Лекції з топології
Додатковий матеріал

Петров Є.В.

28.10.24

19.1 Теореми про продовження відображень, вкладення та метризацію

Наступний нетривіальний критерій виконання аксіоми T_4 важливий тим, що дозволяє використання дійсних чисел з їхньою багатою структурою для дослідження не тільки метричних, а й ширшого (в силу твердження 19.5) класу топологічних просторів, що задовольняють T_4, подібно до того, як аксіоми зліченності дозволяють використання натуральних.

Теорема 19.1 (Лема Урисона)**.** *Топологічний простір X задовольняє аксіомі T_4 тоді й тільки тоді, коли для будь-яких замкнених $A, B \subset X$ таких, що $A \cap B = \varnothing$, існує неперервна функція $f \in C(X, [0,1])$ така, що $f|_A = 0$ і $f|_B = 1$.*

Означення 19.7. Функцію f із формулювання леми Урисона будемо називати *функцією Урисона* множин A і B.

Доведення. $\underline{\Leftarrow}$ Перевірка достатності трохи схожа на доведення твердження 19.5. Нехай $A, B \subset X$ замкнені та не перетинаються, тоді для них існує функція f з умови. Покладемо $U := f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ і $V := f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$. Ці множини відкриті в силу неперервності f, $A \subset U$ і $B \subset V$ за властивостями f та $U \cap V = \varnothing$ за побудовою. Це й демонструє виконання аксіоми T_4.

$\underline{\Rightarrow}$ Доведемо необхідність. Отже, нехай X задовольняє T_4, $A, B \subset X$ замкнені та не перетинаються. Побудуємо відображення Φ з множини раціональних чисел відрізка $[0,1]$ зі степенями двійки у знаменнику

$$\Lambda := \left\{ \frac{m}{2^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_+,\, m \in \overline{0, 2^n} \right\}$$

у сукупність відкритих околів A, тобто відкритих підмножин $U \supset A$ в X, наступним чином. Покладемо $\Phi(1) \coloneqq X \setminus B$, що належить до цієї сукупності за умовою. Тоді за твердженням 19.4 існує відкрита $\Phi(0) \supset A$ така, що $\overline{\Phi(0)} \subset \Phi(1)$. Оскільки $\Phi(1)$ є також відкритим околом замкненої $\overline{\Phi(0)}$, в силу того ж твердження існує відкрита $\Phi\left(\frac{1}{2}\right) \supset \overline{\Phi(0)}$ така, що $\overline{\Phi\left(\frac{1}{2}\right)} \subset \Phi(1)$. На наступному етапі аналогічним способом знаходимо відкриті $\Phi\left(\frac{1}{4}\right) \supset \overline{\Phi(0)}$ та $\Phi\left(\frac{3}{4}\right) \supset \overline{\Phi\left(\frac{1}{2}\right)}$ такі, що $\overline{\Phi\left(\frac{1}{4}\right)} \subset \Phi\left(\frac{1}{2}\right)$, $\overline{\Phi\left(\frac{3}{4}\right)} \subset \Phi(1)$ і т. д. Зокрема, для цього відображення за побудовою вірні включення $\overline{\Phi(r)} \subset \Phi(s)$ для будь-яких $r < s$ з множини Λ.

Для кожної $x \in X$ покладемо тепер

$$f(x) \coloneqq \inf\{r \in \Lambda \mid x \in \Phi(r)\}.$$

Тут вважаємо, що $\inf \varnothing = 1$. Тоді f дійсно є функцією з X у $[0,1]$, $f|_A = 0$, бо A міститься в усіх $\Phi(r)$, і $f|_B = 1$, бо жодна з $\Phi(r)$ не перетинає B. Таким чином, залишилося перевірити неперервність f. В силу вправи 12.1, оскільки передбазу (індукованої з $\mathbb{R}$) топології $[0,1]$ складають проміжки вигляду $[0,a)$ і $(a,1]$ для усіх дійсних $a \in (0,1)$ аналогічно до прикладу 6.3 (чому?), достатньо показати, що їхні прообрази під дією f відкриті. Зауважимо, що за означенням інфімума точка $x \in X$ належить до $f^{-1}([0,a))$, тобто $\inf\{r \in \Lambda \mid x \in \Phi(r)\} < a$, тоді й тільки тоді, коли існує $r \in \Lambda$ таке, що $r < a$ та $x \in \Phi(r)$. Іншими словами,

