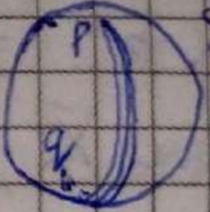
$>\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ – його "більша частина". Т.ч., її можна "порушити" за допомогою варіації, зменшуючи довжину. Узагальнення цього спостереження є Th. Якобі, див. нижче (тонкіше, $\forall$ "рух", якщо він невеликий, зменшить довжину).

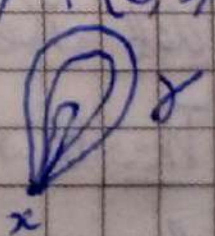


$S^n_{\frac{1}{\sqrt{k}}}$

## Накриття: необхідні відомості з топології

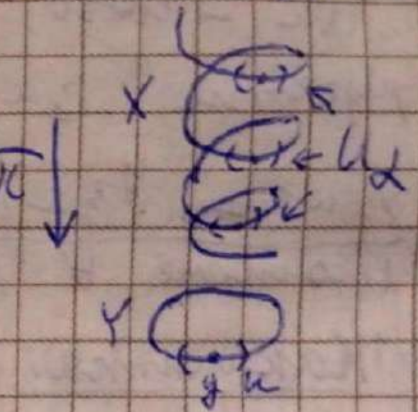
Див., наприклад, Ч. Коснёвски, Начальный курс алгебраической топологии.

<u>def.</u> Лінійно зв'язний топ. простір $X$ зветься однозв'язним, якщо у ньому $\forall$ петля (замкнений шлях) гомотопна нулю (стягується), тобто $\forall\, \gamma \in C([a,b], X)$ такого, що $\gamma(a) = \gamma(b) = x$, $\exists$ гомотопія $F \in C([a,b] \times [0,1], X)$ така, що $F(t,0) = \gamma(t)$, $F(t,1) = F(a,s) = F(b,s) = x$ $\forall\, t, s$.



<u>Ex.</u> $M^n(k)$ однозв'язні (нагадуємо, що $n \geq 2$), $\mathbb{R}P^n$, $S^1 \times \mathbb{R}^n$, $T^n$ – неоднозв'язні.

<u>def.</u> Неперервне сюр'єктивне відображення топ. просторів




$\pi: X \to Y$ зветься накриттям з базою $Y$ і накриваючим простором $X$, якщо $\forall y \in Y$ $\exists$ відкр. $U \ni y$ така, що
$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup\limits_{\alpha \in A_U} U_\alpha$ (диз'юнктне об'єднання, тобто
$U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$), де усі $U_\alpha$ відкр в $X$ і
$\forall \alpha$ $\pi|_{U_\alpha}: U_\alpha \to U$ – гомеоморфізм.

Ex. 1. Тривіальне: $\pi: X \to Y$ – гомеоморфізм (тут $U = Y$).

2. $\pi: \mathbb{R}^n \to T^n : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (e^{ix^1}, \dots, e^{ix^n})$.

Th. Якщо $\pi: X \to Y$ – накриття, $X$ лін. зв'язний, а $Y$ однозв'язний, то $\pi$ – гомеоморфізм.

def. Накриття $\pi: X \to Y$ зветься універсальним, якщо $X$ однозв'язний.

Th. $\forall$ $n$-вимірного $\ell$-гл. ($\ell \geq 1$) зв'язного многовида $M$ $\exists$ універсальне $\ell$-гл. накриття $\pi: \tilde{M} \to M$ його $n$-вимірним $\ell$-гл (однозв'язним) многовидом $\tilde{M}$, причому $\forall p \in \tilde{M}$ $d_p\pi$ невироджений.

Ex. $\pi: \mathbb{R}^n \to T^n$ вище – $\infty$-гл. і $d_p\pi$ невир. $\forall p$ ($\pi$ – лок.

дифеоморфізм в околі $\forall p$).

**Rem.** Кажуть в умовах попер. **Th**: $(M,g)$ - рімановий. $\pi$ задов. **def.** накриття, тому $\pi^* g$ - рім. м-ка на $\tilde{M}$ (як I фунд. форма). За побудовою, тоді $\pi$ - лок. ізометрія в околі $\forall p \in \tilde{M}$. У такому випадку будемо говорити, що $\pi : (\tilde{M}, \pi^* g) \to (M, g)$ - ріманове універсальне накриття.

**Ex.** $\pi : E^n \to T^n$ з лок. евкл. м-кою на $T^n$ (як вище, м-ка - сума)

**Pr.** Якщо $\pi : X \to Y$ накриття, X - компактний, то $\forall y \in Y$ $\pi^{-1}(y)$ скінченна ($\pi$ - скінченнолисте).

▷ За **def.** накр. усі $\pi^{-1}(y)$ - дискретні (бо $\forall x \in \pi^{-1}(y)$ має окіл $U_{\alpha x}$, що не містить інших точок $\pi^{-1}(y)$) Оскільки X - компактний, $\pi^{-1}(y)$ скінченна (бо інакше у $\pi^{-1}(y)$ існувала б точка накопичення $x_0$, в $\forall$ околі $U_{\alpha x_0}$ якої була б неск. кількість точок $\pi^{-1}(y)$, а отже $\pi|_{U_{\alpha x_0}}$ не могло б бути бієкцією). △

**Зад.** Якщо при цьому Y зв'язний, то усі $\pi^{-1}(y)$ мають одну й ту саму кількість точок,

<u>Сл.</u> В умовах <u>Тм.</u> Майерса ріманове універсальне накриття $(M, g)$ скінченнолисте: $\forall\ q \in M$ $\pi^{-1}(q)$ скінченна.

~~[illegible]~~ ▷ Як встановлюється у <u>Впр.</u> вище (у попер. темі), ізометрії, навіть локальні, зберігають кривини. Тому для накриваючого многовида $(\tilde{M}, \pi^* g)$ також $Ric \geq (n-1)k > 0$. Крім того, він зв'язний (бо однозв'язний)

<u>Впр.</u> Перевірити, що $(\tilde{M}, \pi^* g)$ повний (що відбувається з геодезичними?)

