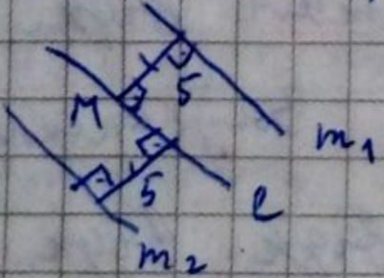
432. Ан-но 433.

450. $l \parallel m$, $l: 5x+12y-1=0$, $d(l,m)=5$. Знайти m. С.к. дек.



$l \parallel m \Rightarrow$ рівн. m: $5x+12y+C=0$. Відстань між пар. прямими — це $d(M,m)$ $\forall M \in l$. Нехай $M(x_0,y_0)\in l$. Тоді

$$5=d(l,m)=d(M,m)=\frac{|5x_0+12y_0+C|}{\sqrt{5^2+12^2}} =$$

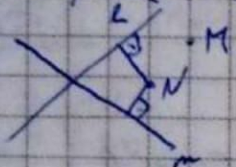
Оскільки $M \in l$, $5x_0 + 12y_0 - 1 = 0$, тобто $5x_0 + 12y_0 = 1$:

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{|1+c|}{\sqrt{169}} = \dfrac{|1+c|}{13}$

Отже, $|1+c| = 5 \cdot 13 = 65$: $c_1 = 64$, $c_2 = -66$, $m_1: 5x + 12y + 64 = 0$,

$m_2: 5x + 12y - 66 = 0$

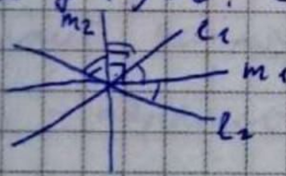
461. $l: 3x+4y-2=0$, $m: 5x-12y-4=0$, $M(1,1)$. N лежить в тому ж куті, що M, $d(N,l)=3$, $d(N,m)=1$. Знайти N. С.к. дек.



Отже, для $N(x,y)$ $\frac{|3x+4y-2|}{5}=3$, $\frac{|5x-12y-4|}{13}=1$.

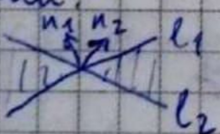
N має тіж знаки відхилень відн. l, m, що й M, тобто модулі розкр. зі знаками $+, -$ ...

469 Знайти рівн. бісектриси m гострого кута між $l_1: x-3y=0$ і $l_2: 3x-y+5=0$. С.к. дек.



Знаємо, що рівн. бісектрис: $\frac{|x-3y|}{\sqrt{10}}=\frac{|3x-y+5|}{\sqrt{10}}$, $|x-3y|=|3x-y+5|$

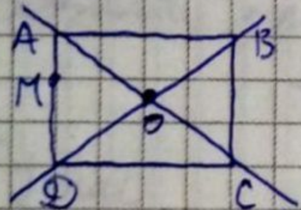
В. нормалей: $n_1(1,-3)$, $n_2(3,-1)$. $(n_1,n_2)=6>0$, тобто кут між n_1 і n_2 гострий:



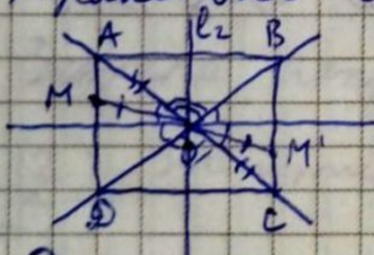
Це означає, що гострі кути між l_1 і l_2 – це перетини півплощин, куди напрямлений n_1, але не n_2 і навпаки, тобто модулі треба розкрити з різними знаками: $x-3y=-3x+y-5$

$$4x-4y+5=0.$$

460. $ABCD$ – прямокутник, $AC: 7x - y + 4 = 0$, $BD: x + y - 2 = 0$,
$M(3,5) \in AD$, $M \neq A$, $M \neq D$. Знайти рівн. AB, BC, CD, DA. C к дек.



У прямокутнику бісектриси кутів між діагоналями паралельні сторонам:



Рівн. бісектрис:

$$\frac{|7x - y + 4|}{\sqrt{50}} = \frac{|x + y - 2|}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{7x - y + 4}{5} = \pm\, x + y - 2$$

$$7x - y + 4 \mp 5(x + y - 2) = 0$$

$l_1: 2x - 6y + 14 = 0, \quad x - 3y + 7 = 0,$

$l_2: 12x + 4y - 6 = 0, \quad 6x + 2y - 3 = 0$

Відхилення $M(3,5)$:

від AC: $7 \cdot 3 - 5 + 4 = 20 > 0$,

від BD: $3 + 5 - 2 = 6 > 0$.

Отже, для бісектриса, що лежить в тому ж куті, що M, обидва модулі розкриваються з +, і маємо верхній знак в рівн. вище: це l_1. Т.ч., $l_1 \parallel AB \parallel CD$, $l_2 \parallel AD \parallel BC$.

