550. $ABCD$ – тетраедр. $ABC: x+2y-3z-6=0$, $ABD: 2y+5z-4=0$,

$ACD: 3x+z+1=0$, $BCD: x+2y=0$. Пл. $\alpha \supset AB$, $\alpha \parallel CD$. Знайти α в пр.с.к.

$\alpha \supset AB \Leftrightarrow \alpha$ належить пучку, що визн. ABC і ABD:

$$\lambda(x+2y-3z-6)+\mu(2y+5z-4)=0.$$

$$\lambda x + (2\lambda + 2\mu)y + (-3\lambda + 5\mu)z - 6\lambda - 4\mu = 0$$

Рівняння CD – лінії перетину ACD і BCD:

$$\begin{cases} 3x + z + 1 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$z+1 = -3x$, $x = -2y$, тобто канонічні

$$\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{6} \qquad \left(\text{або: } \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 1, 6)\right)$$

Тоді умова паралельності α цій прямій:

$$-2\cdot\lambda + 1\cdot(2\lambda + 2\mu) + 6\cdot(-3\lambda + 5\mu) = 0$$

$$-18\lambda + 32\mu = 0$$

$\mu = \frac{9}{16}\lambda$, тобто при $\lambda = 16$ $\mu = 9$:

$$16x + 50y - 3z - 132 = 0.$$

—

Ще про перехід до канонічної: у <u>543(г)</u>

$$\begin{cases} z - 4 = 0 \\ 2x + 3z - 7 = 0 \end{cases}$$

Тобто $z = 4$, $x = \frac{1}{2}(7 - 3z) = -\frac{5}{2}$, y немає. Тоді канон.: $\dfrac{x + \frac{5}{2}}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-4}{0}$

(якщо координата постійна, пишемо під нею 0).

571. Знайти площини α і β, що проходять через пряму $l: \begin{cases} 2x + y - 3z + 2 = 0 \\ 5x + 5y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$, якщо $M(4, -3, 1) \in \alpha$, $\alpha \perp \beta$.

α і β належать до пучка

$$\lambda(2x + y - 3z + 2) + \mu(5x + 5y - 4z + 3) = 0$$

$M \in \alpha$:

$$4\lambda + 4\mu = 0$$

$\lambda = -\mu$, скажімо, $\lambda = -1$, $\mu = 1$:

α: $-2x - y + 3z - 2 + 5x + 5y - 4z + 3 = 0$

$$3x + 4y - z + 1 = 0$$

β – теж площина пучка:

$$(2\lambda + 5\mu)x + (\lambda + 5\mu)y - (3\lambda + 4\mu)z + 2\lambda + 3\mu = 0$$

$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow$ їхні в. нормалі $(3, 4, -1)$ і $(2\lambda + 5\mu,$ $\lambda + 5\mu, -3\lambda - 4\mu)$ ортогональні!

$$6\lambda + 15\mu + 4\lambda + 20\mu + 3\lambda + 4\mu = 0$$

$$13\lambda + 39\mu = 0$$

$\lambda = -3\mu$, скажімо, $\mu = -1$, $\lambda = 3$!

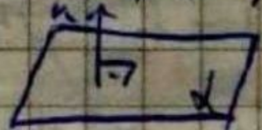
β:

$$x - 2y - 5z + 3 = 0$$

Для площини $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ у дек. с.к. $\vec{n}(A,B,C)$ - в. нормалі.

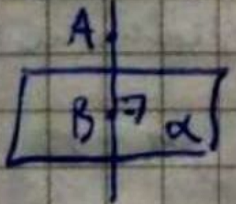
Зокрема, площина, що прох. через (x_0, y_0, z_0) $\perp (A,B,C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$



568. $A(3,-2,1)$, $B(6,0,5)$. Знайти α: $B \in \alpha$, $\alpha \perp AB$. С.к. Дек.

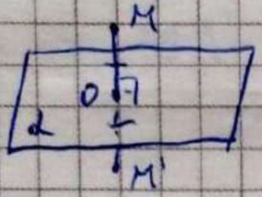
$\overline{AB}$ - напр. вектор AB і в. нормалі α: $\overline{AB} = (3,2,4)$



$$3(x-6) + 2y + 4(z-5) = 0$$

$$3x + 2y + 4z - 38 = 0.$$

[redacted] 582. Знайти точку M', що симетрична $M(1,2,3)$ відн.
$\alpha: 2x-3y+5z-68=0$. С.к. дек.



