501. Пряма $l \ni M(3,-1,-4)$, перетинає Oy і компланарна (тобто $\parallel$) $\alpha: y+2z=0$. Знайти рівн. l (ск. аф.

l перетинає $Oy \Rightarrow l \ni N(0,a,0)$ для деякого a. Тоді її рівн. (як MN):

$$\frac{x-3}{0-3} = \frac{y+1}{a+1} = \frac{z+4}{0+4}$$

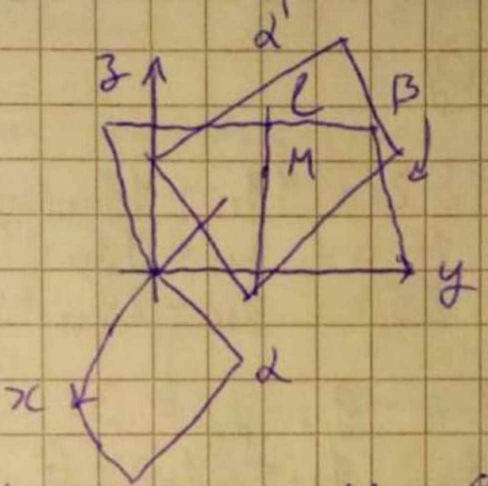
Оск. вона $\parallel \alpha$, її напр. вектор $(-3, a+1, 4)$ задов. умові

$$-3\cdot 0 + (a+1)\cdot 1 + 4\cdot 2 = 0$$

$$a + 9 = 0$$

$a = -9$, тобто $l: \dfrac{x-3}{-3} = \dfrac{y+1}{-8} = \dfrac{z+4}{4}$

Або:



Оск. $l \parallel \alpha$ і $\ni M$, вона лежить у площ. $\alpha' \parallel \alpha$: $\alpha' \ni M$:

$$\alpha': \; 0\cdot(x-3) + 1\cdot(y+1) + 2(z+4) = 0$$

$$y + 2z + 9 = 0$$

Оск. l перетинається з Oy, вона лежить у площ. β : $\underbrace{\beta \supset Oy}_{(\Rightarrow \beta \ni (0,0,0))}$ і $\beta \ni M$:

$$\beta: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 3-0 & -1-0 & -4-0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$4x + 3z = 0$$

Тобто l − перетин α' і β, тому має заг. рівняння $\begin{cases} 4x + 3z = 0 \\ y + 2z + 9 = 0. \end{cases}$

501. $l \ni M(3,-1,-4)$, l перетинає Oy, $l \parallel \alpha: y+2z=0$. Знайти l; аф.с.к.

Будемо шукати канон. рівн. у вигляді $\frac{x-3}{a}=\frac{y+1}{b}=\frac{z+4}{c}$. Нехай $(0,d,0)$ – т. перетину з Oy: $\frac{0-3}{a}=\frac{d+1}{b}=\frac{0+4}{c}$. Зокрема, $-\frac{3}{a}=\frac{4}{c}$, $4a+3c=0$. $l \parallel \alpha \Leftrightarrow 1\cdot b+2c=0$. Т.ч.,

$$\begin{cases} 4a+3c=0 \\ b+2c=0 \end{cases}$$

$b=-2c$, $a=-\frac{3}{4}c$. Покладемо $c=-4$ (напр. вектор знах. з точністю до множ. на скаляр), тоді $(a,b,c)=(3,8,-4)$.

Отже, $l: \frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{8}=\frac{z+4}{-4}$.

515. $l: \begin{cases} x=3+t \\ y=-1+2t \\ z=4t \end{cases}$ $m: \begin{cases} x=-2+3t \\ y=-1 \\ z=4-t \end{cases}$ $n: \begin{cases} x-3y+z=0 \\ x+y-z+4=0. \end{cases}$

Пряма o перетинає l і m, $\parallel n$. Знайти o. Аф. с.к.