Отже, $(\tilde{M}, \pi^* g)$ задов. умовам <u>Тм.</u> Майерса, тому є, зокрема, компактним. За попер. <u>Рм</u>, $\pi$ скінченнолисте. △

<u>Rem.</u> Далі переформулювання для знайомих з поняттям фундаментальної групи (див. Косневски):

<u>Сл.</u> В умовах <u>Тм.</u> Майерса фундаментальна група $M$ $\pi_1(M)$ скінченна

▷ Для унів. накриття $\exists$ бієк. між $\pi^{-1}(y)$ і ф. групою $\forall y$ △

Ex. Рім. м-ка на $\mathbb{R}P^n$, будується так, що уніВ. накриття $\pi$: ($n \geq 2$)
$S^n \to \mathbb{R}P^n$ (це канон. проекція $x \mapsto [x]$) стає рімановим (і
однозначно визначається цією умовою – Впр.). Зокрема, $\mathbb{R}P^n$ має
ПСК 1 і задов. умовам Тh. Майерса (Впр. перевірити повноту)
І дійсно, $\pi$ дволистне (тобто $|\pi^{-1}(q)| = 2 \; \forall q$), а $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Впр. Чому дорівнює діаметр $\mathbb{R}P^n$?

Інші теореми про кривину, що обмежена знизу (ріманові)

Th. (Сінґ) Будь-який парновимірний орієнтовний компактний зв'язний ріманів мн. з $K > 0$ однозв'язний.

▷ Тут і далі див. Бураго-Залгаллер. △

Rem. Відомо, що у $\forall$ неорієнтовного зв'язного мн. $M$ $\exists$ двол-листне орієнтовне зв'язне накриття. Тоді в умовах Th. Сінга ($M$ парновим. комп., $K > 0$) це накриття однозв'язне (універсальне), тому $\pi_1(M) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Ex. $S^n \to \mathbb{R}P^n$ як вище (при непарних $n$ це, звісно, теж так, хоча $\mathbb{R}P^n$ і дзеркальні), але є контрприклади у загальному випадку).

Th. (про душу, Чігер-Громол). Якщо $M$ – повний зв'язний рімановий многовид з $K \geq 0$, то у нього $\exists$ компактний цілком геодезичний вкладений підмноговид $S$ (душа) такий, що $M$ дифеоморфний $NS$ (нормальному розшаруванню $S$, див. "Геом. підмн.") $\triangleright$ Б.-З. $\triangle$

Th. ("гіпотеза про душу", Перельман). Якщо $M$ – повний зв'язний некомпактний $n$-вим. рімановий мн. з $K \geq 0$, і $\exists p \in M$ точка, що $\forall$ пл. $\sigma \subset T_pM$ $K_p(\sigma) > 0$, то його душа $S$ одноточкова, а отже $M$ дифеоморфний $\mathbb{R}^n$.

Ex. Еліптичний параболоїд.

## Поля Якобі та спряжені точки

$(M, g)$ – $C^\ell$-м. $n$-вим. рімановий многовид, $\ell \geq 4$, $n \geq 2$, $\nabla$ – його рім. зв., $R$ – тензор кр. Також вважаємо, що усі геодезичні в цьому γ параметризовані з постійною довжиною дот. вектора (тобто $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$).

Def. Варіація $\sigma \in C^4([a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon), M)$ зветься геодезичною, якщо $\forall \tau \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ $\gamma_\tau = \sigma(\cdot,\tau)$ – геодезична.

Рп. 1. Якщо поле $Y$ уздовж $\gamma$ задає геод. варіацію $\sigma$ (тобто $Y(t) = d_{(t,0)}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\ \forall t$), то

$$\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}Y + R(Y,\gamma')\gamma' = 0 \qquad (*)$$

Rem. Тут $R(Y,\gamma')\gamma' : t \mapsto R_{\gamma(t)}(Y(t),\gamma'(t))\gamma'(t)$ – тенз. поле уздовж $\gamma$.

Пор. з формулою II вар. довжини з $Y \perp \gamma'$ і закр. кінцями: у цьому випадку вона дор. 0.

▷ Див. доведення ф-л I і II вар. : якщо покласти $X(t,\tau) = d_{(t,\tau)}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ і $\hat{Y}(t,\tau) = d_{(t,\tau)}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)$ $\forall t,\tau$, то це будуть поля дотичних до кривих $t \mapsto \sigma(t,\tau) = \gamma_\tau(t)$ і $\tau \mapsto \sigma(t,\tau)$ відповідно, і $\hat{Y}(\cdot,0) = Y$, і

$\nabla_X \hat{Y} = \nabla_{\hat{Y}} X$ (де диференціювання –

у сенсі диф. уздовж кривої), і (ан-но до Lem. 2, у тому просторі)

$$R(\hat{Y}, X)X = \nabla_{\hat{Y}}\nabla_X X - \nabla_X \nabla_{\hat{Y}} X = \left[\begin{array}{l} \nabla_X X = \nabla_{\gamma_\tau'}\gamma_\tau' = 0, \\ \text{бо } \gamma_\tau \text{ – геод.} \end{array}\right] = -\nabla_X \nabla_X \hat{Y}.$$

При $\tau = 0$ $X = \gamma'$ і $\hat{Y} = Y$, звідки отримуємо потрібне. ▲

**Rem.** Те ж вірне і для $\forall\, \tau = \tau_0$ і $Y = \hat{Y}(\cdot, \tau_0)$ уздовж геод. $\gamma_{\tau_0}$.

**Впр.** Показати, що вірне й обернене (див. Бураго-Залгаллер).

**Def.** $(l-1)$-гл. в. поле $Y$ уздовж геодезичної $\gamma$, що задов. $(*)$, зветься полем Якобі (уздовж $\gamma$).

**Rem.** Нехай $\{E_i\}_{i=1}^n$ – ортонорм. у $\forall$ точці базис ~~парале~~ паралельних полів уздовж $\gamma$ (як і у доведенні Th. Майєрса, беремо ортонорм. базис у одній точці й паралельно переносимо, тобто продовжуємо його ел-ти паралельними полями). Будемо шукати поле Якобі уздовж $\gamma$ у вигляді $Y = Y^i E_i$ (тут $Y^i \in C^{l-1}(I)$, якщо $\gamma : I \to M$, $E_i : I \to TM$, $i = \overline{1,n}$). В силу паралельності $E_i$, маємо $\forall\, i = \overline{1,n}$:

$$\nabla_{\gamma'} Y = (Y^i)' E_i + Y^i \underbrace{\nabla_{\gamma'} E_i}_{=0} = (Y^i)' E_i,$$

$$\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'} Y = (Y^i)'' E_i + (Y^i)' \underbrace{\nabla_{\gamma'} E_i}_{=0} = (Y^i)'' E_i.$$

