6.15 $\overline{A\cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\subset$. Доведемо, що $X \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) \subset X \setminus \overline{A\cup B}$

$(X\setminus\overline{A}) \cap (X \setminus \overline{B})$

$x \notin \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \left.\begin{cases} x \notin \overline{A} \Rightarrow \exists \text{ відкр. } U \ni x: U \cap A = \varnothing \\ x \notin \overline{B} \Rightarrow \exists \text{ відкр. } V \ni x: V \cap B = \varnothing \end{cases}\right\} x \in U \cap V$ - відкр.,

$(U\cap V) \cap (A \cup B) = \varnothing \Rightarrow x \notin \overline{A\cup B}$.

$\supset$. Монотонність:

$\left.\begin{aligned} A \subset A\cup B &\Rightarrow \overline{A} \subset \overline{A\cup B} \\ B \subset A \cup B &\Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{aligned}\right\} \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A\cup B}$.

$\overline{A\cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ :

$\left.\begin{aligned} A\cap B \subset A &\Rightarrow \overline{A\cap B} \subset \overline{A} \\ A \cap B \subset B &\Rightarrow \overline{A\cap B} \subset \overline{B} \end{aligned}\right\} \overline{A\cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

$\not\supset$ : $A = (-1,0)$, $B = (0,1)$, $\overline{A\cap B} = A \cap B = \varnothing$.

$\overline{A} = [-1,0]$, $\overline{B} = [0,1]$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{0\}$.

**10.15.** $f \in C(X,Y)$ - сюр. $A$ вс. щільна в $X \to f(A)$ вс. щільна в $Y$.

Використаємо **10.6.**: $\overline{\underset{\underset{\overline{A}=X}{\cup A}}{f^{-1}(f(A))}} \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) \Rightarrow f^{-1}(\overline{f(A)}) = X \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{f(A)} \overset{f\text{-сюр}}{=} f(f^{-1}(\overline{f(A)})) = f(X) = [f\text{ - сюр}] = Y.$

Зокрема, $X$ - сепарабельний, $f \in C(X,Y) \Rightarrow f(X)$ - сепарабельний (**16.L.**)

**10.18(2)** $f, g \in C(X,\mathbb{R}) \to fg \in C(X,\mathbb{R})$. $\boxed{g(x_0)=0 : \exists\, U \ni x_0 : \forall x \in U \; |f(x)-f(x_0)|<1,\; C := |f(x_0)|+1}$

$\forall x_0 \in X \quad f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = f(x)(g(x)-g(x_0)) + (f(x)-f(x_0))g(x_0) \;\; \forall x$

При $g(x_0) \neq 0$: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ відкр. $U \ni x_0 : \forall x \in U \;\; |f(x)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|g(x_0)|}$.

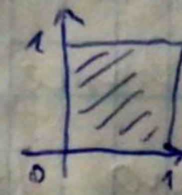
Зокрема, $f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2|g(x_0)|} \Rightarrow |f(x)| < |f(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2|g(x_0)|} =: C, \;\; C > 0.$

$\exists$ відкр. $V \ni x_0 : \forall x \in V \;\; |g(x)-g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2C}$. Тоді $\forall x \in U \cap V$

$|fg(x) - fg(x_0)| \le |f(x)|\,|g(x)-g(x_0)| + |f(x)-f(x_0)| \cdot |g(x_0)| < C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2|g(x_0)|}|g(x_0)| = \varepsilon.$

11.10 (1, 2, 6) Показати, що наступні множини гомеоморфні:

- $\mathbb{R}^2$
- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y\in(0,1)\} = (0,1)^2$

