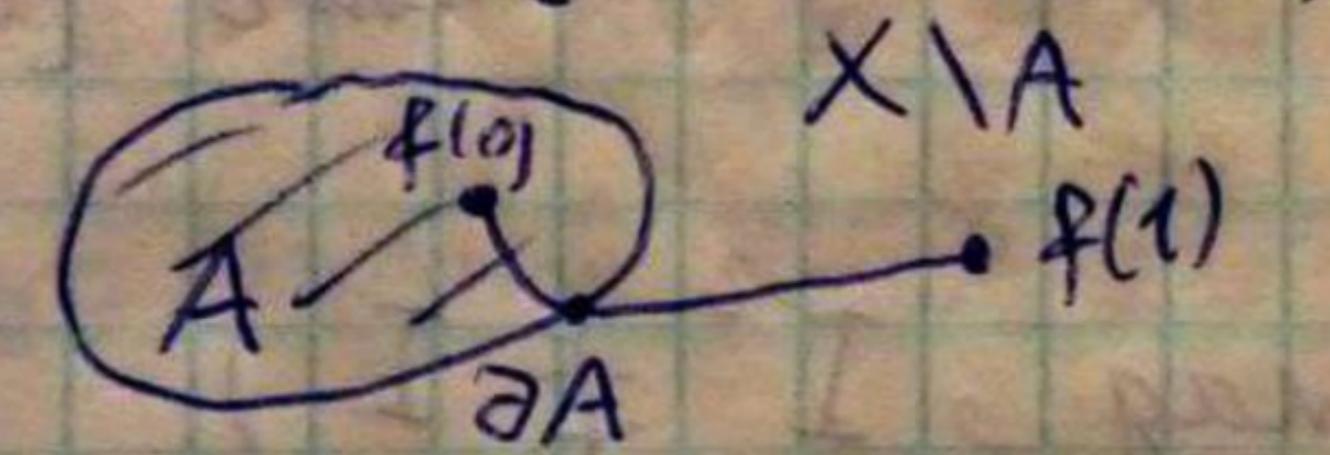
$\Rightarrow \forall x \in A \quad \{x\} \subset A$ строго і $\{x\}$ -зв. комп. $X \Rightarrow A$ незв'язна.

$\Leftarrow \forall x \in X \quad \{x\}$ зв'язна і $\{x\} \subset A$, A -зв. $\Rightarrow \{x\} = A$ за умовою.

у отриманні $\{x\}$ -зв. комп.
Інші індекси не можуть бути зв. комп., бо незв'язні.

14.2. Нехай $f: I \rightarrow X$ - функція, $A \subset X$, $f(0) \in A$, $f(1) \in X \setminus A$. Тоді $f(I) \cap A \neq \emptyset$.

I -зв. $\Rightarrow f(I)$ зв. ($f \in C(I, X)$). Тоді $f(I)$ задов. умови 12.26.



14.4. Якi з цих просторів лін. зв'язні?

- Дискретні > 1 точки

чи (до зв'язності або тому, що $\forall f \in C(I, X)$ - positive).

- Аггрегативні

чи (чи $\forall f : I \rightarrow X$ - неперервне).

- \mathbb{R} з $\{a, +\infty\}$.

чи (~~чи~~) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $f(t) =$

$= (1-t)x + ty : I \rightarrow \mathbb{R}$ - непер. (до непер. $\rightarrow \mathbb{R}$ зi сманг. мон.),

$f(0) = x, f(1) = y.$

R_{T_1}

- Маса (ан-но).

14.12. 1. Якщо A - лін. зв., то $\text{Int } A$ і ∂A не обов'язково лін. зв.

2. Це не для зв'язності.

$A = \text{шари}$ - зв. і лін. зв.

$\text{Int } A = \text{внутр. шари}$ - не зв. не лін. зв.

$[a, b]$ - зв. і лін. зв.