Тому (*) набуває вигляду:

$$(Y^i)'' E_i + Y^i R(E_i, \gamma')\gamma' = 0. \qquad (**)$$

Позначимо $R(E_j, \gamma')\gamma' = R^i_j E_i$ $\forall j$, де $R^i_j \in C^{l-3}(I)$. Маємо:

$$(Y^i)'' + Y^j R^i_j = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Це система лінійних ЗДР II порядку з гладкими (бо $l \geq 4$) коефіцієнтами. Разом з початковими умовами $Y^i(t_0) = Y^i_0$ і $(Y^i)'(t_0) = Y^i_1$, $i = \overline{1,n}$ для якоїсь $t_0 \in I$ (тобто значеннями $Y$ і $\nabla_{\gamma'} Y$ у $t_0$) вона утворює задачу Коші, у якої $\exists!$ розв'язок на усьому $I$:

<u>Сл. 1.</u> Нехай $t_0 \in I$. Тоді $\forall$ пара $v, w \in T_{\gamma(t_0)}M$ $\exists!$ поле Якобі $Y$ уздовж $\gamma$ таке, що $Y(t_0) = v$ і $\nabla_{\gamma'} Y(t_0) = w$. Поля Якобі уздовж $\gamma$ утворюють $2n$-вимірний вект. простір над $\mathbb{R}$.

▷ Оск. рівняння (**) лінійні, $\forall$ п.Я. $X$ і $Y$ уздовж отже п. Я. утворюють вект. простір.

$\gamma$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda X + \mu Y$ — теж п. Я. уздовж $\gamma$. В силу лін. залежності розв'язків лін. системи від початкових умов і $\exists!$ розв'язку з. Коші, відобр. $(v = Y(t_0), w = \nabla_{\gamma'} Y(t_0)) \mapsto Y : T_{\gamma(t_0)}M \oplus T_{\gamma(t_0)}M \to$
$\to \left\{\begin{matrix}\text{простір п. Я.} \\ \text{уздовж } \gamma\end{matrix}\right\}$ — лінійне і бієкц. $\Rightarrow$ лін. ізоморфізм, тому вимірності цих просторів збігаються. $\triangle$

Rem. Далі за замовчуванням вважаємо геод. $\gamma : [0, a] \to M$ і для $v, w \in T_{\gamma(0)}M$ позначаємо $Y_{v,w}$ — п. Я. уздовж $\gamma$ таке, що $Y_{v,w}(0) = v$, $\nabla_{\gamma'} Y_{v,w}(0) = w$.

Пр. 2. Поля вигляду $Y(t) = (b + ct)\gamma'(t)$, $b, c \in \mathbb{R}$ — це в точності поля Якобі уздовж $\gamma$, що дотичні до $\gamma$.

$\triangleright$ Тут "дотичні до $\gamma$" означає, що $Y = f\gamma'$ для деякої $f \in C^{\ell-1}(I)$. Оскільки $\gamma'$ — парал. уздовж $\gamma$, (*) набуває вигляду:

$$f''\gamma' + f \underbrace{R(\gamma', \gamma')\gamma'}_{0} = 0 \Leftrightarrow f'' = 0 \Leftrightarrow f(t) = b + ct. \triangle$$

Рч.3. $\forall$ поля Якобі $Y$ уздовж $\gamma$ його дотична і нормальна компоненти $Y^T$ і $Y^\perp$ (тобто ортог. проекції на $\gamma'$ і на орт. доповнення до нього у $\forall$ точці $\gamma$ відповідно) — теж поля Якобі уздовж $\gamma$. Зокрема, $Y^T(t) = (b+ct)\gamma'(t)$, $b, c \in \mathbb{R}$.

▷ $Y^T = \dfrac{g(Y,\gamma')}{g(\gamma',\gamma')}\gamma'$, де знаменник у коефіцієнті постійний, а друга похідна чисельника дорівнює, в силу узгодж. зв'язності з $g$,

$g(Y,\gamma')'' = \Big(g(\nabla_{\gamma'}Y,\gamma') + g(Y, \underbrace{\nabla_{\gamma'}\gamma'}_{0})\Big)' = [\gamma\text{ - геод.}] = g(\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}Y,\gamma') +$

$+ g(\nabla_{\gamma'}Y, \underbrace{\nabla_{\gamma'}\gamma'}_{0}) = \left[\begin{matrix}\gamma\text{ - геод.}\\ \text{і } (*)\end{matrix}\right] = -g(R(Y,\gamma')\gamma',\gamma') = \left[\begin{matrix}\text{сим.}\\ R\end{matrix}\right] = 0.$

Т.ч., $Y^T(t) = (b+ct)\gamma'(t)$ — п.Я. за Рч.2, а тоді й $Y^\perp = Y - Y^T$ — п.Я. за лінійністю (Сл.1) ◭

Сл.2. Якщо $\exists\ t_0 \neq t_1$ такі, що для п.Я. $Y$ уздовж $\gamma$ $Y(t_0) = Y(t_1) = 0$, то $Y$ ортогональне до $\gamma$: $Y \perp \gamma'$.

▷ Оск. лінійна ф-ція, що $=0$ у двох різних точках, нульова, $Y^T = 0$ за попер. Рч.3, тому $Y = Y^\perp$. ◭

Ex. Нехай $M$ – ПСК $k \in \mathbb{R}$, $\gamma$ – нат. параметризована геод. Знову розглянемо уздовж $\gamma$ ортонорм. у $\forall$ точці базис $\{E_i\}_{i=1}^{n}$, що скл. з паралельних полів, поклавши тепер $E_n = \gamma'$ (як у доведенні Th. Майєрса). Тоді $\forall j = \overline{1,n}$ за описом $R$ для ПСК:

$$R(E_j,\gamma')\gamma' = k\big(\underbrace{g(\gamma',\gamma')}_{=1}E_j - \underbrace{g(E_j,\gamma')}_{=\delta_{jn}}\gamma'\big) = \begin{cases} kE_j, & j = \overline{1,n-1} \\ 0, & j = n \end{cases}, \text{ тобто}$$

у введених вище позначеннях

$$R^i_j = \begin{cases} k\delta^i_j, & j = \overline{1,n-1}; \\ 0, & j = n. \end{cases}$$

Тоді рівн. (**) для коеф. п. Я. $Y = Y^i E_i$ набувають вигляду

$$\begin{cases} (Y^i)'' + kY^i = 0, & i = \overline{1,n-1}, \\ (Y^n)'' = 0. \end{cases}$$

тому для $i = \overline{1,n-1}$

$$Y^i(t) = \begin{cases} b^i\cos(\sqrt{k}\,t) + c^i\sin(\sqrt{k}\,t), & k>0, \\ b^i + c^i t, & k=0, \\ b^i\operatorname{ch}(\sqrt{-k}\,t) + c^i\operatorname{sh}(\sqrt{-k}\,t), & k<0, \end{cases}$$