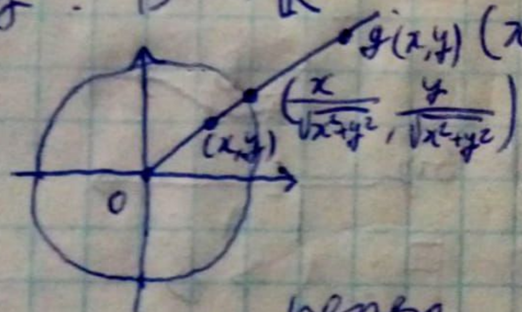




- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\} =: B^2$

$f:(0,1)^2\to\mathbb{R}^2 : (x,y)\mapsto\left(\operatorname{tg}\pi(x-\frac{1}{2}), \operatorname{tg}\pi(y-\frac{1}{2})\right)$ – бієк, непер. (бо задається непер. ф-ціями), $f^{-1}:(x,y)\mapsto\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x, \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\right.$ $\left.\cdot\operatorname{arctg} y\right)$ – теж непер.

$g: B^2\to\mathbb{R}^2 :$ $(x,y)\mapsto\begin{cases}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0), & (x,y)=(0,0).\end{cases}$




бієк, неперервне, бо на $B^2\setminus\{(0,0)\}$ задається непер. ф-ціями і для $(x_n,y_n)\to(0,0)$ $g(x_n,y_n)\to$ $\to(0,0)=g(0,0)$. Обернене:

$g^{-1}(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^2}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0), & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ –

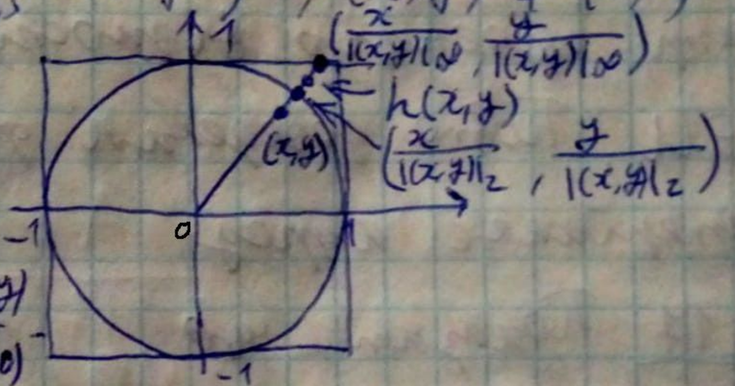
ан-но неперервне.

Гомеоморфізм $B^2\to(0,1)^2$ будується як $f^{-1}\circ g$ або без-

посередньо. Побудуємо його як композицію $j \circ h$, де $j : (-1,1)^2 \to$
$\to (0,1)^2 : (x,y) \mapsto \left(\frac{1}{2}(x+1), \frac{1}{2}(y+1)\right)$ — обмеження аф. перетворення,
тому гомеоморфізм за 11.L. (обмеження гомео-зма – гомео-зм, див. лекції), а $h : B^2 \to (-1,1)^2$:

$$h(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x}{\max\{|x|,|y|\}}\sqrt{x^2+y^2}, \frac{y}{\max\{|x|,|y|\}}\sqrt{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0), & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$|(x,y)|_\infty$ $\quad |(x,y)|_2 \in (0,1)$




він і непер. ан-но $j$.

$$h^{-1}(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x}{|(x,y)|_2}|(x,y)|_\infty, \frac{y}{|(x,y)|_2}|(x,y)|_\infty\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0), & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

теж непер.

<u>11.S.</u> 1) $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\} \cong [0,1]^2$

3). $S^1 = \partial D^2 \cong \partial [0,1]^2$.

1). $j \circ h : D^2 \to [0,1]^2$ — те ж, що й вище.

3). Обмежуємо $j \circ h$ на $S^1$ і отримуємо гом-зм. Зокрема:

$$h|_{S^1}(x,y) = \left(\frac{x}{|(x,y)|_\infty}, \frac{y}{|(x,y)|_\infty}\right) : S^1 \to \partial[-1,1]^2 :$$

(центральна проекція на квадрат)

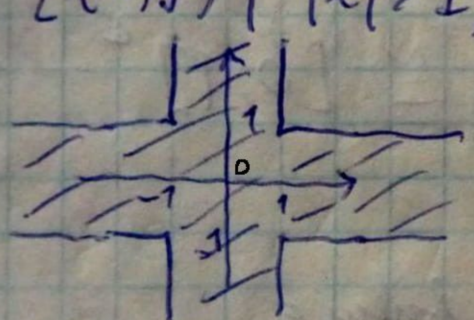
**11.T(2)** $U \subset \mathbb{R}^2$ — $\neq \varnothing$, відкрита, обмежена, опукла.