AD прох. через $M(3,5)$ і $\parallel l_2$:

AD: $$6(x-3)+2(y-5)=0$$
$$3x-9+y-5=0$$
$$3x+y-14=0$$

O - т. пер. діагоналей AC і BD:
$$\begin{cases} 7x-y+4=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$$
$8x+2=0$, $x=-\frac{1}{4}$, $y=2-x=\frac{9}{4}$. $O\left(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$.

M' - симетрична M відн. O: $M'\left(2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-3,\ 2\cdot\frac{9}{4}-5\right)=\left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

BC прох. через M' і $\parallel AD$ (або l_2):

BC: $$3\left(x+\frac{7}{2}\right)+y+\frac{1}{2}=0$$
$$3x+y+11=0$$

(Або: можна було знайти спочатку AB і CD, далі т. B як перетин AB і BD, і провести $BC \parallel AD$ через B).

A - т. перетину AC і AD:
$$\begin{cases} 7x-y+4=0 \\ 3x+y-14=0 \end{cases}$$
$10x-10=0$, $x=1$, $y=7x+4=11$. $A(1,11)$

C симетрична A відн. O: $C\left(2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-1,\ 2\cdot\frac{9}{4}-11\right)=\left(-\frac{3}{2}, -\frac{13}{2}\right)$

(Або: C - т. перетину AC і BC)

AB прох. через A і $\parallel l_1$:

AB: $$1\cdot(x-1)-3\cdot(y-11)=0$$
$$x-3y+32=0.$$

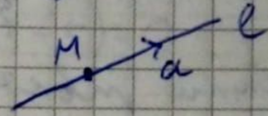
CD прох. через C і $\parallel AB$ (або l_1):

CD: $$1\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)-3\left(y+\frac{13}{2}\right)=0$$
$$x-3y-18=0$$

494.(1) Знайти рівн. прямої l у просторі, що висікає на осях Ox і Oy відрізки 2 і 3 відповідно. Аф.с.к.

Тобто l прох. через т. $(2,0,0)$ і $(0,3,0)$.

– Канонічні рівн. прямої, що прох. через $M(x_0,y_0,z_0)$ з напр. вектором $a=(a_1,a_2,a_3)$:

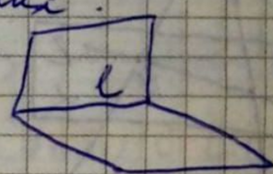


$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

Параметричні: $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$

Від канон. легко перейти до загальних:

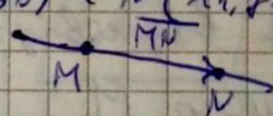
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



(пряма як перетин двох площин).

Зокрема, пряма, що прох. через $M(x_0,y_0,z_0)$ і $N(x_1,y_1,z_1)$:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$



– У нас: l: $\dfrac{x-2}{0-2}=\dfrac{y-0}{3-0}=\dfrac{z-0}{0-0}$

$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{0}.$$

Зокрема напр. вектор: $a=(-2,3,0)$

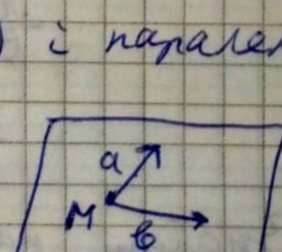
(2) Знайти рівн. площини α, що прох. через l і $\parallel Oz$. Аф.с.к.

– Загальне рівн. площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Якщо площина прох. через $M(x_0,y_0,z_0)$ і паралельна $a=(a_1,a_2,a_3)$ і $b=(b_1,b_2,b_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0$$



– У нас α прох. через l, тобто прох. через $M(2,0,0)$ і $\parallel a=(-2,3,0)$. Крім того, вона $\parallel b=(0,0,1)$. Тому її рівн.:

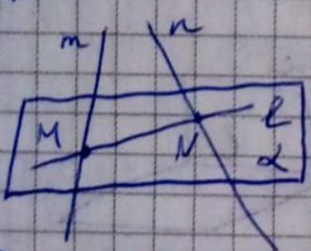
$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^{=3} (x-2) - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^{=-2} y + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^{=0} z = 0$$

$$3x + 2y - 6 = 0.$$

500. Знайти рівняння прямої l, що лежить у площині $\alpha: y + 2z = 0$ і перетинає прямі $m: \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$ і $n: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 4+2t \\ z = 1 \end{cases}$

Аф. с.к.



Тобто l - це пряма MN, де M і N - т. перетину α з m і n відповідно.

Знайдемо M:

$$t + 2 \cdot (4t) = 0$$

$$9t = 0$$

$t = 0$, тобто $M\ (1-0, 0, 4 \cdot 0) = (1, 0, 0)$.

N: $$4 + 2t + 2 \cdot 1 = 0$$

$$2t + 6 = 0$$

$t = -3$, тобто $N\ (2+3, 4+2(-3), 1) = (5, -2, 1)$.

Тоді $l = MN$:

$$\frac{x-1}{5-1} = \frac{y-0}{-2-0} = \frac{z-0}{1-0}$$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}.$$

502. Знайти параметричні і загальне рівняння площини α, що прох. через $M(2, 3, -5)$ і паралельна $a = (-5, 6, 4)$ і $b = (2, -1, 0)$. Аф. с.к.