і $Y^n(t) = b + ct$, де $b^1, \dots, b^{n-1}, b, c^1, \dots, c^{n-1}, c \in \mathbb{R}$. Позначимо $E := \sum_{i=1}^{n-1} b^i E_i$, $F := \sum_{i=1}^{n-1} c^i E_i$. Вони паралельні як лінійні комбінації паралельних. Зауважимо, що $Y^\perp(0) = \sum_{i=1}^{n-1} Y^i(0) E_i(0) = E(0)$ і

$$\nabla_{\gamma'} Y^\perp(0) = \sum_{i=1}^{n-1} (Y^i)'(0) E_i(0) = \begin{cases} \sqrt{k}\, F(0), & k>0, \\ F(0), & k=0, \\ \sqrt{-k}\, F(0), & k<0. \end{cases}$$

Сл. 3. У пп. $(M,g)$ ПСК $k$ поля Якобі уздовж $\underbrace{\text{геод.}}_{\text{нат. пар.}}$ $\gamma : [0,a] \to M$, що ортогональні їй, мають вигляд

$$Y_{v,w}(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{k}\,t) E(t) + \sin(\sqrt{k}\,t) F(t), & k>0, \\ E(t) + t F(t), & k=0, \\ \operatorname{ch}(\sqrt{-k}\,t) E(t) + \operatorname{sh}(\sqrt{-k}\,t) F(t), & k<0, \end{cases}$$

де $E$ і $F$ - паралельні поля уздовж $\gamma$ такі, що $E(0) = v$ і

$$F(0) = \begin{cases} \frac{w}{\sqrt{k}}, & k>0, \\ w, & k=0, \\ \frac{w}{\sqrt{-k}}, & k<0. \end{cases}$$

<u>def.</u> Для геодезичної $\gamma$ точки $p = \gamma(t_0)$ і $q = \gamma(t_1)$, де $t_0 \neq t_1$, звуться спряженими точками $\gamma$, якщо $\exists$ поле Якобі

$Y$ уздовж $\gamma$ таке, що $Y \neq 0$, $Y(t_0) = Y(t_1) = 0$.

<u>Rem</u>. З <u>Cor. 2.</u> у цьому випадку $Y \perp \gamma'$.

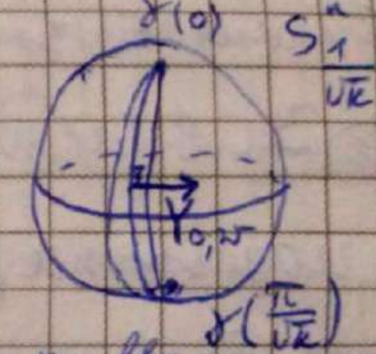
<u>Ex</u>. Для многовиду $(M, g)$ ПСК $k$ нехай $Y(0) = 0$ і $Y = Y_{0,w} \neq 0$ — п. Я. уздовж геод. $\gamma : [0, a] \to M$. Тоді $w \neq 0$ в силу <u>Cor. 1.</u> (інакше $Y_{0,w} = 0$). У позначеннях <u>Cor. 3.</u> це означає, що $E = 0$ і $F \neq 0$ (у жодній точці; це випливає з $\exists!$ паралельних полів). Тоді при $k \leq 0$ у $\gamma$ немає точок, що спряжені до $\gamma(0)$, бо у ф-цій $t$ (для $k = 0$) і $\operatorname{sh}(\sqrt{-k}\,t)$ (для $k < 0$) немає нулів крім $t = 0$. При $k > 0$ це точки $\gamma\left(\frac{\pi m}{\sqrt{k}}\right)$ $m \in \mathbb{Z}$ (бо $\sin(\sqrt{k}\,t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi m}{\sqrt{k}}$).

Нехай $(M, g)$ — простір постійної кривини $k$, також повний і зв'язний.

Зауважимо, що, оскільки у цьому випадку $(M, g)$ задов. умова <u>Th.</u> Майерса (див. вище), його діаметр не перевищує $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Оскільки параметризація $\gamma$ натуральна, реально на ній таких точок, що відмінні від $\gamma(0)$, не більше однієї.

Зокрема, на сфері $M^n(k) = S^n_{\frac{1}{\sqrt{k}}}$ це точка, що




діаметрально протилежна $\gamma(0)$. У цьому випадку $Y_{0,w}$ задає геодезичну варіацію $\gamma$ великих півкіл (і вони усі — найкоротші). Втім, ми вважатимемо спр. точки, що відп. різним знач. параметра, різними, тому для точки може зустр. кілька раз

<u>Впр.</u> $\forall$ ріманового $(M, g)$ $\forall$ геодезичної $\gamma : [0, a] \to M$ $\exists$ не більш (навіть з урахуванням різних копій однієї точки) ніж скінченна кільк. точок, що спряжені $\gamma(0)$ (див. Бурaго-Залгаллер; див. також про індекс і індексну форму).

<u>Pr. 4.</u> Нехай $p \in M$, $v, w \in T_pM$ і $\varepsilon > 0$ таке, що $\forall (t, \tau) \in [0, a] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ визначене $\sigma(t, \tau) = \exp_p(t(v + \tau w))$. Тоді $\sigma$ — геодезична варіація, і $\forall \tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $Y_\tau := d_{(\cdot, \tau)}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)$ є поле Якобі уздовж геод. $\gamma_\tau = \sigma(\cdot, \tau)$ з $Y_\tau(0) = 0$, $\nabla_{\gamma'_\tau} Y_\tau(0) = w$ (тобто $Y_{0,w}$ у наших позначеннях). Зокрема, при $\tau = 0$ $Y_{0,w}(t) = d_{tv}\exp_p(tw)$ задає п. Я. уздовж $\gamma = \gamma_0 : t \mapsto \exp_p(tv)$ (з $\gamma(0) = p$ і $\gamma'(0) = v$).

<u>Rem</u> Пор. з варіацією з дов. леми Гаусса. Тут існування $\varepsilon$

випливає з властивостей $\exp_p$.

▷ За властивостями $\exp_p$, $\sigma$ – $l$-гл., і $\forall \tau$ $\gamma_\tau : t \mapsto \exp_p(t(v+\tau w))$ – геодезична; отже, $\sigma$ – геод. варіація, а $Y_\tau$ – п. Я. уздовж $\gamma_\tau$ $\forall \tau$ (див. Рч. 1 і Rem. після нього). При цьому $\forall t$

$$Y_\tau(t) = \sigma(t,\tau)'_\tau = d_{t(v+\tau w)}\exp_p(tw),$$

зокрема, $Y_0(t) = d_{tv}\exp_p(tw)$. Звідси, $Y_\tau(0) = \underbrace{d_0\exp_p}_{id_{T_pM}}(0) = 0$.