Нехай перетини з l і m відп. параметрам t_1 і t_2, тобто це $L(3+t_1, -1+2t_1, 4t_1)$ і $M(-2+3t_2, -1, 4-t_2)$. Тоді $\overline{LM} = (-t_1+3t_2-5, -2t_1, -4t_1-t_2+4)$ – напр. вектор o. $o \parallel n \Leftrightarrow o \parallel$ кожній з двох площин з рівнянь n, тобто:

$$\begin{cases} 1\cdot(-t_1+3t_2-5)-3(-2t_1)+(-4t_1-t_2+4)=0 \\ 1\cdot(-t_1+3t_2-5)+(-2t_1)-(-4t_1-t_2+4)=0 \end{cases}$$

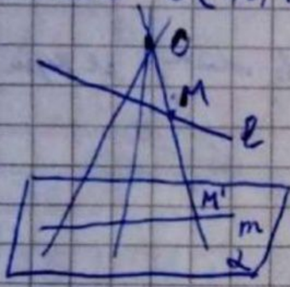
$$\begin{cases} t_1+2t_2-1=0 \\ t_1+4t_2-9=0 \end{cases}$$

$2t_2-8=0$, $t_2=4$, $t_1=1-2t_2=-7$. Тоді $L(-4,-15,-28)$, $M(10,-1,0)$, і $o=LM$: $\frac{x-10}{-4-10}=\frac{y+1}{-15+1}=\frac{z-0}{-28-0}$,

$$\frac{x-10}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2}$$

Або: шукати у заг. вигляді як перетин площин α, що $\ni l$ і $\parallel n$ і β, що $\ni m$ і $\parallel n$.

520. Знайти рівняння проекції m прямої $l: \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ з точки $O(1,2,1)$ на площину $\alpha: y-2z+4=0$. Аф.с.к.



Проекція - це ГМТ M', що є перетинами OM і α, для усіх $M \in l$.

Тобто це перетин α і пл. β, що прох. через O і l:

$$\beta: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2-1 & 1-2 & 0-1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}(x-1) - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}(y-2) + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}(z-1) = 0,$$

$$-3x+3-4y+8+z-1=0$$

$$3x+4y-z-10=0.$$

Тобто $m: \begin{cases} y-2z+4=0 \\ 3x+4y-z-10=0. \end{cases}$

530(1). Встановити розташування пари площин

$$2x+3y+4z-12=0, \quad 3x-6y+1=0. \quad \text{Аф с.к.}$$

- Ан-но прямим у площині: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$
- співпадають, якщо $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.
- паралельні, якщо $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$
- перетинаються по прямій в іншому випадку
-

$$\frac{2}{3} \neq \frac{3}{-6} \neq \frac{4}{0} \text{ - перетинаються.}$$

534(1) Знайти розташування прямої і площини

$$\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}, \quad 3x+5y-z-2=0. \quad \text{Аф.с.к.}$$

- $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ і $Ax+By+Cz+D=0$
- перетинаються у точці, якщо $Aa+Bb+Cc\neq 0$.
- паралельні, якщо $Aa+Bb+Cc=0$ і $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$.
- пряма лежить у площині, якщо $Aa+Bb+Cc=Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.
- У нас $3\cdot 4+5\cdot 3-1\neq 0$. Знайдено точку перетину:

$$\begin{cases} x = 12+4t \\ y = 9+3t \\ z = 1+t \end{cases}$$

підставимо у рівн. площини:

$$3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0$$

$$26t+78=0$$

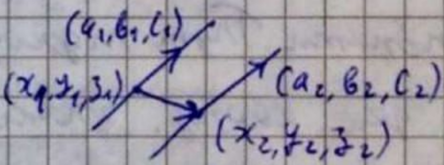
$t=-3$ т. $M(12+4(-3),\ 9+3(-3),\ 1-3) = (0,0,-2)$.

539(1) Знайти розташування пари прямих: Аф.с.к.

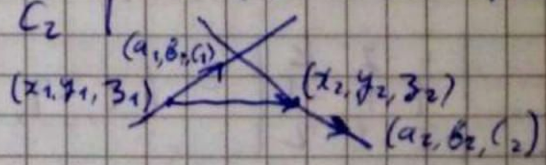
$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 7+t \\ z = 3+4t \end{cases} \quad і \quad \begin{cases} x = 6+3t \\ y = -1-2t \\ z = -2+t \end{cases}$$

– Прямі $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ і $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$:

- якщо (a_1,b_1,c_1) колінеарний (a_2,b_2,c_2) $\left(\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\right)$:
  - співпадають, якщо $\frac{x_2-x_1}{a_1}=\frac{y_2-y_1}{b_1}=\frac{z_2-z_1}{c_1}$ (точка другої прямої належить до першої), тобто коли $(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ теж колінеарний напрямним.