Тобто $MM' \perp \alpha$ і $MO = OM'$, де $\{O\} = \alpha \cap MM'$.
(O – проекція M на α)

Аналогічно симетрії відн. прямої у площині.
Напр. вектор пр. MM' – це в. нормалі α $(2,-3,5)$. Тому рівн. MM' (що $\ni M$):

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-3t \\ z = 3+5t \end{cases}$$

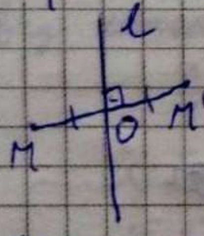
Перетин з α:

$$2(1+2t)-3(2-3t)+5(3+5t)-68=0$$

$$38t-57=0$$

$t=\frac{57}{38}=\frac{3}{2}$, тому $O\left(1+2\cdot\frac{3}{2},\ 2-3\,\frac{3}{2},\ 3+5\cdot\frac{3}{2}\right)=\left(4, -\frac{5}{2}, \frac{21}{2}\right)$.
M' симетрична M відн. O: $M'\left(2\cdot 4-1,\ 2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-2,\ 2\cdot\frac{21}{2}-3\right)=(7,-7,18)$.

583. Знайти точку M' що симетрична $M(1,2,3)$ відносно l:
$\frac{x-8}{1}=\frac{y-11}{3}=\frac{z-4}{-1}$. С.к. дек.



Тобто $MM' \perp l$ і перетинає її у точці O,
$MO = OM'$ (O – проекція M на l).

Можна шукати O через параметричне рівн. l:

$$\begin{cases} x = 8+t \\ y = 11+3t \\ z = 4-t \end{cases}$$

Тоді $\overline{MO} = (7+t, 9+3t, 1-t) \perp$ напр. вектору $(1,3,-1)$ l:

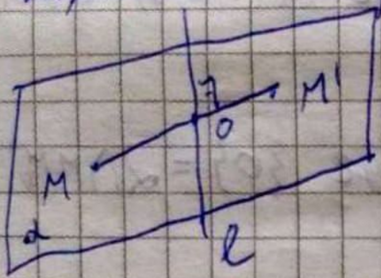
$$1\cdot(7+t)+3\cdot(9+3t)-1\cdot(1-t)=0$$

$$11t+33=0$$

$t=-3$: $O(8-3,\ 11+3(-3),\ 4-(-3))=(5,2,7)$. M' сим. M відн. O:
$M'(2\cdot 5-1,\ 2\cdot 2-2,\ 2\cdot 7-3)=(9,2,11)$.

Або: проведемо площину через $M \perp l$ (тобто її в.

нормалі — напр. вектор l):



$$\alpha:\ 1\cdot(x-1)+3(y-2)-(z-3)=0$$

$$x+3y-z-4=0$$

Тоді O — її перетин з l:

$$(8+t)+3(11+3t)-(4-t)-4=0$$

$$11t+33=0$$

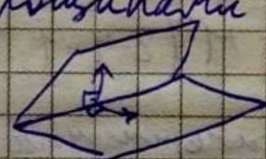
Далі як раніше.

<u>591.</u> $\alpha \ni M(1,2,3)$, $\alpha \perp \beta: 5x-2y+5z-10=0$, α утворює з γ: $x-4y-8z+12=0$ кут $\frac{\pi}{4}$. С.к. дек.

Будемо шукати рівн. α у вигляді $A(x-1)+B(y-2)+C(z-3)=0$, де $n=(A,B,C)$ — вектор нормалі. $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow$ їхні в. нормалі ортогональні, тобто

$$5A-2B+5C=0.$$

Гострий кут між площинами α і β — це гострий кут між їхніми в. нормалі



. В. нормалі γ — це $(1,-4,-8)$. Т.ч.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}=\left|\frac{A-4B-8C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{1+(-4)^2+(-8)^2}}\right|=\left|\frac{A-4B-8C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot 9}\right|$$

$$\frac{1}{2}\cdot 81(A^2+B^2+C^2)=(A-4B-8C)^2$$

$$79A^2+49B^2-47C^2+16AB+32AC-128BC=0$$

$B=\frac{5}{2}(A+C)$:

$$79A^2+\frac{49\cdot 25}{4}(A+C)^2-47C^2+(16A-128C)\frac{5}{2}(A+C)+32AC=0$$

$$1701A^2+1458AC-243C^2=0$$

$$7A^2+6AC-C^2=0$$

$$7\left(\frac{A}{C}\right)^2+6\frac{A}{C}-1=0 \qquad (\text{або: } (7A-C)(A+C)=0)$$

$$\frac{A}{C}=\frac{1}{7}\left(-3\pm\sqrt{9+7}\right)=\frac{1}{7}(-3\pm 4)$$

$\frac{A}{C}=-1$: $A=1,\ C=-1,\ B=\frac{5}{2}(A+C)=0$

α: $\quad 1\cdot(x-1)+0(y-2)-1(z-3)=0$

$$x-z+2=0$$

$\frac{A}{C}=\frac{1}{7}$: $A=1,\ C=7,\ B=\frac{5}{2}(A+C)=20.$

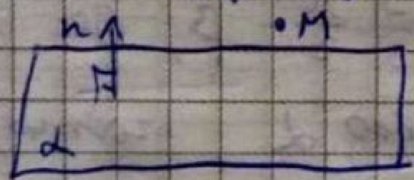
α: $\quad 1\cdot(x-1)+20(y-2)+7(z-3)=0$

$$x+20y+7z-62=0$$

594. $\alpha: 8x+4y+z+1=0$, $\beta: 2x-2y+z+1=0$, $M(1,1,1)$. Знайти той кут між α, β, в якому лежить M. С.к. Дек.

—

$\alpha: Ax+By+Cz+D=0$, $M(x_0,y_0,z_0)$



M лежить у півпросторі, куди направлений n $\Leftrightarrow$ відх. $Ax_0+By_0+Cz_0+D>0$.

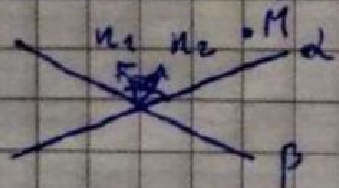
—

У нас $n_1=(8,4,1)$, $n_2=(2,-2,1)$ – в. нормалі α і β відп.

Відхилення M:

α: $8\cdot 1+4\cdot 1+1+1>0$

β: $2\cdot 1-2\cdot 1+1+1>0$



M лежить у куті, куди направлені n_1 і n_2. Його значення – кут, доповнюючий до кута між n_1 і n_2!

$$\cos\alpha = \cos(\pi - \angle(n_1,n_2)) = -\cos\angle(n_1,n_2) = -\frac{(n_1,n_2)}{|n_1|\,|n_2|} =$$

$$= \frac{-(8\cdot 2+4(-2)+1\cdot 1)}{\sqrt{8^2+4^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{-9}{9\cdot 3} = -\frac{1}{3}.$$

Отже, $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

598. $\alpha \supset l$: $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{0}$. $\alpha \cap Oxz = m$, $\alpha \cap Oyz = n$, гострий кут між m і n дор. $\frac{\pi}{3}$. Знайти α С.к. дек.

Рівн. α будемо шукати через пучок. Для цього перейдемо від канон. рівн. до загальних:

$$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{0}$$

$$\begin{cases} -x = y+1 \\ 0 = z-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+1 = 0 \\ z-1 = 0 \end{cases}$$

Отже, рівн. жмутка площин, що прох. через l:

$$\lambda(x+y+1) + \mu(z-1) = 0.$$

$$\lambda x + \lambda y + \mu z + \lambda - \mu = 0.$$

m - її перетин з Oxz:

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda y + \mu z + \lambda - \mu = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Напр. вектор: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda & \lambda & \mu \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-\mu, 0, \lambda) =: a.$

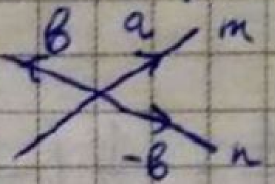
n - перетин з Oyz:

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda y + \mu z + \lambda - \mu = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Напр. вектор: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda & \lambda & \mu \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, \mu, -\lambda) =: b$

Гострий кут між ними (кут між прямими - кут між напр. векторами):

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \left|\frac{(a,b)}{|a||b|}\right| = \frac{|-\lambda^2|}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2}$$



кут між
a і b тупий

$$2\lambda^2 = \lambda^2 + \mu^2$$

$$\lambda^2 = \mu^2$$

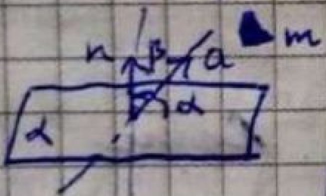
$$\lambda = \pm\mu$$

Тобто або $\lambda = \mu = 1$, α: $x + y + z = 0$.