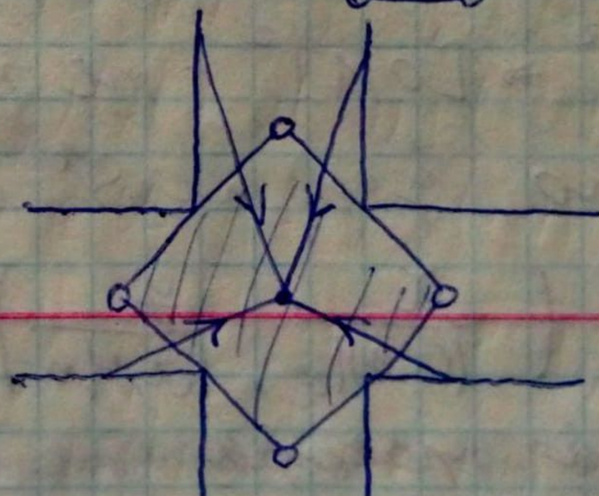
Показати, що $U \cong B^2$.

Ідея: так само як у 11.10 і 11.5 використати центр. проекцію відносно якоїсь $x \in U$. Повне доведення див. у матеріалах курсу.


**11.17.** Показати, що

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid |x|>1, |y|>1\} \cong [-1,1]^2 \setminus \{(-1,1),(-1,-1),(1,-1),(1,1)\}.$$



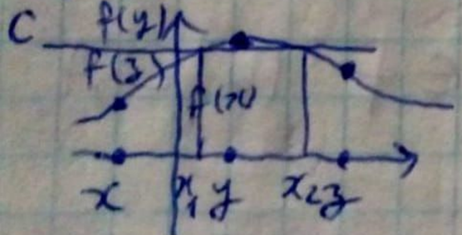



Ідея: плюс

центр. проекція!

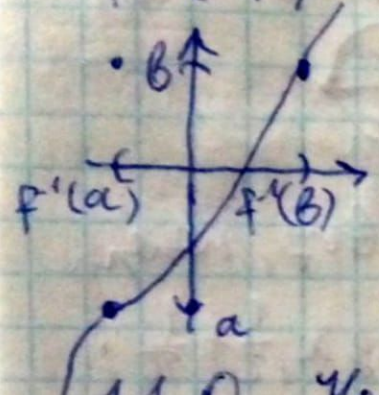
11.4. бієк. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f$ — гомеоморфізм $\Leftrightarrow$ $f$ монотонна.
(оскільки $f$ — бієк, монотонна $\Leftrightarrow$ строго монотонна).

$\Rightarrow$. Нехай $f$ не монотонна, тобто $\exists\ x < y < z$ : $f(x) < f(y)$, $f(y) > f(z)$ (або $f(x) > f(y)$, $f(y) < f(z)$ — ан-но).




Нехай $c \in (f(x), f(y)) \cap (f(z), f(y))$. За Th. про проміжне значення ($f$ — непер.), $\exists$
$x_1 \in (x, y) : f(x_1) = c$ і $\exists\ x_2 \in (y, z) : f(x_2) = c$. $x_1 < x_2$, тобто $f$ — не бієк ↯ Тут не знадобилася неперервність $f^{-1}$.

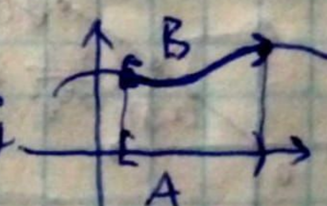
$\Leftarrow$. Використаємо 10.8: $\forall\ (a,b) \subset \mathbb{R}$ (ел-т бази) для строго монот. $f$ $f^{-1}((a,b)) = (f^{-1}(a), f^{-1}(b))$ або $(f^{-1}(b), f^{-1}(a))$ - відкр. Отже, $f$ - неперервне.




