Домашнє завдання до заняття 28.10.24

(11.10) Довести, що наступні підмножини площини $\mathbb{R}^2$ (з топологіями, що індуковані стандартною) гомеоморфні:

1. уся площина $\mathbb{R}^2$;
3. відкрита смуга $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1)\}$;
4. відкрита напівплощина $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$;
5. відкрита напівсмуга $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \in (0, 1)\}$.

(15.4) Нехай $f, g \colon X \to Y$ – неперервні відображення топологічних просторів. Довести, що якщо Y хаусдорфовий, то *множина збігу*

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

цих двох відображень замкнена.

(20.P) Довести, що прямий добуток топологічних просторів $X \times Y$ задовольняє першій аксіомі зліченності тоді й тільки тоді, коли простори X та Y задовольняють цій аксіомі.

Додаткові задачі (не оцінюються)

(11.14) Довести, що будь-яка замкнена ламана без самоперетинів у $\mathbb{R}^n$ (де $n \geqslant 2$) гомеоморфна колу S^1. Тут і в наступних трьох задачах топологія індукована стандартною.

(11.23) Нехай K і L – скінченні підмножини площини $\mathbb{R}^2$ однакової потужності. Довести, що їхні доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus K$ і $\mathbb{R}^2 \setminus L$ гомеоморфні.

(11.24) Нехай $D_1, \ldots, D_n$ – набір замкнених кругів у $\mathbb{R}^2$, що попарно не перетинаються. Довести, що доповнення до їх об'єднання $\mathbb{R}^2 \setminus (D_1 \cup \ldots \cup D_n)$ гомеоморфне площині без n точок, тобто доповненню $\mathbb{R}^2 \setminus K$ до скінченної множини з n точок (з попередньої задачі випливає, що несуттєво, яких саме), а отже не залежить (з точністю до гомеоморфізма) від розташування кругів $D_1, \ldots, D_n$.

(11.25) Нехай знову $D_1, \ldots, D_n$ – набір замкнених кругів у $\mathbb{R}^2$, що попарно не перетинаються. Довести, що доповнення до об'єднання їхніх внутрішностей, тобто відповідних відкритих кругів, $\mathbb{R}^2 \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_n)$ (т. зв. *площина з n дірками*) не залежить (з точністю до гомеоморфізма) від розташування кругів $D_1, \ldots, D_n$. Іншими словами, будь-які дві площини з n дірками гомеоморфні.

(15.5) Показати, що умова хаусдорфовості простору Y у задачі **15.4** суттєва, навівши контрприклад.

(20.14) Нехай $A \subset X$, $B \subset Y$ – підмножини топологічних просторів. Знайти формулу, що описує межу $\partial(A \times B)$ у прямому добутку просторів $X \times Y$ у термінах множин A, B, ∂A і ∂B.

(20.17) Довести, що канонічні проєкції

$$p_X \colon X \times Y \to X \colon (x, y) \mapsto x, \quad p_Y \colon X \times Y \to Y \colon (x, y) \mapsto y$$

прямого добутку топологічних просторів на співмножники є відкритими відображеннями.