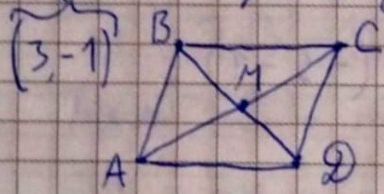
391. $ABCD$ – паралелограм, AB: $x-y-1=0$, AD: $x-2y-10=0$, M – т. перетину AC і BD. Знайти BC і CD. Аф. с.к.



т. A:

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-2y-10=0 \end{cases}$$

$y+9=0$, $y=-9$, $x=y+1=-8$. $A(-8,-9)$.

M – середина AC: $C(2\cdot3-(-8),\ 2(-1)-(-9)) = (14, 7)$.

$BC \parallel AD$ і проходить через C:

Пряма, що $\parallel Ax+By+C=0$ і прох. через (x_0, y_0): $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$

$$(x-14)-2(y-7)=0$$

$$x-2y=0$$

$CD \parallel AB$ і прох. через C:

$$(x-14)-(y-7)=0$$

$$x-y-7=0.$$

Або: пряма BC утворюється з AD симетрією відносно т. M:

$$(2\cdot3-x)-2(2\cdot(-1)-y)-10=0$$

$$6-x+4+2y-10=0$$

$$x-2y=0$$

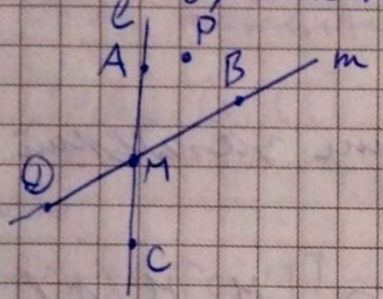
Так само CD з AB:

$$(6-x)-(-2-y)-1=0$$

$$6-x+2+y-1=0$$

$$x-y-7=0.$$

404. $l = AC: 2x+3y-5=0$, $m = BD: x-y-1=0$, $P(3,1)$, $Q(2,2)$, $R(-2,1)$, $S(1,-1)$, $T(4,0)$. $P \in AMB$, CMD – вертикальний до нього. В яких кутах лежать Q, R, S, T?



Аф.с.к.

Відхилення від прямих: підставляємо коорд. точок у рівняння:

P: l: $2\cdot 3+3\cdot 1-5=4>0$

m: $3-1-1=1>0$

Q: l: $2\cdot 2+3\cdot 2-5=5>0$

m: $2-2-1=-1<0$

Тобто Q лежить по ~~[illegible]~~ той же бік від l, що P і з протилежного боку m: це кут BMC.

R: l: $2\cdot(-2)+3(\cdot 1)-5=-6<0$

m: $-2-1-1=-4<0$

З протилежного боку l і m: $\angle CMD$.

S: l: $2\cdot 1+3\cdot(-1)-5=-6<0$

m: $1-(-1)-1=1>0$

$\angle DMA$.

T: l: $2\cdot 4+3\cdot 0-5=3>0$

m: $4-0-1=3>0$

$\angle AMB$.

406. $A(-3,1)$, $B(5,4)$, $l: x-2y+1=0$. Чи перетинає l відрізок AB, його продовження за A чи за B? Аф.с.к.

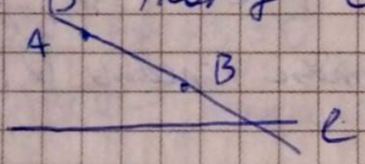
Відхилення:

A: $-3-2\cdot 1+1=-4<0$

B: $5-2\cdot 4+1=-2<0$

Тобто A і B по один бік від l: l не перетинає відр. AB.

При цьому відх. A більше за модулем: A далі від l, ніж B. Тому l перетинає продовж. за B:



Перевіримо строго, що це так, розглянувши загальний випадок:

407. $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $l: Ax+By+C=0$, $M_1, M_2 \notin l$.

У якому відношенні ділить M_1M_2 точка перетину M_1M_2 і l?

Аф. с. к.

Нехай це відн. λ, тоді точка перетину:

$$M\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$$

$M \in l$:

$$A\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+B\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+C=0$$

$$Ax_1+\lambda Ax_2+By_1+\lambda By_2+C+\lambda C=0$$

$$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}.$$

Тобто:

Якщо відхилення різних знаків, $\lambda>0$ і $M \in$ відр. M_1M_2.