Ан-но $(f^{-1})^{-1}((a,b)) = f((a,b)) = (f(a), f(b))$ або $(f(b), f(a))$ - відкр. $\Rightarrow f^{-1}$ - неперервне.

$f$ - гомеоморфізм.

11.Q Нехай $A \subset \mathbb{R}$ - проміжок, $f: A \to \mathbb{R}$ неперервна. Тоді її графік $B := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \cong A$ (як підмножина $\mathbb{R}^2$ з індук. топ.).




Гомеоморфізм: $F: A \to B : x \mapsto (x, f(x))$ - від

$F: A \to \mathbb{R}^2$ - неперервне в силу 10.21 (бо $f$ - непер.), отже і $F: A \to B$ - непер. як обмеження.

$F^{-1}: B \to A$ - це обмеження на $B$ проекції $(x,y) \mapsto x$. Оскільки вона непер. (див. доведення 10.21), $F^{-1}$ - непер.

Отже, $F$ - гомео-зм.

(з топ., індукованою станд.)

**11.35.** Показати, що $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ (зі станд. топ.), $\mathbb{R}_{T_1}$ (з корін. топ.) і $\mathbb{R}$ з $\{(a,+\infty)\}$ попарно не гомеоморфні.

$\mathbb{Z}$ і $\mathbb{Q}$ зліченні, $\mathbb{R}$ ні, тому $\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \not\cong \mathbb{R}$ для всякої топ. на $\mathbb{R}$.

$\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Q}$, бо $\mathbb{Z}$ дискретний, $\mathbb{Q}$ ні ($\{0\}$ – не відкр.).

$\mathbb{R}_{T_1}$ не задов. I акс. зліченності, $\mathbb{R}$ зі станд. топ. і з $\{(a,+\infty)\}$ задов. $\Rightarrow$ $\mathbb{R}_{T_1} \not\cong \mathbb{R}$ з двома іншими топ.

У $\mathbb{R}$ з $\{(a,+\infty)\}$ $\forall$ дві $\neq\varnothing$ відкр. множини перетинаються, у $\mathbb{R}$ зі станд. топ. – ні. Тому вони негомеоморфні.

**208** $A$ замкнена в $X$, $B$ – в $Y$ $\Rightarrow$ $A\times B$ замкнена в $X\times Y$.


$X\times Y \setminus A\times B =$

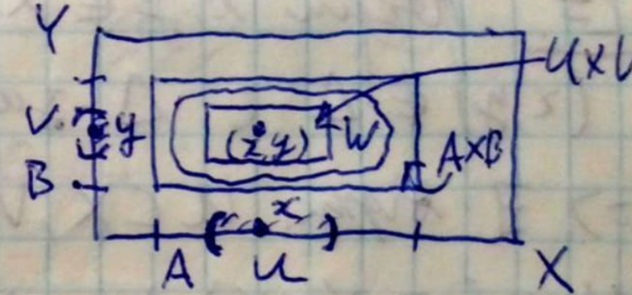
$= ((X\setminus A)\times Y) \cup (X\times(Y\setminus B))$. $X\setminus A$, $Y\setminus B$ – відкр. $\Rightarrow$ за побудов. топ. $X\times Y$ $(X\setminus A)\times Y$ і $X\times(Y\setminus B)$ відкр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $X\times Y \setminus A\times B$ відкр. $\Rightarrow$ $A\times B$ замкн.

20.10. Чи вірно, що $\mathrm{Int}(A\times B) = \mathrm{Int}\,A \times \mathrm{Int}\,B$?

Так. $\forall (x,y) \in \mathrm{Int}(A\times B)$ $\exists$ відкр. $W \ni (x,y)$: $W \subset A\times B$. За побуд. топ., $\exists$ відкр. $U\subset X$, $V\subset Y$: $(x,y)\in U\times V \subset \underset{A\times B}{\underset{\cap}{W}}$,

тобто $x\in U$, $y \in V$.