Як у дов. Рч. 1, позн. $X(t,\tau) := d_{(t,\tau)}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \gamma_\tau'(t)$:

$$X(t,\tau) = \sigma(t,\tau)'_t = d_{t(v+\tau w)}\exp_p(v+\tau w),$$ тому

$$\nabla_{\gamma_\tau'} Y_\tau(0) = \left[\begin{array}{l}\text{позначимо}\\ \hat{Y}(t,\tau) := d_{(t,\tau)}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right),\\ \text{як у дов. Рч. 1, } \hat{Y}(\cdot,\tau) = Y_\tau\end{array}\right] = \nabla_X \hat{Y}(0,\tau) = \left[\begin{array}{l}\text{доведення ф-ли}\\ \text{I вар., див. заув.}\\ \text{у дов. Рч. 1}\end{array}\right] =$$

$$= \nabla_{\hat{Y}} X(0,\tau) = \left[\begin{array}{l}\text{можемо відразу під-}\\ \text{ставити } t=0 \text{ в } X,\\ \text{бо диференціювання –}\\ \text{у напрямку } \tau\end{array}\right] = \Big(\underbrace{d_0\exp_p}_{id_{T_pM}}(v+\tau w)\Big)'_\tau =$$

$$= (v+\tau w)'_\tau = w,$$ тобто дійсно $Y_\tau = Y_{0,w}$ для геодезичної $\gamma_\tau$ (зокрема, $Y_0 : t \mapsto d_{tv}\exp_p(tw)$ для $\gamma_0 : t \mapsto \exp_p(tv)$)

**Рч. 5.** Нехай $\gamma: [0,a] \to M$ – геодезична, і $exp_{\gamma(0)}$ визначене принаймні на $B_\varepsilon(0)$, де $\varepsilon > |a\gamma'(0)|$ (тут $B_\varepsilon$ і $|\cdot|$ – відн. $g_{\gamma(0)}$). Тоді точки $\gamma(0)$ і $\gamma(a)$ спряжені $\iff$ $d_{a\gamma'(0)} exp_{\gamma(0)}$ вироджений.

▶ За властивостями $exp_p$, $\gamma(t) = exp_p(tv)$, де $p = \gamma(0)$, $v = \gamma'(0)$.
За def., $\gamma(0)$ і $\gamma(a)$ спряжені $\iff$ $a \neq 0$ і $\exists$ поле Якобі $Y_{0,w} \neq 0$ уздовж $\gamma$ таке, що $Y_{0,w}(a) = 0$ ($Y_{0,w}(0) = 0$ в силу позначень).
За єдиністю п. Я. у Cor 1. і за Рч. 4., тоді $Y_{0,w}(t) = d_{tv} exp_p(tw)$.

$\Rightarrow$ Тоді, якщо $\gamma(0)$ і $\gamma(a)$ спряжені, то $a \neq 0$ і $d_{av} exp_p(aw) = 0$, де $w \neq 0$ (бо інакше $Y_{0,w} = 0$). Отже, $aw \neq 0$, тому $d_{av} exp_p = d_{a\gamma'(0)} exp_{\gamma(0)}$ – вироджений оператор.

$\Leftarrow$ І навпаки, якщо $d_{av} exp_p$ вироджений, то $\exists \tilde{w} \neq 0$ такий, що $d_{av} exp_p(\tilde{w}) = 0$. При цьому $a \neq 0$, бо $d_0 exp_p = id_{T_pM}$ невир. (і про спряжені точки у такому випадку не йдеться). Тоді $Y_{0,\frac{\tilde{w}}{a}}$ – п. Я. уздовж $\gamma$, $Y_{0,\frac{\tilde{w}}{a}} \neq 0$, бо $\frac{\tilde{w}}{a} \neq 0$, і $Y_{0,\frac{\tilde{w}}{a}}(a) =$

$= d_{a\tilde{v}} \exp_p(\tilde{v}) = 0$, тому $\gamma(0)$ і $\gamma(a)$ спряжені. △

Cor. 4. Спряжені з $p = \gamma(0)$ точки геодезичної $\gamma$ не можуть лежати у нормальному (зокрема нульовому) околі $p$.

▷ За деф., на норм. околі $\exp_p$ – дифеоморфізм △

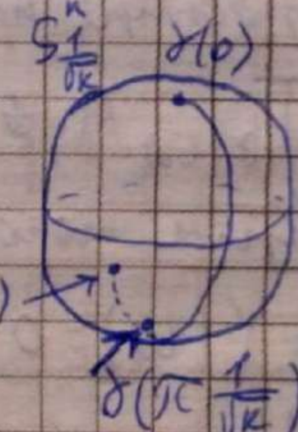
Rem. $M$ геодезично повний у $p = \gamma(0)$ $\Leftrightarrow$ $\exp_p$ визначене на усьому $T_pM$, тому у формулюваннях Cor. 4. і Cor. 5. можна не робити обмовки, що пов'язані з визначеністю. Зокрема, це так, коли $M$ повний, за Th. Х.-Р.-К.-Ф.

Th. 1 (Якобі). У геодезичної $\gamma : [0, a] \to M$ $\exists$ внутрішня точка $\gamma(t)$, $t \in (0, a)$, що спряжена $\gamma(0)$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ варіація $\gamma$ із закріпленими кінцями, що містить шляхи довжини, меншої за $\gamma$.

▷ Див. Б.-З. чи додаткові матеріали. △ Rem. Вірне й подібне до оберненого тв., але трохи інше (зокрема, треба вимагати $\nexists$ спр. $\gamma(t)$, $t \in (0, a]$), дов. так же.

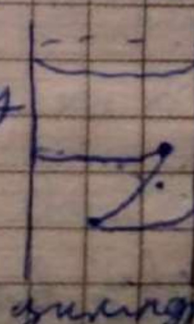
Cor. 5. У найкоротшої $\gamma : [0, a] \to M$ не існує внутрішніх точок, що спряжені $\gamma(0)$.

**Rem.** Тобто в умовах Th. Якобі ситуація аналогічна до Th. Майерса: $\exists$ варіація $\gamma$, для якої друга варіація довжини $\delta^2 S < 0$ (це випливає з дов. теореми), і тому $\exists$ шляхи меншої довжини, які завгодно близькі до $\gamma$: $\gamma$ не є найкоротшою "серед близьких шляхів".