$\partial A = \{a, b\}$ - не зв. не лін. зв.

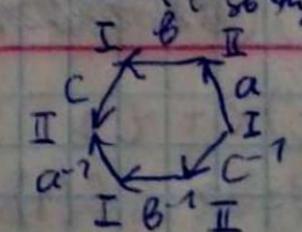
14.5. Нехай $\varphi: X \rightarrow Y$ $\forall x \in X \exists \text{ відр. } U \ni x: U$ - лін. зв. Поділіть кожн. лін. зв.-мі X відривати.

Нехай A - кожн. лін. зв. $\forall x \in A \exists \text{ відр. лін. зв. } U \ni x$. Поділіть $U \subset A$ (A - наїдилова лін. зв., що $\exists x$), тоді $x \in \text{Int } A$. Тл. ч., $A = \text{Int } A \Rightarrow A$ відр.

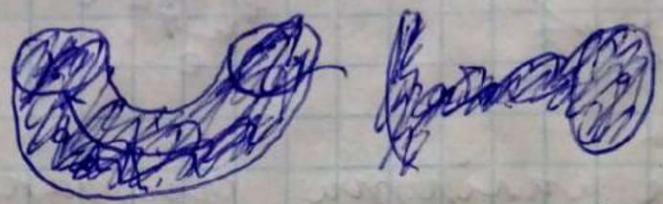
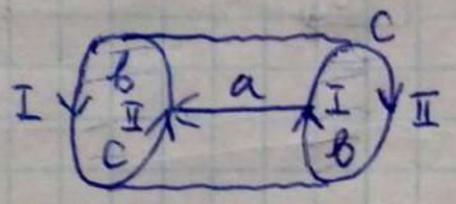
(це умова, слабка за локальну лін. зв'язність) (це не вірно і для зв'язних некомпактних зв'язних U)

Впр. з лекції Показати, що

$$W = abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$$



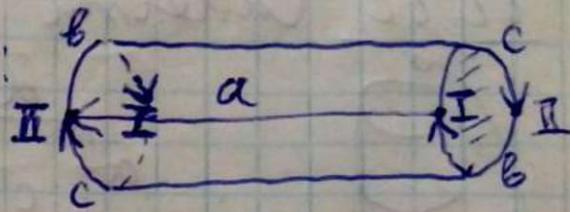
задає T^2 . Силеино a :



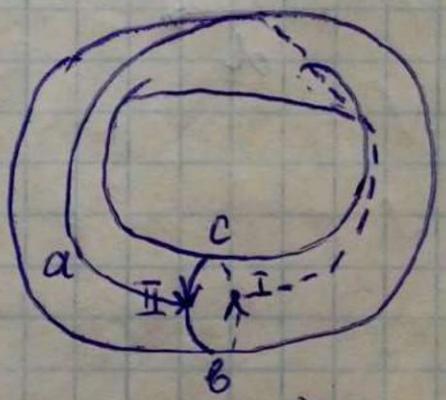
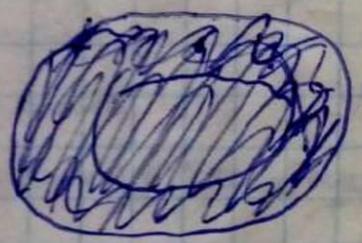
Перекручуємо:



іншим способом згорювання:

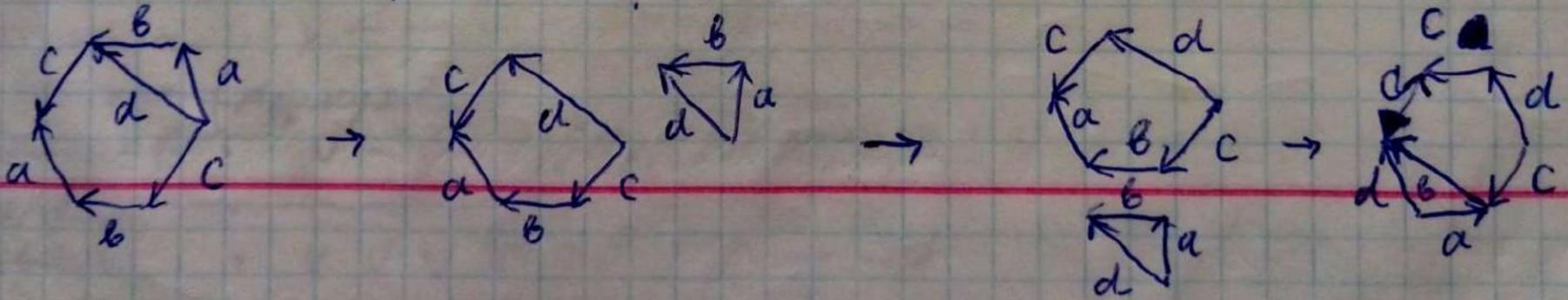


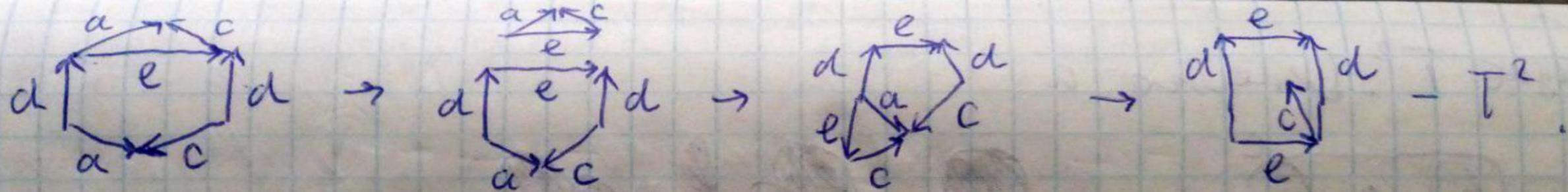
Силеино b і c :



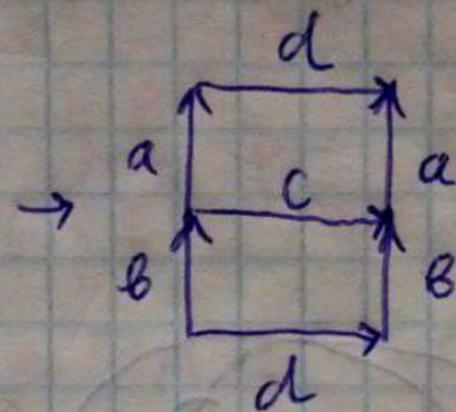
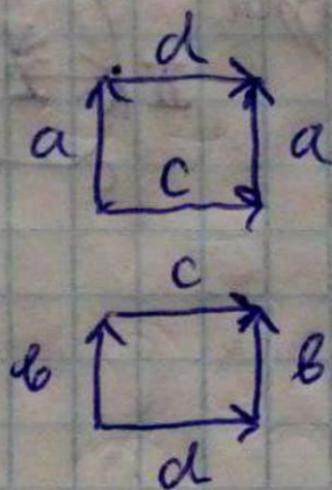
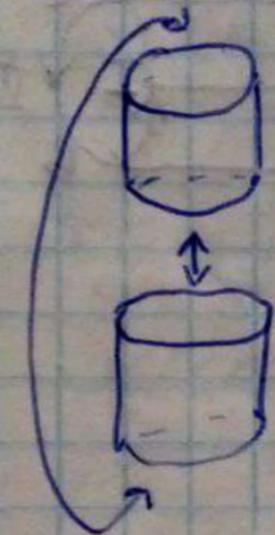
(I і II позн. класа еб-сті Верман)

Іншим способ - перекрутка:





22.22 Сформулируйте условия изоморфизма:



Перенормировка