Парам. рівн. площини: $\begin{cases} x = x_0 + a_1 u + b_1 v = 2 - 5u + 2v \\ y = y_0 + a_2 u + b_2 v = 3 + 6u - v \\ z = z_0 + a_3 u + b_3 v = -5 + 4u \end{cases}$

Загальне:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+5 \\ -5 & 6 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}(x-2) - \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}(y-3) + \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}(z+5) = 0$$

$$4(x-2) - (-8)(y-3) + (-7)(z+5) = 0$$

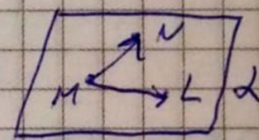
$$4x + 8y - 7z - 67 = 0.$$

<u>508</u>. Пл. α прох. через $M(1,2,3)$, паралельна $l: x = y = z$ і відсікає рівні відрізки на Ox і Oy. Знайти рівн. α. Аф. с.к.

Тобто α прох. через $N(a,0,0)$ і $L(0,a,0)$ для деякого $a \in \mathbb{R}$, де $a \neq 0$, бо в умові маються на увазі ненульові відр.

— Площина, що прох. через $M(x_0,y_0,z_0)$, $N(x_1,y_1,z_1)$ і $L(x_2,y_2,z_2)$ (бо вона прох. через M і $\parallel \overline{MN}, \overline{ML}$):

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$



— У нас:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ a-1 & 0-2 & 0-3 \\ 0-1 & a-2 & 0-3 \end{vmatrix} = 0$$

Або простіше, міняючи точки місцями:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & a-0 & 0-0 \\ 1-a & 2-0 & 3-0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & a & 0 \\ 1-a & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}(x-a) - \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 1-a & 3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} -a & a \\ 1-a & 2 \end{vmatrix} z = 0$$

$$3ax + 3ay + (a^2-3a)z - 3a^2 = 0.$$

Скоротимо на $a \neq 0$:

$$3x + 3y + (a-3)z - 3a = 0.$$

— Площина $Ax + By + Cz + D = 0$ паралельна вектору $b = (b_1, b_2, b_3) \iff Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 = 0$ (це вірно $\forall$ аф. с.к.).

У нас α паралельна напр. - вектору $b=(1,1,1)$ прямої l:

$$3\cdot 1+3\cdot 1+(a-3)\cdot 1=0$$

$$a+3=0$$

$a=-3$. Тобто α: $3x+3y-6z+9=0$

$$x+y-2z+3=0.$$

Або: можна було проводити α через $M(1,2,3)$ і $N(a,0,0)$ паралельно $b=(1,1,1)$ і перевіряти належність $L(0,a,0)$ їй. Або через N і L паралельно b:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & a-0 & 0-0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}(x-a)-\begin{vmatrix} -a & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} -a & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}z=0$$

$$ax+ay-2az-a^2=0.$$

Скоротимо на $a\neq 0$:

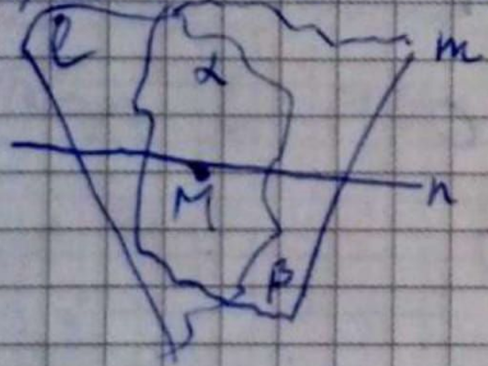
$$x+y-2z-a=0.$$

Т. $M(1,2,3)$ належить α:

$$1+2-6-a=0$$

$-3-a=0$, $a=-3$, тому α: $x+y-2z+3=0$.

516. Знайти рівн. прямої n, що проходить через $M(1,2,3)$ і перетинає прямі $l: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$ і $m: \frac{x}{4} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{3}$. Аф с.к.



$M \in n$, n перетинається з $l \Rightarrow$ n міститься у площині α, що проходить через l і M, тобто містить $M(1,2,3)$, $A(0,-1,2)$:

$\parallel a = (2,-2,1)$;

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0-1 & -1-2 & 2-3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}(x-1) - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}(y-2) + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}(z-3) = 0$$

$$-5x+5-y+2+8z-24=0, \quad 5x+y-8z+17=0$$

Апко $M \in l$, l перет. з n, означає, що l лежить у площині β, що прох. через M і n:

$$\beta: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0-1 & -2-2 & 0-3 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}(x-1) - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}(y-2) + \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}(z-3) = 0$$

$$-12x+12-9y+18+16z-48=0 \qquad 12x+9y-16z+18=0.$$

Отже, l - перетин α і β, тому задається загальними рівняннями:

$$\begin{cases} 5x + y - 8z + 17 = 0 \\ 12x + 9y - 16z + 18 = 0. \end{cases}$$