

Питання до заліку з топології

2024/25, зима

1. Топологія та топологічний простір. Околи. Приклади.
2. Стандартна топологія прямої. Опис відкритих підмножин.
3. Замкнені множини та їхні властивості. Порівняння топологій.
4. База топології. База у точці та аксіоми зліченності. Покриття та теорема Ліндельофа.
5. Критерій бази. Приклади.
6. Передбаза. Критерій передбази. Приклади.
7. Метричний простір. Приклади. Ізометрії та біліпшицева еквівалентність метрик.
8. Кулі та сфери. Метрична топологія. Стандартна топологія на евклідовому просторі. Бази метричної топології.
9. Прообраз топології та індукована топологія. Бази індукованої топології. Приклади. Топологія сфери.
10. Розташування точок відносно множини. Приклади. Властивості внутрішності, замикання і межі.
11. Властивості щільності та сепарабельність. Зв'язок з аксіомами зліченності.
12. Неперервні відображення. Неперервність у точці. Неперервність і бази. Приклади. Властивості неперервних відображень.
13. Границя послідовності. Секвенційна неперервність. Секвенційне замикання.
14. Гомеоморфізми та гомеоморфність. Приклади. Відкриті та замкнені відображення. Критерії гомеоморфізма. Топологічні інваріанти.
15. Побудова топології прямого добутку топологічних просторів. Канонічні проєкції та їхні властивості. Приклади.
16. Фактортопологія. Фактортопологія, що породжена відношенням еквівалентності. Факторизація відображень.
17. Приклади факторпросторів: склеювання сторін квадрата. Суми, склеювання та букети.
18. Дія групи на множині та її властивості. Фактортопологія на просторі орбіт. Приклади. Проективні простори.
19. Аксіоми відокремлюваності T_0 - T_2 та зв'язок між ними. Приклади. Єдиність границі у хаусдорфовому просторі.
20. Аксіоми відокремлюваності T_3 - T_4 , регулярність та нормальність. Зв'язок між ними та з аксіомами T_0 - T_2 . Критерій виконання аксіоми T_3 . Приклади.
21. Нормальність метричних просторів. Топологічна інваріантність та наслідуваність аксіом відокремлюваності.

22. Нормальність регулярного простору з не більш ніж зліченною базою. Лема Урисона, теореми Тітце про продовження та Урисона про метризацію (без доведень).
23. Компактні топологічні простори та підмножини. Приклади. Топологічна інваріантність компактності. Компактність прямого добутку.
24. Компактність, замкненість і хаусдорфовість. Нормальність компактного хаусдорфового простору. Локальна компактність та її приклади.
25. Точки накопичення. Властивість нескінченної підмножини компактного простору. Секвенційна компактність та її зв'язок з компактністю. Випадок метричного простору.
26. Обмежені підмножини метричного простору. Обмеженість компактної множини. Критерій компактності підмножин евклідового простору. Теорема Вейєрштрасса. Лема Лебега.
27. Зв'язні топологічні простори та підмножини. Відкритозамкнені підмножини. Приклади. Зв'язність об'єднання зв'язних підмножин. Опис зв'язних підмножин прямої.
28. Достатні умови зв'язності. Топологічна інваріантність зв'язності. Зв'язність зірчатих множин і сфер. Використання зв'язності для доведень негомеоморфності. Зв'язність прямого добутку.
29. Зв'язні компоненти та їхні властивості. Приклади. Теорема Больцано-Коші про проміжне значення та її наслідки. Одновимірна теорема Брауера про нерухому точку.
30. Шляхи. Добуток шляхів. Лінійно зв'язні топологічні простори і підмножини. Приклади. Лінійна зв'язність об'єднання лінійно зв'язних підмножин. Топологічна інваріантність лінійної зв'язності. Лінійна зв'язність прямого добутку.
31. Зв'язність лінійно зв'язного простору. Приклад зв'язного лінійно незв'язного простору.
32. Локальна зв'язність і локальна лінійна зв'язність. Приклади. Локальна евклідовість. Достатня умова лінійної зв'язності областей.
33. Компоненти лінійної зв'язності та їхні властивості. Приклади. Будова ортогональної групи. Теорема Жордана (без доведення).
34. Многовиди, карти та атласи. Приклади.
35. Топологічні властивості многовидів.
36. Поверхні. Зв'язна сума поверхонь та її властивості. Приклади. Класифікація компактних зв'язних поверхонь (без доведень).