$x\in U\subset A$, $U$ - відкр. $\Rightarrow x\in \mathrm{Int}\,A$

$y\in V\subset B$, $V$ - відкр $\Rightarrow y \in \mathrm{Int}\,B$

$\Rightarrow (x,y)\in \mathrm{Int}\,A\times \mathrm{Int}\,B$.

$(x,y)\in \mathrm{Int}\,A\times\mathrm{Int}\,B \Rightarrow \begin{cases} x\in \mathrm{Int}\,A \Rightarrow \exists \text{ відкр. } U: x\in U\subset A \\ y\in \mathrm{Int}\,B \Rightarrow \exists \text{ відкр. } V: y\in V\subset B \end{cases} \Rightarrow (x,y)\in$

$U\times V\subset A\times B \Rightarrow$ [$U\times V$ - відкр.] $\Rightarrow (x,y)\in \mathrm{Int}(A\times B)$.

20,26 $X$ хаусдорфовий $\Leftrightarrow \Delta := \{(x,x)\mid x\in X\}\subset X\times X$ - замкнена.

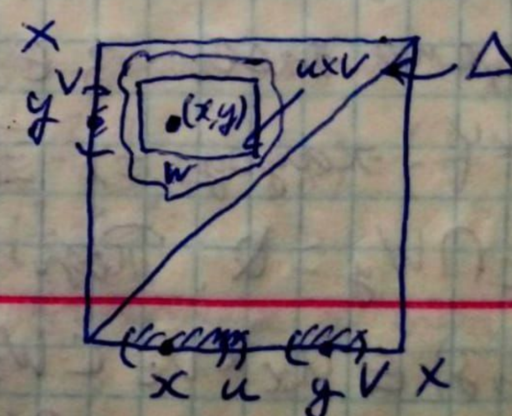
$\Rightarrow$. $\forall (x,y)\notin\Delta$

$x\neq y \overset{\text{хаусд.}}{\Rightarrow} \exists$ відкр. $U\ni x$, $V\ni y$: $U\cap V = \varnothing$.

Тоді $U\times V$ відкр. в $X\times X$, $(x,y)\in U\times V$ і

$U\times V\subset X\times X\setminus\Delta$: $\forall (z,w)\in U\times V$

$z\in U$, $w\in V \Rightarrow z\neq w \Rightarrow (z,w)\notin\Delta$.




Отже, $X\times X\setminus\Delta$ - відкр. $\Rightarrow \Delta$ - замкн.

$\Leftarrow$. Нехай $x, y \in X : x \neq y$.

$(x,y) \notin \Delta$ і $\Delta$ замкн. $\Rightarrow \exists$ відкр. $W : (x,y) \in W \subset X \times X \setminus \Delta$.

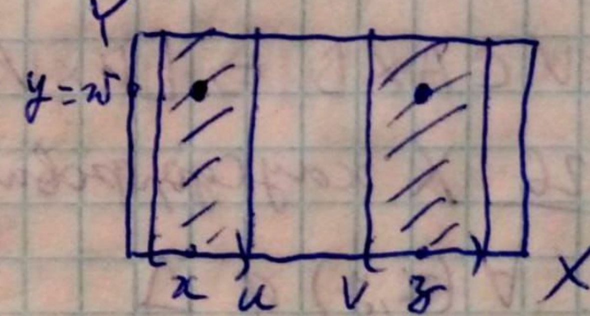
$\Rightarrow \exists$ відкр. $U \subset X, V \subset Y : (x,y) \in U \times V \subset W \subset X \times X \setminus \Delta ; x \in U, y \in V$.

$U \times V \subset X \times X \setminus \Delta \Rightarrow \forall (z, w) \in U \times V \; z \neq w \Rightarrow U \cap V = \emptyset$.

20.N. $X$ і $Y$ хаусдорфові $\Leftrightarrow X \times Y$ хаусд.