**Ex.** Як ми бачили вище, на $M^n(k) = S^n_{\frac{1}{\sqrt{k}}}$ при $k>0$ спряжені точки (діаметрально протилежні) $\exists$ для $\forall$ геодезичної довжини $a > \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ (наприклад, для нат. парам. це $\gamma(a)$ і $\gamma\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)$). При цьому існування варіації, що зменшує довжину, випливає як з Th. Якобі, так із Th. Майєрса.

**Ex.** Також, як бачили, у многовидах ПСК $k \leq 0$ спряжених точок $\nexists$. (Нижче побачимо, що це не тільки для пост. кривини), тому усі геодезичні — найкоротші "серед близьких" (це випл. і просто з ф-ли II вар.), але не обов'язково найкоротші (див. приклад циліндра вище).



Рч 6. $\forall$ неспряжених точок $\gamma(t_0)$ і $\gamma(t_1)$ геодезичної $\gamma$, $t_0 \neq t_1$, $\forall$ векторів $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, $v_1 \in T_{\gamma(t_1)}M$ $\exists!$ поле Якобі $Y$ уздовж $\gamma$ таке, що $Y(t_0) = v_0$, $Y(t_1) = v_1$.

$\triangleright$ За Сл. 1, п. Я. уздовж $\gamma$ утворюють $2n$-вимірний вект. простір над $\mathbb{R}$. Нехай $\Psi$ - відображення з цього пр-ру у $T_{\gamma(t_0)}M \oplus T_{\gamma(t_1)}M$ : $Y \mapsto (Y(t_0), Y(t_1))$. Очевидно, воно лінійне. Крім того, це лін. ін'єкція: якщо $\Psi(Y) = 0$, то $Y(t_0) = Y(t_1) = 0$, тому, якщо $Y \neq 0$, то $\gamma(t_0)$ і $\gamma(t_1)$ спряжені ↯. Отже, $Y = 0$. Оскільки $\Psi$ - лін. ін'є між просторами однакової вимірності $2n$, це лін. ізоморфізм, і $\Psi^{-1}$ дає потрібну відповідність. $\blacktriangle$

## Многовиди постійної секційної кривини (II)

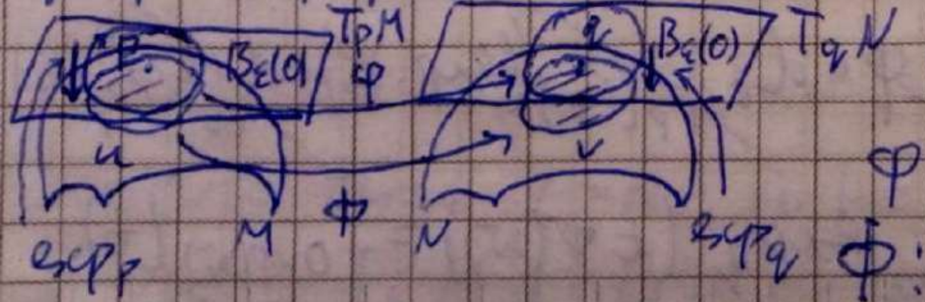
Знову всюди $(M, g)$ - $n$-вим. $C^\infty$ рім мн., $n \geq 2$, $\ell \geq 4$, $\nabla$, $R$ etc. - як вище.

**Th.** (Ріман) Нехай $(M, g)$ і $(N, h)$ — ріманові многовиди однакової постійної секційної кривини $k \in \mathbb{R}$ і однакової вимірності $\dim M = \dim N = n$. Тоді вони локально ізометричні у наступному сенсі: $\forall\, p \in M,\ q \in N$ існують відкриті $U \ni p$, $V \ni q$ такі, що $\exists$ ізометрія $\Phi: (U, g|_U) \to (V, h|_V)$.

▷ У якості $U$ і $V$ візьмемо кульові нормальні околи $p$ і $q$ відп. однакового радіуса $\varepsilon > 0$: $U := B^N_\varepsilon(p)$, $V := B^N_\varepsilon(q)$.

Побудуємо яку-небудь лінійну ізометрію евклідових просторів
$\varphi: (T_pM, g_p) \to (T_qN, h_q)$

За def. норм. околів, $\exp_p: B_\varepsilon(0)_{T_pM} \to U$ і $\exp_q: B_\varepsilon(0)_{T_qN} \to V$ — дифеоморфізми (тут евкл. кулі — відп. $g_p$ і $h_q$ відп.).




Оскільки $\varphi$ зберігає довжини векторів, $\varphi: B_\varepsilon(0)_{T_pM} \to B_\varepsilon(0)_{T_qN}$ — лін. бієкція. Покл.

$\Phi := \exp_q|_{B_\varepsilon(0)_{T_qN}} \circ \varphi \circ \left(\exp_p|_{B_\varepsilon(0)_{T_pM}}\right)^{-1}: U \to V$

коректно визначене та є дифеоморфізмом.

$\forall q \in U$ за власт. норм. околу $\exists!$ найкоротша натурально параметризована геодезична $\gamma : [0,a] \to U$, що з'єднує $p$ і $q$ : $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, де $v = \gamma'(0)$, $|v| = 1$, $\gamma(0) = p$, $\exp_p(av) = \gamma(a) = q$, $a = l_g(\gamma) = d_{l_g}(p,q)$. За Сор.4 попер. теми, $p$ і $q$ не спряжені (як точки $\gamma$), тому в силу Пр.6. там же $\forall u \in T_q M$ $\exists!$ поле Якобі $Y_{0,w}$ уздовж $\gamma$ таке, що $Y_{0,w}(a) = u$ (і $Y_{0,w}(0) = 0$ за позначенням). За Пр.4. там же (і єдиність), $\forall t$ $Y_{0,w}(t) = d_{tv} \exp_p(tw)$, тому $u = d_{av} \exp_p(aw)$. Тут $w = \nabla_{\gamma'} Y_{0,w}(0) \in T_p M$. Зауважимо також, що $\forall t \in [0,a]$ $\exp_p(tv) = \gamma(t) \in U = \exp_p(B_\varepsilon(0)_{T_pM})$, тому $t = |tv| < \varepsilon$. $\forall t$:

$$d_{\underset{(\exp_p(tv))}{\gamma(t)}} \phi \left(Y_{0,w}(t)\right) = \Big(d_{\underset{(\phi(tv))}{t\phi(v)}} \exp_q \circ d_{tv} \phi \circ \cancel{d_{\exp_p(tv)}((\exp_p)^{-1}) \circ d_{tv} \exp_p}\Big)(tw) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} d_{tv}\phi = \phi \text{ за відп.} \\ \text{ототожнень, бо } \phi \text{ лінійне} \end{array}\right] = d_{t\phi(v)} \exp_q (t\phi(w)) = \tilde{Y}_{0,\phi(w)}(t),$$