  - паралельні, якщо ні.
- якщо неколінеарні:
  - перетинаються, якщо $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$ (всі 3 вектори компланарні)



  - схрещуються, якщо ні

–

У нас $(2,1,4)$ і $(3,-2,1)$ неколінеарні. При цьому

$$\begin{vmatrix} 6-1 & -1-7 & -2-3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -8 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot 9+8\cdot(-10)-5\cdot(-7)=0.$$

Вони перетинаються. Спільна площина:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-7 & z-3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$9(x-1)+10(y-7)-7(z-3)=0$$

$$9x+10y-7z-58=0.$$

Точка перетину: нехай вона відп. t_1 на першій прямій і t_2 – на другій.
$$\begin{cases} 1+2t_1 = 6+3t_2 \\ 7+t_1 = -1-2t_2 \\ 3+4t_1 = -2+t_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t_1-3t_2-5=0 & (1) \\ t_1+2t_2+8=0 & (2) \\ 4t_1-t_2+5=0 \quad |\cdot 2 & (3) \end{cases}$$

$9t_1+18=0$, $t_1=-2$, $t_2 = 4t_1+5 = -3$ – це з (2) і (3). Підставимо в (1): $2(-2)-3(-3)-5=0$ вірно. Отже, точка пер. $(1+2(-2),\ 7-2,\ 3+4(-2)) = (-3, 5, -5)$.

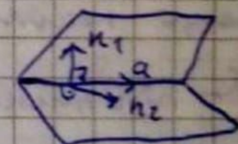
<u>541(2)</u> Знайти розташування

$$\begin{cases} x = t \\ y = -8-4t \\ z = -3-3t \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases}$$. Аф с.к.

Для другої прямої перейдемо від заг. рівнянь до канонічних (або параметричних), знайшовши точку і напр. вектор.

Точку треба підібрати. Тут підходить $(0,0,0)$.

Напр. вектор у дек. коорд. знаходиться як $[n_1, n_2]$, де n_1 і n_2 – в. нормалі площин, що утворюють пряму.



Але ця формула працює і в афінних коорд.!

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1, -4, -3)$$

Тобто друга пряма: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{-3}$. Напр. вектори збігаються. При цьому т. $(0,0,0)$ другої пр. $\notin$ першій:

$\frac{0}{1} \neq \frac{0+8}{-4} \neq \frac{0+3}{-3}$ (або т. $(0,-8,-3)$ першої не $\notin$ другій, бо $\begin{cases} 0-8-(-3)\neq 0 \\ 2\cdot 0-(-8)+2(-3)\neq 0 \end{cases}$). Отже, вони паралельні. Їх спільна площина містить т. $(0,-8,-3)$ першої пр. $(0,0,0)$ другої і $\parallel (1,-4,-3)$:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & -8-0 & -3-0 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$12x - 3y + 8z = 0.$$

Інший спосіб переходу до канон. рівнянь - перетворення загальних:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases}$$

Виразимо z : $z = x+y$ і підставимо у друге:

$$2x-y+2x+2y=0$$

$$4x=-y$$

$$x=-\frac{y}{4}$$

Тоді $z = x+y = x-4x = -3x$: $-\frac{z}{3} = x$. Разом маємо:

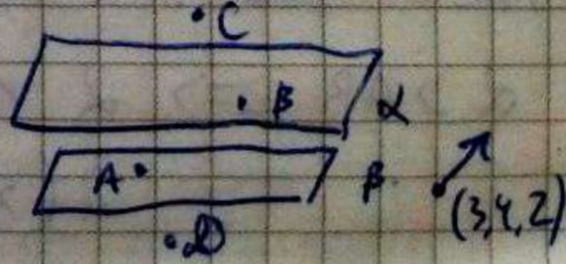
$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{-3}.$$

558. $\alpha: 3x+4y+2z-10=0$, $\beta: 3x+4y+2z+5=0$. Знайти розташування точок $A(1,1,1)$, $B(2,0,0)$, $C(5,6,1)$, $D(-4,0,1)$ відн. них. Аф.СК.

