Домашнє завдання до заняття 13.11.24

(15.C) Довести, що топологічний простір $(X, \mathcal{T})$ є хаусдорфовим (задовольняє аксіомі T_2) тоді й тільки тоді, коли кожна його точка $x \in X$ є перетином замикань усіх її відкритих околів:

$$\{x\} = \bigcap_{x \in U,\, U \in \mathcal{T}} \overline{U}.$$

(15.11) Довести, що топологічний простір $(X, \mathcal{T})$ задовольняє аксіомі T_1 тоді й тільки тоді, коли кожна його точка $x \in X$ є перетином усіх її відкритих околів:

$$\{x\} = \bigcap_{x \in U,\, U \in \mathcal{T}} U.$$

Вивести звідси і з попередньої задачі, що з аксіоми T_2 випливає T_1.

(17.5) Сформулювати і довести критерій (тобто необхідну та достатню умову) компактності множини у дійсній прямій $\mathbb{R}$ з топологією напівнескінченних інтервалів. Цей критерій повинен бути сформульований у нетопологічних термінах і мати форму "Множина $K \subset \mathbb{R}$ компактна тоді й тільки тоді, коли K...".

(17.8) Довести, що множина $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ компактна у дійсній прямій $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією.

Додаткові задачі (не оцінюються)

(10.37x) Довести, що для будь-яких двох метричних просторів X та Y існує метричний простір Z і відображення $f\colon X \to Z$ та $g\colon Y \to Z$ такі, що $f\colon X \to f(X)$ та $g\colon Y \to g(Y)$ є ізометріями, де $f(X)$ та $g(Y)$ розглядаються з обмеженнями метрики Z. Іншими словами, f та g є *ізометричними вкладеннями* (і це вкладення відносно метричних топологій).

Підказка: розглянути множину $Z = X \sqcup Y$, де відстань між точками $x \in X$ та $y \in Y$ дорівнює $\rho(x, x_0) + 1 + \rho(y_0, y)$ для деяких фіксованих $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$.

(10.38x) Для будь-яких двох метричних просторів X та Y *відстанню Громова – Хаусдорфа* між ними зветься інфімум відстаней Хаусдорфа між підмножинами $f(X)$ та $g(Y)$ у метричному просторі Z (див. задачу **4.Mx** у одному з минулих домашніх) за усіма можливими просторами Z та ізометричними вкладеннями $f\colon X \to Z$ та $g\colon Y \to Z$. З попередньої задачі випливає, що така відстань визначена. Показати, що вона, втім, може дорівнювати $+\infty$.

(10.39x) Довести, що відстань Громова – Хаусдорфа є симетричною і задовольняє узагальненню нерівності трикутника на т. зв. *розширені метрики*, тобто такі, що можуть приймати значення $+\infty$, коректно сформулювавши це узагальнення.

(10.40x) Довести, що відстань Громова – Хаусдорфа є невиродженою для компактних просторів у наступному сенсі: відстань між компактними метричними просторами дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли вони ізометричні. Показати, що достатність тут вірна для довільних просторів, а от необхідність може не мати місця у некомпактному випадку.