Якщо відх. одного знаку, то $\lambda<0$:

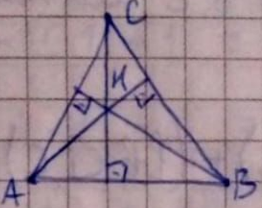
$$\lambda=-\frac{|Ax_1+By_1+C|}{|Ax_2+By_2+C|}.$$

Якщо $|Ax_1+By_1+C|>|Ax_2+By_2+C|$, то $\lambda<-1$, і M — справа від M_2 (саме так у попер. задачі для $(x_1,y_1)=(-3,1)$, $(x_2,y_2)=(5,4)$).

Якщо $|Ax_1+By_1+C|<|Ax_2+By_2+C|$, то $\lambda\in(-1,0)$, і M — зліва від M_1.

417. $\triangle ABC$, $A(-6,2)$, $B(2,-2)$, $H(1,2)$ - т. пер. висот. Знайти C

Дек. с. к.



У декартових коорд. $n=(A,B)$ - нормальний вектор пр. $l: Ax+By+C=0$, тобто $n \perp l$. Звичайно, $\lambda(A,B)$ $\forall \lambda \neq 0$ - теж норм.

Пряма, що проходить через (x_0,y_0) ортогонально $n=(n_1,n_2)$:

$$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)=0.$$

AC проходить через A і $\perp \overline{BH}=(-1,4)$:

$$AC: \quad -1(x+6)+4(y-2)=0$$
$$-x+4y-14=0$$

BC прох. через B і $\perp \overline{AH}=(7,0)$ (тобто $\perp Ox$ і $\parallel Oy$):

$$BC: \quad 7(x-2)+0\cdot(y+2)=0$$
$$x-2=0.$$

C - т. перетину AC і BC:

$$\begin{cases} x-4y+14=0 \\ x-2=0 \end{cases}$$

$2-4y+14=0 \Rightarrow y=4$. $\quad C(2,4)$

418 $\triangle ABC$, $AB: x+3y-1=0$, $AC: 3x+5y-6=0$, $H(0,0)$ - т. пер. висот. Знайти BC. Дек. с. к.

Прямі $A_1x+B_1y+C_1$ і $A_2x+B_2y+C_2$ ортогональні $\Leftrightarrow$ їхні в. нормалі $n_1=(A_1,B_1)$ і $n_2=(A_2,B_2)$ ортогональні $\Leftrightarrow$

$A_1A_2+B_1B_2=0$.

Зокрема, кожна пряма, що $\perp$ пр. $Ax+By+C=0$, має рівн.

$-Bx+Ay+D=0$. Якщо прох. через (x_0,y_0): $-B(x-x_0)+A(y-y_0)=0$.

(Або просто бо (A,B) - її напр. вектор, тому рівн. $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}$)

BH прох. через H ортогонально до AC.

$$BH: \quad -5(x-0)+3(y-0)=0$$
$$-5x+3y=0$$

B – т. перетину AB і BH:

$$\begin{cases} x+3y-1=0 \\ -5x+3y=0 \end{cases}$$

$$6x-1=0$$

$$x=\frac{1}{6} \Rightarrow y=\frac{5}{3}x=\frac{5}{18} \quad B\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{18}\right)$$

CH прох. через H, ⊥ AB:

$$-3(x-0)+1(y-0)=0$$

$$-3x+y=0.$$

C – т. перет. AC і CH:

$$\begin{cases} 3x+5y-6=0 \\ -3x+y=0 \end{cases}$$

$$6y-6=0,\ y=1 \Rightarrow x=\frac{y}{3}=\frac{1}{3} \quad C\left(\frac{1}{3}, 1\right).$$

BC тоді:

$$\frac{x-\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=\frac{y-\frac{5}{18}}{1-\frac{5}{18}}$$

$$\frac{6x-1}{2-1}=\frac{18y-5}{18-5}$$

$$13(6x-1)=18y-5$$

$$78x-18y-8=0$$

$$39x-9y-4=0.$$

Або: BC прох. через B ортог. до $\overline{AH}$, де A – т. пер. AB і AC:

$$\begin{cases} x+3y-1=0 \quad |\cdot 3 \\ 3x+5y-6=0 \end{cases}$$

$$4y+3=0 \Rightarrow y=-\frac{3}{4} \Rightarrow x=1-3y=\frac{13}{4}. \quad A\left(\frac{13}{4}, -\frac{3}{4}\right).$$