Віджилення:

	Відн. α	Відн. β
A	$3\cdot1+4\cdot1+2\cdot1-10<0$	$3\cdot1+4\cdot1+2\cdot1+5>0$
B	$3\cdot2-10<0$	$3\cdot2+5>0$
C	>0	>0
D	<0	<0

Тобто A і B – між α і β (враховуючи, що в їхніх рівн. коеф. біля x, y, z однакові), C – за межами обмеженої α і β смуги, точніше, за α (бо α – з додатнього боку від β), D – за β.



549. α проходить через лінію перетину $\beta: 2x - z = 0$ і $\gamma: x + y - z + 5 = 0$ і паралельна $l: \frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{4}$.

Знайти рівн. α. Аф. с.к.

—

α можна шукати як площину жмутка, що задають β і γ (ан-но прямим у площині):

$$\lambda(2x - z) + \mu(x + y - z + 5) = 0$$

$$(2\lambda + \mu)x + \mu y + (-\lambda - \mu)z + 5\mu = 0.$$

Ця площина $\parallel l \iff 7(2\lambda + \mu) - 1 \cdot \mu + 4(-\lambda - \mu) = 0.$

$$10\lambda + 2\mu = 0.$$

$$\mu = -5\lambda.$$

λ і μ знах. з точністю до множ. на число, тому, наприклад, можна покласти $\lambda = 1$, $\mu = -5$. Рівн. α:

$$(2 \cdot 1 - 5)x - 5y + (-1 - (-5))z + 5(-5) = 0$$

$$-3x - 5y + 4z - 25 = 0.$$

551. α прох. через лінію перетину $\beta: x+2y+3z-4=0$ і $\gamma: 3x+z-5=0$, перетинає Oy у $(0,a,0)$ і Oz у $(0,0,b)$, $a=b$. Знайти α. Аф. с.к.

Знову пучок:

$$\lambda(x+2y+3z-4)+\mu(3x+z-5)=0.$$

Можемо з самого початку вважати $\mu=1$ (або поділити на μ у припущенні, що $\mu\neq0$). Так ми втрачаємо пл. $\mu=0$, тобто $\beta: x+2y+3z-4=0$ (вона все одно не задов. умові).

Отже, $\alpha: \lambda(x+2y+3z-4)+3x+z-5=0.$

Перетин з Oy: $x=z=0$, $2\lambda y-4\lambda-5=0$, $y=\frac{5+4\lambda}{2\lambda}$ $(=a)$

Перетин з Oz: $x=y=0$, $3\lambda z-4\lambda+z-5=0$, $z=\frac{4\lambda+5}{3\lambda+1}$ $(=b)$

Відрізки рівні:

$$\frac{5+4\lambda}{2\lambda}=\frac{4\lambda+5}{3\lambda+1}$$

Тобто $5+4\lambda=0$ або $2\lambda=3\lambda+1$

$\lambda = -\frac{5}{4}$: $-\frac{5}{4}(x+2y+3z-4)+3x+z-5=0$

$$7x-10y-11z=0.$$

(тобто відсікаються нульові відрізки, $O \in \alpha$)

$\lambda=-1$: $-x-2y-3z+4+3x+z-5=0$

$$2x-2y-2z-1=0.$$

<u>570.</u> $\alpha \perp \beta$, $\beta: x+3y+5z-10=0$, $\alpha \supset l$, l - перептин β і Oxy.

Знайти α. Дек. с.к.

Oxy має рівн. $z=0$, тобто α належить до ~~пучка~~ жмутку

$$\lambda(x+3y+5z-10)+\mu z=0.$$

Oxy, очевидно, не задов. умові, тому можна взяти $\lambda=1$:

$$x+3y+(5+\mu)z-10=0.$$

$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow$ їхні в. нормалі $n=(1,3,5+\mu)$ і $m=(1,3,5)$ ортогональні:

$0=(n,m)=1+9+5(5+\mu)=35+5\mu \Leftrightarrow \mu=-7.$

Тобто α: $x+3y-2z-10=0.$

– Для площини α: $Ax+By+Cz+D=0$ у дек. с.к. $n(A,B,C)$ - в. нормалі.

Зокрема, ~~пряма~~ площина, що прох. через (x_0,y_0,z_0) $\perp(A,B,C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$