або $\lambda = 1, \mu = -1$: $x + y - z + 2 = 0$

593. $\alpha \supset l$: $\dfrac{x+7}{-2} = \dfrac{y-6}{3} = \dfrac{z}{1}$, α утворює кут $\dfrac{\pi}{3}$ з m: $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$

Знайти α С.к. дек.



Кут між прямою і площиною: $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \beta$, де β − гострий кут між m і нормаллю α, тобто, якщо n − в. нормалі α, а a − напр. вектор m:

$$\sin\alpha = \cos\beta = \left|\frac{(n,a)}{|n||a|}\right|.$$

α − площина ~~[illegible]~~ пучка, який знаходимо, переходячи від канон. рівнянь l до загальних:

$$\frac{x+7}{-2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{1}$$

$$\begin{cases} 3x+21 = -2y+12 \\ y-6 = 3z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+2y+9=0 \\ y-3z-6=0 \end{cases}$$

Отже, рівн. α шукаємо як $\lambda(3x+2y+9)+\mu(y-3z-6)=0$:

$$3\lambda x+(2\lambda+\mu)y-3\mu z+9\lambda-6\mu=0.$$

6. нормалі $n = (3\lambda, 2\lambda+\mu, -3\mu)$. Напр. вектор m:

$$a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1, -1, 0)$$

За умовою, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\alpha = \frac{|(n,a)|}{|n||a|} = \frac{|-3\lambda - 2\lambda - \mu + 0|}{\sqrt{9\lambda^2 + (2\lambda+\mu)^2 + 9\mu^2}\,\sqrt{2}}$.

$$\sqrt{3}\sqrt{13\lambda^2 + 4\lambda\mu + 10\mu^2} = \sqrt{2}\,|5\lambda+\mu|$$

$$39\lambda^2 + 12\lambda\mu + 30\mu^2 = 50\lambda^2 + 20\lambda\mu + 2\mu^2$$

$$11\lambda^2 + 8\lambda\mu - 28\mu^2 = 0.$$

($\mu \neq 0$, бо інакше $\lambda = 0$ — не рівняння): $11\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 8\frac{\lambda}{\mu} - 28 = 0$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{11}\left(-4 \pm \sqrt{16 + 11\cdot 28}\right) = \frac{1}{11}(-4 \pm 18)$$

$\frac{\lambda}{\mu} = -2$: $\lambda = 2, \mu = -1$: $6x + 3y + 3z + 24 = 0$

$$2x + y + z + 8 = 0.$$

$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{14}{11}$: $\lambda = 14, \mu = 11$: $42x + 39y - 33z + 60 = 0$

$$14x + 13y - 11z + 20 = 0.$$

605. α відсікає на Ox, Oy, Oz відрізки, що пропорційні $1, 2, 3$ відп., $d((3,5,7), \alpha) = 4$. Знайти α. С.к. дек.

Тобто перетини з осями - це $(a,0,0)$, $(0,2a,0)$, $(0,0,3a)$.

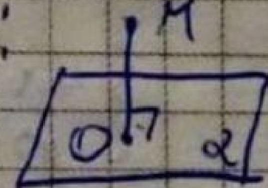
Рівн. у відрізках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} + \frac{z}{3a} = 1 \quad \Big| \cdot 6a$$

$$6x + 3y + 2z - 6a = 0.$$

Відстань від $M(x_0, y_0, z_0)$ до α: $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d(M,\alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Отже, $4 = \frac{|6 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 7 - 6a|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|47 - 6a|}{7}$

$$|47 - 6a| = 28$$

$47 - 6a = 28$, $6a = 19$: $\quad 6x + 3y + 2z - 19 = 0$

$47 - 6a = -28$, $6a = 75$: $\quad 6x + 3y + 2z - 75 = 0.$