$$f^{-1}([0,a)) = \bigcup_{r \in \Lambda \cap (-\infty, a)} \Phi(r),$$

що дійсно є відкритою множиною як об'єднання відкритих. Нарешті, щоб перевірити відкритість прообраза $f^{-1}((a,1])$, достатньо показати замкненість його доповнення у X, що є прообразом доповнення до $(a,1]$, тобто $f^{-1}([0,a])$. Нехай $x \in f^{-1}([0,a])$, тобто $\inf\{r \in \Lambda \mid x \in \Phi(r)\} \leqslant a$. Тоді будь-яке $r \in \Lambda$, що більше за a, більше й за цей інфімум, тобто існує $s \in \Lambda$ таке, що $s < r$ та $x \in \Phi(s)$. Але тоді й $\Phi(r) \supset \overline{\Phi(s)}$ містить x. І навпаки, якщо $x \in \Phi(r)$ для усіх $r \in \Lambda$, що більші за a, то $\inf\{r \in \Lambda \mid x \in \Phi(r)\} \leqslant a$. Це означає, що

$$f^{-1}([0,a]) = \bigcap_{r \in \Lambda \cap (a, +\infty)} \Phi(r) \subset \bigcap_{r \in \Lambda \cap (a, +\infty)} \overline{\Phi(r)}.$$

Включення тут випливає з монотонності замикань і насправді є рівністю. Дійсно, нехай x належить до перетину замикань з правої частини цього включення, тобто $x \in \overline{\Phi(r)}$ для будь-якого $r \in \Lambda \cap (a, +\infty)$. Для кожного такого r існує деяке $s \in \Lambda \cap (a, r)$, отже $x \in \overline{\Phi(s)} \subset \Phi(r)$ за властивостями відображення Φ. Тому $x \in \bigcap\limits_{r\in\Lambda\cap(a,+\infty)} \Phi(r)$, звідки й випливає потрібна рівність множин. Таким чином, остаточно маємо

$$f^{-1}([0,a]) = \bigcap_{r\in\Lambda\cap(a,+\infty)} \overline{\Phi(r)},$$

і ця множина замкнена як перетин замкнених, що й потрібно.

■

Зауваження. Звичайно, за необхідності можна побудувати й функцію Урисона вигляду $f\colon X \to [a,b]$ для будь-яких $a < b$, беручи композицію функції з леми Урисона та деякої лінійної.

Далі розглянемо кілька цікавих та потужних теорем, що стосуються просторів з аксіомою T_4 (зокрема нормальних) і використовують лему Урисона. Для доведення першої з них нам знадобиться наступне узагальнення відомого з курсу аналіза поняття рівномірної збіжності на послідовності відображень з довільного топологічного простору у довільний метричний.

Означення 19.8. Нехай X – топологічний простір, а Y – метричний. Кажуть, що послідовність відображень $\{f_n\colon X \to Y\}_{n=1}^{\infty}$ *рівномірно збігаєтьcя* до відображення $f\colon X \to Y$, що будемо тоді називати її *границею*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує натуральне N таке, що $f_n(x) \in B_\varepsilon(f(x))$ для будь-яких натуральних $n \geqslant N$ та $x \in X$.

Нехай тепер Y – це дійсна пряма $\mathbb{R}$ з евклідовою метрикою. Будемо казати, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *рівномірно збігається* до його *суми* f, якщо послідовність його часткових сум $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i\right\}_{n=1}^{\infty}$ рівномірно збігається до f.