$\Rightarrow$. $(x,y) \neq (z,w)$ означає, що $x \neq z$ або $y \neq w$. Нехай $x \neq z$, $y \neq w$ – ан-но. $X$ – хаусд. $\Rightarrow \exists$ відкр. $U \ni x$, $V \ni z : U \cap V = \emptyset$. Тоді $U \times Y, V \times Y$ – відкр.,

$(x,y) \in U \times Y$, $(z,w) \in V \times Y$, $U \times Y \cap V \times Y = \emptyset$.




$\Leftarrow$ Доведемо для $X$, для $Y$ – ан-но. $\forall x, y \in X, x \neq y$:

оберемо якось $z \in Y$, тоді $(x,z) \neq (y,z)$.

$X \times Y$ – хаусд. $\Rightarrow \exists$ відкр. $W_x \ni (x,z), W_y \ni (y,z)$:

$W_x \cap W_y = \emptyset$. Тоді $\exists U_x, U_y \subset X, V_x, V_y \subset Y$ відкр.:

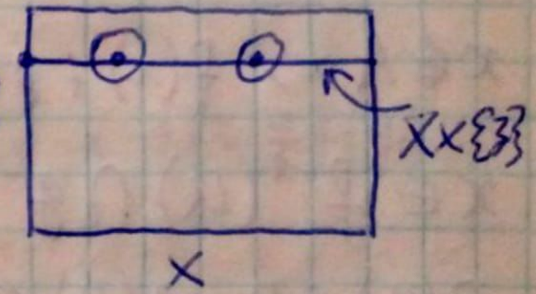

$(x,z) \in U_x \times V_x \subset W_x$, $(y,z) \in U_y \times V_y \subset W_y$.

$U_x \cap U_y = \emptyset$. Дійсно $\nearrow \exists w \in U_x \cap U_y$. Тоді $(w,z) \in (U_x \times V_x) \cap$

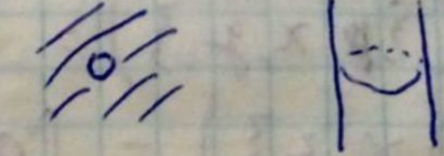
$\cap (U_y \times V_y)$ (бо $z \in V_x \cap V_y$) $\Rightarrow W_x \cap W_y \neq \emptyset$ $\lightning$.

Отже, $U_x$ і $U_y$ – потрібні околи $x$ і $y$.

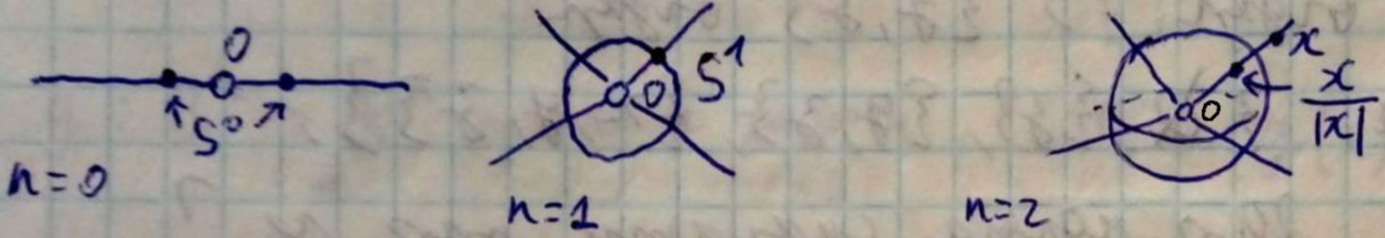
Або: $X \cong X \times \{z\} \subset X \times Y$ (див. лекції). Хаусдорфовість наслідується: $X \times Y$ хаусд. $\Rightarrow$ $X \times \{z\}$ хаусд. $\Rightarrow$ $X$ хаусд.



**20.V.** Чи гомеоморфні $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ і $S^1\times\mathbb{R}$?



Так. Доведемо, що $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\cong S^n\times\mathbb{R}$ $\forall\, n\in\mathbb{Z}_+$:




$f(x) := \left(\frac{x}{|x|}, \ln|x|\right)$ – бієк., непер., і $f^{-1}(y,t) =$

$= e^t y$ – непер.