Варіант 1

1. Довести, що в T_1-просторі будь-яка множина є перетином деякої сукупності відкритих множин.

Варіант 2

1. Нехай $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – сукупність компактних підмножин хаусдорфового топологічного простору, U відкрита і містить $\bigcap\limits_{\alpha\in A} K_\alpha$. Довести, що існує скінченна підмножина $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset A$ така, що $\bigcap\limits_{i=1}^n K_{\alpha_i} \subset U$.

Варіант 3

1. Довести, що топологічний простір X зв'язний тоді й тільки тоді, коли з неперервності $f\colon X \to Y$, де Y – простір з дискретною топологією, випливає, що f – постійне відображення.

Варіант 4

1. Довести, що підмножина $\mathbb{R}^n$ компактна тоді й тільки тоді, коли будь-яка неперервна на ній функція обмежена.

Варіант 5

1. Сукупність $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ підмножин топологічного простору X зветься локально скінченною, якщо кожна точка X має відкритий окіл, що перетинається лише зі скінченною кількістю цих підмножин. Довести, що компактна підмножина X може перетинатися лише зі скінченною кількістю підмножин локально скінченної сукупності.

Варіант 6

1. Довести, що замкнені підмножини локально компактного простору локально компактні.

Варіант 7

1. Нехай підмножини A і B топологічного простору X компактні. Визначити, чи вірно в загальному випадку, що $A\cap B$ і $A\cup B$ компактні (довести, якщо так; навести контрприклад, якщо ні).

Варіант 8

1. Показати, що якщо топологічний простір X хаусдорфовий, то для будь-яких його компактних підмножин A і B, що не перетинаються, існують відкриті множини U і V такі, що $A \subset U$, $B \subset V$ і $U \cap V = \varnothing$.

Варіант 9

1. Показати, що добуток топологічних просторів $X \times Y$ регулярний тоді й тільки тоді, коли X і Y регулярні.

Варіант 10

1. Нехай A – підмножина зв'язного топологічного простору X. Довести, що якщо ∂A зв'язна, то $\overline{A}$ також зв'язна.

Варіант 11

1. Нехай A – нескінченна підмножина топологічного простору X, який задовольняє аксіомі T_1. Показати, що точка $x \in X$ є точкою накопичення A тоді й тільки тоді, коли є її граничною точкою.

Варіант 12

1. Довести, що якщо підмножини A і B топологічного простору X відкриті, причому $A \cap B$ і $A \cup B$ зв'язні, то A і B зв'язні. Показати, що це, взагалі кажучи, не так для довільних зв'язних A і B.

Варіант 13

1. Показати, що якщо Y компактний, то для будь-якого X канонічна проекція $p_X \colon X \times Y \to X$ відкрита і замкнена.

Варіант 14

1. Довести, що топологічний простір X зв'язний тоді й тільки тоді, коли з $X = A \cup B$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ випливає, що $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$ або $A \cap \overline{B} \neq \varnothing$.

Варіант 15

1. Довести, що відкриті підмножини хаусдорфового локально компактного простору локально компактні.

Варіант 16

1. Довести, що якщо підмножини A і B топологічного простору X відкриті, причому $A \cap B$ і $A \cup B$ лінійно зв'язні, то A і B лінійно зв'язні. Показати, що це, взагалі кажучи, не так для довільних лінійно зв'язних A і B.

Варіант 17

1. Довести, що прямий добуток локально компактних просторів локально компактний.

Варіант 18

1. Нехай $X = A \cup B$ – підмножина площини $\mathbb{R}^2$, де $A = \{(r, \varphi) \mid r = e^{\frac{1}{1+\varphi^2}}, \varphi > 0\}$ (у полярних координатах) і $B = S^1$. З'ясувати, чи є зв'язним простір X.

Варіант 19

1. Довести, що ε-окіл зв'язної підмножини $A \subset \mathbb{R}^n$ (тобто множина $\{x \mid \rho(x, A) < \varepsilon\}$) лінійно зв'язний.

Варіант 20

1. Нехай топологічний простір X є скінченним диз'юнктним об'єднанням підмножин: $X = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$. Показати, що усі ці множини є відкритозамкненими тоді й тільки тоді, коли вони попарно розділені, тобто $\overline{A_i} \cap A_j = A_i \cap \overline{A_j} = \varnothing$ для будь-яких $i \neq j$.

Варіант 21

1. Довести, що для будь-якої зв'язної $A \subset \mathbb{R}^n$, що міститься у відкритій U, існує відкрита лінійно зв'язна V така, що $A \subset V \subset U$.

Варіант 22

1. Нехай $A = \{(x, y) | x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}\}$ і $B = \{(x, y) | x \notin \mathbb{Q},\ y \notin \mathbb{Q}\}$ – підмножини площини $\mathbb{R}^2$. Встановити, чи зв'язні A, B і $A \cup B$.

Варіант 23

1. Нехай $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ – незростаюча послідовність компактних непорожніх підмножин хаусдорфового топологічного простору. Довести, що перетин $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ непорожній.

Варіант 24

1. Нехай K – компактна підмножина метричного простору, що міститься у відкритій U. Довести, що існує $\varepsilon > 0$ таке, що U містить ε-окіл K (тобто множину $\{x \mid \rho(x, K) < \varepsilon\}$).

Варіант 25

1. Довести, що якщо підмножини A і B топологічного простору X замкнені, причому $A \cap B$ і $A \cup B$ зв'язні, то A і B зв'язні. Показати, що це, взагалі кажучи, не так для довільних зв'язних A і B.

Варіант 26

1. Довести, що якщо простори X і Y зв'язні, а $A \subset X$, $B \subset Y$ – їхні власні підмножини (тобто $A \neq X$, $B \neq Y$), то $X \times Y \setminus A \times B$ зв'язна.

Варіант 27

1. Встановити, чи зв'язна підмножина $\mathbb{R}^2$, що складається з усіх точок, хоча б одна координата яких раціональна.