Зауваження. Оскільки у нас тут немає необхідності розрізняти види збіжності, рівномірну збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ до f позначатимемо просто рівністю $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = f$. Поняття рівномірної збіжності ряду очевидним чином узагальнюється на відображення у простір $Y = \mathbb{R}^n$, причому збіжність зберігається при заміні його евклідової метрики на будь-яку іншу метрику ρ_p з прикладу 7.2 (чому?).

Формулювання і доведення наступних трьох тверджень майже дослівно повторюють формулювання і доведення відповідних властивостей рівномірної збіжності для окремого випадку дійсних функцій, що вивчаються в курсі аналіза (див., наприклад, главу 8 у [1]), але ми наведемо їх з доведеннями для повноти викладення. Нагадаємо, що метричний простір (Y, ρ) зветься *повним*, якщо у ньому будь-яка *фундаментальна* послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, тобто така, що $\rho(x_n, x_m) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, збігається. У курсі аналіза доводиться, що пряма $\mathbb{R}$ з евклідовою метрикою є повним простором (див. [1, с. 68-69]), звідки випливає також повнота усіх її замкнених підмножин з обмеженням цієї метрики (як саме?). Також з цього неважко вивести повноту простору $\mathbb{R}^n$ та замкнених підмножин у ньому відносно евклідової метрики, а отже й усіх метрик, що біліпшицево еквівалентні евклідовій, в силу вправи 7.3 (зробіть це). У наступному критерії повнота Y суттєва лише для достатності.

Твердження 19.9 (Критерій Коші рівномірної збіжності послідовності)**.** *Послідовність відображень $\{f_n \colon X \to Y\}_{n=1}^{\infty}$ з топологічного простору X у повний метричний простір Y з метрикою ρ рівномірно збігається тоді й тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ існує натуральне N таке, що $\rho(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$ для будь-яких натуральних $n, m \geqslant N$ та $x \in X$.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до деякого відображення $f \colon X \to Y$ і $\varepsilon > 0$. Тоді за означенням рівномірної збіжності існує натуральне N таке, що $\rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ для усіх $n \geqslant N$ та $x \in X$, отже за нерівністю трикутника

$$\rho(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \rho(f_n(x), f(x)) + \rho(f(x), f_m(x)) < \varepsilon$$

для довільних $n, m \geqslant N$ та $x \in X$, що й потрібно.

$\underline{\Leftarrow}$ Фіксуючи $x \in X$ в умові, отримаємо, що $\rho(f_n(x), f_m(x)) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, тобто послідовність $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. В силу повноти Y вона збігається до деякої точки Y. Позначивши для кожної $x \in X$ цю точку через $f(x) \in Y$, отримаємо відображення $f \colon X \to Y$. Нехай тепер $\varepsilon > 0$. Візьмемо N з умови твердження для $\frac{\varepsilon}{2}$, будь-яке $n \geqslant N$ і для $x \in X$ запишемо означення збіжності $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ до $f(x)$: існує натуральне M таке, що $f_m(x) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$ для $m \geqslant M$. Тоді для усіх $m \geqslant \max\{M, N\}$ за нерівністю трикутника маємо

$$\rho(f_n(x), f(x)) \leqslant \rho(f_n(x), f_m(x)) + \rho(f_m(x), f(x)) < \varepsilon,$$

отже за означенням $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до f рівномірно.

■

Твердження 19.10 (Ознака Веєрштрасса рівномірної збіжності ряду)**.** *Нехай X – топологічний простір, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ – ряди з функцій $X \to$*

$\mathbb{R}$ *такі, що* $|f_n(x)| \leqslant g_n(x)$ *для усіх натуральних* n *та* $x \in X$. *Якщо крім того ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ *рівномірно збігається, то й ряди* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *та* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ *рівномірно збігаються.*

Зауваження. Набір нерівностей з цього твердження, тобто умову $|f_n(x)| \leqslant g_n(x)$ для усіх n та x, далі будемо скорочено записувати як $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$. У таких випадках говорять, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ *мажорується* рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$.