Тоді $\overline{AH}=\left(-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right) \sim (-13, 3)$, тому

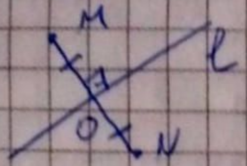
BC: $$-13\left(x-\frac{1}{6}\right)+3\left(y-\frac{5}{18}\right)=0$$

$$-13x+3y+\frac{8}{6}=0$$

$$-39x+9y+4=0.$$

424. $M(-2, 9)$, $l: 2x-3y+18=0$, N симетрична M відносно l. Знайти N с.к. дек.

Тобто $MN \perp l$ і $MO=ON$, де O – т. перетину MN і l (проекція M на l):



MN прох. через M ортог. l, тобто напр. вектор MN — це в. нормалі l: $n=(2,-3)$:

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 9 - 3t \end{cases}$$ — параметричні рівняння MN

O — т. перетину MN і l (проекція M на l):

$$2(-2+2t) - 3(9-3t) + 18 = 0$$
$$-4 + 4t - 27 + 9t + 18 = 0$$
$$13t - 13 = 0$$

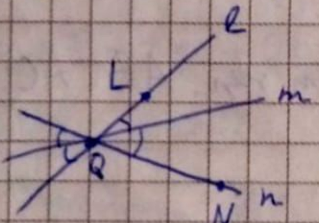
$t = 1 \Rightarrow O(-2+2\cdot 1,\ 9-3\cdot 1) = (0,6)$

N симетрична M відн. O: $N(2\cdot 0-(-2),\ 2\cdot 6-9) = (2,3)$

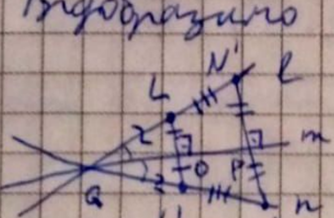
Або: можна шукати $O(x,y)$ і записати умови:

$\underline{O \in l}$: $\begin{cases} 2x - 3y + 18 = 0 \\ \frac{x+2}{2} = \frac{y-9}{-3} \end{cases}$ ← бо $\overline{MO} \perp l \Leftrightarrow \overline{MO} \parallel n$ — $\overline{MO}$ колінеарний n.
$MO \perp l$:

<u>426.</u> l, m, n — прямі, m ділить навпіл кути між l і n, $L(15,10) \in l$, $N(10,5) \in n$. Знайти l, n, якщо m: $x+2y=0$. (в дек.



Відображаємо точки симетрично відн. m:



$LL'Q$, $NN'Q$ — рівнобедрені, m — їхня медіана, висота, бісектриса.

O — т. пер. LL' і m: $1\cdot(15+1\cdot t) + 2\cdot(10+2\cdot t) = 0$, $5t+35=0$

$\Rightarrow t = -7$, $O(8,-4)$, $L'(2\cdot 8-15,\ 2\cdot(-4)-10) = (1,-18)$

P — т. пер. NN' і m: $1\cdot(10+1\cdot t) + 2(5+2\cdot t) = 0$ $5t+20=0$

$\Rightarrow t = -4$, $P(6,-3)$, $N'(2\cdot 6-10,\ 2\cdot(-3)-5) = (2,-11)$

Отже, $l = LN'$:

$$\frac{x-15}{2-15} = \frac{y-10}{-11-10}$$

$$21(x-15) = 13(y-10)$$

$$21x - 13y - 185 = 0.$$

$n = NL$:

$$\frac{x-10}{1-10} = \frac{y-5}{-13-5}$$

$$23(x-10) = 9(y-5)$$

$$23x - 9y - 185 = 0.$$

(Можна перевірити, що ці $\overbrace{\text{прямі}}^{(l,m,n)}$ дійсно мають спільну т. $Q\left(\frac{74}{11}, -\frac{37}{11}\right)$)