~~[illegible]~~ де $\tilde{Y}_{0,\varphi(w)}$ – поле Якобі уздовж геодезичної $(V, h)$ $\phi\circ\gamma : t \mapsto (\exp_q \circ \varphi \circ \exp_p^{-1})(\exp_p(tv)) = \exp_q(t\varphi(v))$ знову ж за єдиністю і Рч. 4 попер. теми (при цьому $\phi\circ\gamma : [0,a] \to V$ – тепер єдина найкор. нат. пар. геод., що з'єднує $q$ і $\phi(r)$). З іншого боку, за Сл. 3. так же,

$$Y_{0,w}(t) = \begin{cases} \sin(\sqrt{k}t)F, & k>0, \\ tF, & k=0, \\ \operatorname{sh}(\sqrt{-k}t)F, & k<0 \end{cases} \quad і \quad \tilde{Y}_{0,\varphi(w)}(t) = \begin{cases} \sin(\sqrt{k}t)\tilde{F}, & k>0, \\ t\tilde{F}, & k=0, \\ \operatorname{sh}(\sqrt{-k}t)\tilde{F}, & k<0 \end{cases}, \text{ де}$$

$F$ і $\tilde{F}$ – паралельні поля уздовж $\gamma$ і $\phi\circ\gamma$ відп., що при $t=0$ дорівн.

$$\begin{cases} \frac{w}{\sqrt{k}}, & k>0, \\ w, & k=0, \\ \frac{w}{\sqrt{-k}}, & k<0 \end{cases} \quad і \quad \begin{cases} \frac{\varphi(w)}{\sqrt{k}}, & k>0, \\ \varphi(w), & k=0, \\ \frac{\varphi(w)}{\sqrt{-k}}, & k<0 \end{cases}$$

відп. Оскільки $\varphi$ – лін. ізометрія, $|w| = |\varphi(w)|$, тому за власт. паралельних полів $\forall t \in [0,a]$

$$|F(t)| = |\tilde{F}(t)| \Rightarrow |Y_{0,w}(t)| = |\tilde{Y}_{0,\varphi(w)}(t)| = |d_{\gamma(t)}\phi(Y_{0,w}(t))|.$$

Зокрема, при $t=a$ $|u| = |d_r\phi(u)|$. Оскільки це так $\forall r \in U$ і $\forall u \in T_rM$ $(=T_rU)$, $\phi : U \to V$ є ізометрією. ▲

Cor. Якщо $(M, g)$ – $n$-вимірний рім. мн. ПСК $k$, то $(M, g)$ локально ізометричний $M^n(k)$ в околі $\forall\, p \in M$.

Rem. Як бачили вище, обернене теж вірне.

Ex. Зокрема, многовиди ПСК $0$ – це в точності пласкі (тобто локально евклідові).

Th (Картан – Кіллінг).

1. Якщо $(M, g)$ – повний однозв'язний $n$-вимірний рімановий многовид ПСК $k \in \mathbb{R}$, то $(M, g)$ ізометричний $M^n(k)$.

2. Якщо $(M, g)$ – повний зв'язний $n$-вимірний рімановий многовид ПСК $k \in \mathbb{R}$, то $(M, g)$ ізометричний $M^n(k)/G$, де $G$ – підгрупа групи ізометрій $M^n(k) \to M^n(k)$, що діє на $M^n(k)$ цілком розривно, а $M^n(k)/G$ – простір орбіт за її дією.

Rem. Тут група ізометрій – з операцією композиції, цілком розривна дія означає, що $\forall\, p \in M^n(k)\ \exists$ відкр.

$U \ni p$ така, що $\forall a \in G$, $a \neq id_{M^n(k)}$ $a(U) \cap U = \varnothing$ (Зокрема, дія вільна, тобто $a(p) \neq p$ при $a \neq id_{M^n(k)}$ $\forall p$). Простір орбіт $M^n(k)/_G$ - це фактормножина (мн. класів екв-сті) за відн. еквівалентності $p \sim q \Leftrightarrow \exists a \in G : a(p) = q$, його ел-ти - орбіти $G(p) := \{a(p) \mid a \in G\}$, і на ньому вводиться фактортопологія: $V \subset M^n(k)/_G$ відкрита $\Leftrightarrow \pi^{-1}(V)$ відкр., де $\pi : M^n(k) \to M^n(k)/_G$ : $p \mapsto G(p)$ - канонічна проекція. Можна показати (Впр.), що $M^n(k)/_G$ має структуру n-вим. $C^\infty$-гл. многовида, і на ньому $\exists!$ ріманова м-ка така, що $\pi : M^n(k) \to M^n(k)/_G$ - ріманове накриття (тобто накриття $\pi$ є лок. ізометрією в околі $\forall$ точки). Зокрема, $M^n(k)/_G$ - теж ПСК $k$.

__Ex.__ Паралельні перенесення на вектори $(a^1, \ldots, a^n)$, де $a^i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1,n}$, утворюють підгрупу групи ізометрій $E^n$, що ізоморфна $\mathbb{Z}^n$ $(= \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n})$ і діє цілком розривно, при цьому $E^n/\mathbb{Z}^n$

напол. гр. П тут - як описано у Ex. вище,

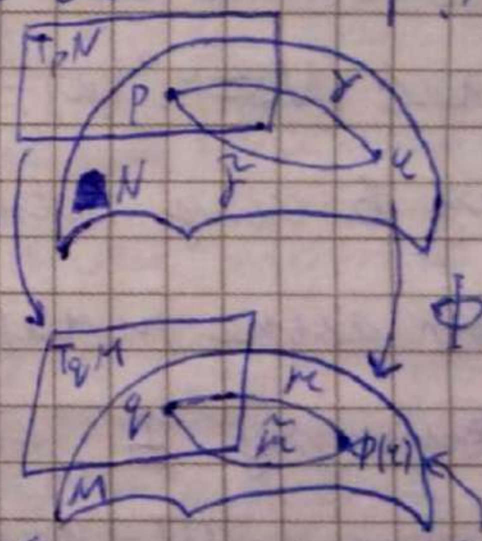
дифеоморфний $T^n$, а метрика з попер. Rem. виглядає локально (для лок. координат вигляду $p=(e^{ix^1},\dots,e^{ix^n})\mapsto (x^1,\dots,x^n)$) як $(dx^1)^2+\dots+(dx^n)^2$ (Впр.) І взагалі, простори орбіт $E^n$ (тобто для випадку $k=0$) дифеоморфні $T^m\times\mathbb{R}^{n-m}$.