Доведення. В силу означення та попереднього твердження дослідження рівномірної збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ можна звести до розгляду модуля різниці послідовностей його часткових сум

$$\left|\sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{i=1}^{n} f_i\right| = |f_{n+1} + \ldots + f_m|$$

для довільних натуральних $n \leqslant m$ (ця нерівність, очевидно, не зменшує загальність) і аналогічно для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$. А саме, оскільки цей другий ряд рівномірно збіжний, для кожного $\varepsilon > 0$ існує натуральне N таке, що $|g_{n+1}(x) + \ldots + g_m(x)| < \varepsilon$ для будь-яких натуральних $m \geqslant n \geqslant N$ та $x \in X$. З умови тоді випливає, що

$$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_m(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_m(x)| \leqslant$$
$$\leqslant g_{n+1}(x) + \ldots + g_m(x) = |g_{n+1}(x) + \ldots + g_m(x)|,$$

де остання рівність виконується, бо усі g_i невід'ємні за умовою. Таким чином, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ теж рівномірно збіжний за попереднім твердженням. Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ перевірка майже дослівно така ж сама (виконайте її).

∎

Твердження 19.11. *Границя рівномірно збіжної послідовності неперервних відображень і сума рівномірно збіжного ряду неперервних функцій є неперервними.*

Доведення. Зрозуміло, що достаньо первірити це твердження для послідовності, бо твердження для ряду випливатиме тоді з означення.

Отже, нехай X та Y – деякі топологічний та метричний простори відповідно, ρ – метрика Y, а послідовність відображень $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(X, Y)$ рівномірно збігається до $f\colon X \to Y$. Нехай $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$ – довільні. За означенням рівномірної збіжності існує натуральне N таке, що $\rho(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ для усіх $n \geqslant N$ та $x \in X$. Оберемо якесь натуральне $n \geqslant N$. Оскільки f_n є неперервним у x_0, існує відкритий окіл $U \ni x_0$ такий, що $f_n(U) \subset B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_n(x_0))$. Тоді для кожної $x \in U$ за нерівністю трикутника маємо

$$\rho(f(x), f(x_0)) \leqslant \rho(f(x), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f_n(x_0)) + \rho(f_n(x_0), f(x_0)) < \varepsilon,$$

отже $f(U) \subset B_{\varepsilon}(f(x_0))$. Це означає, що f теж неперервне у x_0. Таким чином, f дійсно є неперервним.

■

Також нам буде потрібна наступна технічна лема.

Лема 19.2. *Нехай топологічний простір X задовольняє аксіомі T_4, $A \subset X$ замкнена і $a > 0$. Тоді для будь-якої неперервної (відносно індукованих топологій) функції $f \in C(A, [-a, a])$ існує неперервна функція $g \in C\left(X, \left[-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right]\right)$ така, що $|f(x) - g(x)| \leqslant \frac{2a}{3}$ для усіх $x \in A$.*

Доведення. Покладемо $B \coloneqq f^{-1}\left(\left[-a, -\frac{a}{3}\right]\right)$ і $C \coloneqq f^{-1}\left(\left[\frac{a}{3}, a\right]\right)$. В силу неперервності f, це замкнені підмножини в A, а отже й у X, бо A замкнена. Оскільки за побудовою вони не перетинаються, за теоремою 19.1 та зауваженням після її доведення існує функція Урисона g множин B і C зі значеннями у $\left[-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right]$, тобто $g \in C\left(X, \left[-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right]\right)$ така, що $g|_B = -\frac{a}{3}$ і $g|_C = \frac{a}{3}$. Таким чином, g приймає значення $-\frac{a}{3}$ у тих точках A, де f приймає значення з проміжку $\left[-a, -\frac{a}{3}\right]$, $\frac{a}{3}$ – у тих, де значення f містяться у $\left[\frac{a}{3}, a\right]$, і значення з $\left[-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right]$ там, де значення f лежать у тому ж проміжку. Тому різниця між цими функціями дійсно не перевищує $\frac{2a}{3}$.

■

Теорема 19.2 (Тітце про продовження)**.** *Нехай топологічний простір X задовольняє аксіомі T_4, $A \subset X$ замкнена, а $Y \subset \mathbb{R}$ – проміжок. Тоді для будь-якої неперервної (відносно індукованих топологій) функції $f \in C(A, Y)$ існує її неперервне продовження на X – функція $\overline{f} \in C(X, Y)$ така, що $\overline{f}|_A = f$.*

Доведення. Спочатку доведемо теорему для випадку $Y = [-1, 1]$. Застосуємо попередню лему до функції f і отримаємо функцію $f_1 \in C\left(X, \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]\right)$ таку, що $|f - f_1| \leqslant \frac{2}{3}$ на A, тобто їх різниця $f - f_1$ належить до $C\left(A, \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]\right)$. Тепер застосуємо цю лему до функції $f - f_1$ та отримаємо $f_2 \in C\left(X, \left[-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right]\right)$ таку, що $|f - f_1 - f_2| \leqslant \frac{4}{9}$, отже $f - f_1 -$

$f_2 \in C\left(A, \left[-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right]\right)$ і т. д. Таким чином, отримаємо послідовність фунцій $\left\{f_n \in C\left(X, \left[-\frac{2^{n-1}}{3^n}, \frac{2^{n-1}}{3^n}\right]\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ таку, що $\left|f - \sum_{i=1}^{n} f_i\right| \leqslant \frac{2^n}{3^n}$ у точках A для будь-якого n. При цьому

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1,$$

тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ рівномірно збігається до деякої $\overline{f}\colon X \to \mathbb{R}$ за твердженням 19.10, де другий (мажоруючий) ряд – числовий $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$. Ми вважаємо його таким, що складається з постійних функцій, тому його рівномірна збіжність за означенням еквівалентна звичайній збіжності, що продемонстрована вище. Функція $\overline{f}$ неперервна за твердженням 19.11. Вона відображає X у $[-1, 1]$, бо з показаного вище випливає (як саме?), що усі елементи послідовності часткових сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ є функціями у $[-1, 1]$, а цей відрізок замкнений. Таким чином, дійсно $\overline{f} \in C(X, [-1, 1])$. Для кожної $x \in A$, спрямувавши n до нескінченності у нерівності $\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right| \leqslant \frac{2^n}{3^n}$, отримаємо, що $f(x) = \overline{f}(x)$, що й означає потрібну рівність $\overline{f}|_A = f$.

Якщо твердження теореми вірне для функцій у проміжок $Y \subset \mathbb{R}$, а проміжок $Z \subset \mathbb{R}$ гомеоморфний Y, то теорема справедлива й для функцій у Z. Дійсно, нехай $\varphi\colon Y \to Z$ – гомеоморфізм. Для будь-якої $f \in C(A, Z)$ застосуємо теорему до $\varphi^{-1} \circ f \in C(A, Y)$ та отримаємо продовження $\overline{\varphi^{-1} \circ f} \in C(X, Y)$. Тоді $\overline{f} \coloneqq \varphi \circ \overline{\varphi^{-1} \circ f} \in C(X, Z)$ – продовження f (чому?). Це спостереження залишається вірним і для довільних топологічних просторів Y та Z. Звідси та з прикладу 14.4 випливає, що крім уже доведеного випадку $Y = [-1, 1]$ достатньо ще показати справедливість теореми для $Y = (-1, 1)$ та $Y = (-1, 1]$.