і трохи про Z.

▷ (Ідея доведення Th. К.-К. у однозв'язному випадку 1.)

Нехай, як у Th. Рімана, $(N,h)$ і $(M,g)$ - рім. мн. одної ПСК $k$, $\dim N=\dim M=n$, але тепер крім того $N$ і $M$ - повні та зв'язні. Оберемо довільні $p\in N$, $q\in M$ (тут ми поміняли місцями $M$ і $N$ порівняно з Th. Рімана для узгодженості позначень). В силу Th. Х.-Р.-К.-Ф. тоді $\forall r\in N$ $\exists$ найкоротша натурально параметризована геодезична $\gamma:[0,a]\to N$ з $\gamma(0)=p$ і $\gamma(a)=r$ (але тепер, взагалі кажучи, вже не єдина, на відміну від $r\in U$ у дов. Th. Рімана). В силу геодезичної повноти $N$ у $p$ вона так само задається $\gamma(t)=\exp_p(tv)$, $v=\gamma'(0)$

(але тепер при $k>0$ може мати спряжену у $p=\gamma(0)$ точку).
Зокрема, $q = \exp_p(a v)$. Як у дов. Тм. Рімана, оберемо та фіксуємо якусь лін. ізометрію $\varphi : (T_pN, h_p) \to (T_qM, g_q)$. Тоді (побудувавши $\forall q \in N$ $\gamma$ як вище) покладемо $\Phi(q) := \exp_q(a\varphi(v))$. Зауважимо, що це відображення точно коректно визначене і збігається з $\Phi$ з дов. Тм. Рімана на кульовому норм. околі $U$ точки $p$. Тоді можна показати, що для однозв'язного $N$:




a. $\Phi$ коректно визначене, тобто не залежить від вибору $\gamma$. Більш точно: якщо для найкоротших нат. пар. геодезичних $\gamma, \tilde{\gamma} : [0,a] \to N$ таких, що $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p$ і $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a) = q$ покласти $\mu := \exp_q \circ \varphi \circ \exp_p^{-1} \circ \gamma$ і $\tilde{\mu} := \exp_q \circ \varphi \circ \exp_p^{-1} \circ \tilde{\gamma}$, то $\mu(a) = \tilde{\mu}(a)$ (і саме це і є $\Phi(q)$). Зауважимо, що при $k \le 0$ ця частина виконана автоматично, бо найкоротша єдина за Тм. Картана-Адамара [illegible]

**в.** $\Phi$ - накриття і лок. дифеоморфізм в околі кожної точки, тобто $\forall q \in N$ $d_q\Phi$ невироджений (при $K \leq 0$ це доводиться аналогічно до дов. Th. Картана - Адамара).

**с.** $\forall q \in N$ $d_q\Phi$ - лін. ізометрія, тобто $\Phi$ - лок. ізометрія в околі $\forall$ точки (ріманове накриття) (при $K \leq 0$ це доводиться дослівно так само як у Th. Рімана, бо $\nexists$ спряжених точок $\forall$ геод.).

У нас $(N, h) = M^n(k)$ - повний однозв'язний, $(M, g)$ - повний зв'язний, тому в силу постульованого вище побудоване $\Phi: M^n(k) \to (M, g)$ - універсальне ріманове накриття.

У випадку 1., коли $M$ однозв'язний, за властивостями накрить: $\Phi$ - накриття $\Rightarrow$ [$M$ однозв.] $\Rightarrow$ $\Phi$ - гомеоморфізм $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{c}\Phi\text{ - лок. дифео-зм} \\ \text{в околі } \forall \text{ точки}\end{array}\right] \Rightarrow \Phi$ - дифеоморфізм $\Rightarrow \left[\begin{array}{c}d_q\Phi\text{ - лін. ізометрія} \\ \forall q \in M^n(k)\end{array}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi$ - ізометрія.

У загальному випадку будується група $G$

, що ізоморфна фунд. групі $\pi_1(M)$, бо накриття універсальне, і ізометрія $M^n(k)/G \to (M,g)$ (факторизація $\phi$). Повне доведення див., наприклад, у М. М. Постников. Риманова геометрия, $\blacktriangle$

<u>Rem.</u> В ситуації попер. доведення ($(N,h)$ і $(M,g)$ – повні рім. мн. сталої кривини, $N$ однозв'язний, $M$ зв'язний) описана конструкція продовжує працювати, а пп. <u>a.</u> – <u>c.</u> будуть вірними навіть для непостійної кривини за додаткових обмежень на $\phi$! зокрема, воно повинно зберігати тензор кривини, тобто

$$\phi\left((R_h)_p(u,v)w\right) = (R_g)_q\left(\phi(u),\phi(v)\right)\phi(w) \quad \forall\, u,v,w \in T_pN$$

(пор. з власт. ізометрії з <u>Впр.</u> вище), але не тільки. Це твердження <u>Th.</u> Картана - Амброуза - Хікса. Див., наприклад, J. Cheeger, D. Ebin, Comparison theorems in Riemannian geometry.

<u>Впр. 1.</u> Пересвідчитися (після наступної теми) у вірності

зауважень для випадку $K \leq 0$ вище. Таким чином для цього випадку намічено повне доведення п. 1.

2. Довести твердження про Ф для $K > 0$ (наприклад, ознайомившися з дов. Th. К.-А.-Х.)

Інший приклад нетривіальної теореми про пост. кривину:

**Th.** (жорсткості Мостова). Нехай $(M, g)$ і $(N, h)$ - повні зв'язні ріманові многовиди однакової вимірності $n \geq 3$ та однакової ПСК $K < 0$, скінченного об'єму (наприклад, компактні). Тоді вони ізометричні $\Leftrightarrow$ їхні фундаментальні групи $\pi_1(M)$ і $\pi_1(N)$ ізоморфні. Більш того, будь-який ізоморфізм $\pi_1(M) \to \pi_1(N)$ індукується якоюсь ізометрією $M \to N$.

▷ Див. посилання у Б.-З. △

**Rem.** При $K \geq 0$ це, взагалі кажучи, не так. Детальне обговорення ПСК див., наприклад, у Дж. Вольф. Простори сталої кривини