Розглядаючи довільну $f \in C(A, (-1, 1))$ як елемент $C(A, [-1, 1])$, застосуємо до неї відомий нам випадок теореми й отримаємо продовження $\overline{f} \in C(X, [-1, 1])$. Оскільки $B \coloneqq \overline{f}^{-1}(\{-1, 1\})$ замкнена за неперервністю $\overline{f}$ і $A \cap B = \varnothing$, бо $\overline{f}|_A = f$ і $f(A) \subset (-1, 1)$, за лемою Урисона існує функція Урисона $g \in C(X, [-1, 1])$ множин B і A. Тоді добуток $g\overline{f} \in C(A, (-1, 1))$, бо $g = 0$ там, де $\overline{f} = \pm 1$, і $(g\overline{f})|_A = \overline{f}|_A = f$, тобто $g\overline{f}$ є потрібним продовженням f. Випадок $Y = (-1, 1]$ можна довести майже дослівно так само (зробіть це).

■

Зауваження. Теорема Тітце про продовження вірна також для випадку $Y = \mathbb{R}^n$. Дійсно, щоб перевірити це, достатньо застосувати вже доведену теорему до координатних функцій відображення $f \in C(A, \mathbb{R}^n)$ (див. вправу 12.4).

Вправа 19.5. Показати, що якщо для топологічного простору X виконується твердження теореми Тітце про продовження, то виконується й твердження леми Урисона. Разом з двома попередніми теоремами це означає, що обидва ці твердження є еквівалентними до аксіоми T_4.

Теорема 19.3 (Урисона про вкладення)**.** *Якщо топологічний простір X нормальний та задовольняє другій аксіомі зліченності, то існує його вкладення у метричний простір ℓ_2.*

Доведення. Нагадаємо, що ℓ_2 був описаний у вправі 7.1 як

$$\ell_2 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$$

з метрикою

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}.$$

Нехай $\mathcal{B}$ – не більш ніж злічена база топології X. Тоді множина усіх пар підмножин з $\mathcal{B}$, а також її підмножина $\{(U, V) \mid U, V \in \mathcal{B},\ \overline{U} \subset V\}$ не більш ніж зліченні. Перенумеруємо цю останню множину, записавши її як $\{(U_n, V_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Оскільки тоді для кожного натурального n замкнені множини $\overline{U_n}$ і $X \setminus V_n$ не перетинаються, а X нормальний, за лемою Урисона існує функція Урисона $f_n \in C(X, [-1, 1])$ цих множин. Покладемо $f(x) := \left\{ \frac{f_n(x)}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ для кожної $x \in X$. Це елемент ℓ_2, бо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)^2}{n^2} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний, як відомо з курсу аналіза. Таким чином, ми дійсно побудували відображення $f \colon X \to \ell_2$.

Перевіримо ін'єктивність f. Нехай $x, y \in X$ і $x \neq y$. Оскільки X нормальний, він задовольняє аксіомі T_1: існує відкрита $W \ni x$ така, що $y \notin W$. Тоді існує й множина V з бази $\mathcal{B}$, для якої $x \in V \subset W$. Нормальний X є також регулярним, тому за твердженням 19.3 існує відкрита $T \ni x$ така, що $\overline{T} \subset V$, а отже існує й $U \in \mathcal{B}$, для якої $x \in U \subset T$, тому $\overline{U} \subset \overline{T} \subset V$. Таким чином, $(U, V) = (U_n, V_n)$ для деякого n. Тоді за властивостями функції Урисона $f_n(x) = 0$, бо $x \in U \subset \overline{U_n}$, і $f_n(y) = 1$, бо $y \in X \setminus W \subset X \setminus V_n$. Це означає, що $f(x) \neq f(y)$, що й демонструє ін'єктивність f та бієктивність обмеження $f\colon X \to f(X)$.

Тепер перевіримо неперервність f у довільній точці $x_0 \in X$. Зі збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ за означенням випливає, що його залишкові суми прямують до нуля, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне N, для якого $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Для кожного натурального n від 1 до N в силу неперервності f_n у x_0 існує відкрита $W_n \ni x_0$ така, що $\frac{(f_n(x)-f_n(x_0))^2}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2N}$ для будь-якої $x \in W_n$. Тоді $W \coloneqq \bigcap\limits_{n=1}^{N} W_n$ буде відкритим околом x_0, для кожної точки x якого маємо

$$\rho(f(x), f(x_0)) = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{(f_n(x) - f_n(x_0))^2}{n^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(f_n(x) - f_n(x_0))^2}{n^2}} < \varepsilon$$

за побудовою W, вибором N та нерівністю $|f_n(x)-f_n(x_0)| \leqslant 1$. Це означає, що $f(W) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$. Таким чином, f дійсно неперервне у кожній точці, а отже неперервне. Тоді неперервним буде і його обмеження на образ $f\colon X \to f(X)$.

Щоб показати, що ін'єктивне неперервне f є вкладенням, тобто що $f\colon X \to f(X)$ – гомеоморфізм, залишилося довести його відкритість. Нагадаємо, що тут на $f(X)$ розглядається індукована топологія. Нехай підмножина $W \subset X$ відкрита й $x_0 \in W$ – її довільна точка. Діючи аналогічно до доведення ін'єктивності, знаходимо (як саме?) таке натуральне n, що $x_0 \in U_n$ та $V_n \subset W$. Тоді $B_{\frac{1}{n}}(f(x_0)) \cap f(X) \subset f(W)$. Дійсно, будь-яка точка цього перетину має вигляд $f(x)$, де $x \in X$ така, що $\rho(f(x), f(x_0)) < \frac{1}{n}$. З побудови f та вигляду метрики тоді випливає, що $|f_n(x) - f_n(x_0)| < 1$. При цьому $f_n(x_0) = 0$, бо $x_0 \in \overline{U_n}$, отже $f_n(x) \neq 1$, тобто $x \in V_n \subset W$, звідки випливає потрібне включення. Таким чином, кожна точка $f(x_0) \in f(W)$ входить до цієї множини разом з відкритим у індукованій топології околом, тому $f(W)$ відкрита. Це демонструє відкритість $f\colon X \to f(X)$ та завершує доведення.

■

Зауваження. За побудовою у доведенні попередньої теореми образ вкладення $f(X)$ лежить у підмножині $\left\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]\right\}$ простору ℓ_2, яку називають *кубом* (або *цеглиною*) *Гільберта.*

Теорема 19.4 (Теорема Урисона про метризацію)**.** *Топологічний простір, що задовольняє другій аксіомі зліченності, є метризовним тоді й тільки тоді, коли він нормальний.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Необхідність безпосередньо випливає з твердження 19.5 (причому незалежно від аксіом зліченності).

$\underline{\Leftarrow}$ Щоб довести достатність, застосуємо попередню теорему: будь-який простір X, що задовольняє умові, гомеоморфний своєму образу $f(X) \subset \ell_2$ під дією побудованого там вкладення f. На $f(X)$ можна ввести метрику, що узгоджена з його (індукованою) топологією, просто обмеживши її з ℓ_2, в силу вправи 9.2. Тоді на X побудуємо метрику перенесенням з $f(X)$ за допомогою f (як саме?) або просто скористаємося тим, що метризовність є топологічним інваріантом.

$\blacksquare$

Зауваження. У формулюваннях теорем Урисона про вкладення і метризацію часто замість нормальності використовують регулярність. Дійсно, у просторах, що задовольняють другій аксіомі зліченності, це еквівалентні властивості в силу твердження 19.8.

Література

[1] А.Я. Дороговцев. Математичний аналіз. Частина 1. Київ: Либідь, 1993.