197. $[a,b] + [b,c] + [c,a] = 0 \Rightarrow a, b, c$ компланарні:

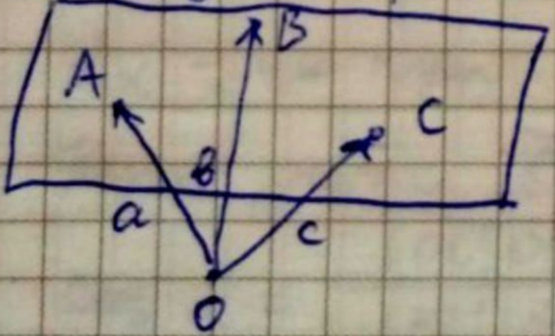
Домножимо на c справа:

$$0 = ([a,b] + [b,c] + [c,a], c) = ([a,b], c) + \underbrace{([b,c], c)}_{=0} + \underbrace{([c,a], c)}_{=0} =$$

$= (a, b, c)$. $(a,b,c) = 0$ і означає, що a, b, c компл.

196. a, b, c – некомпланарні, $a=\overline{OA}$, $b=\overline{OB}$, $c=\overline{OC}$.

Показати, що площина ABC ортогональна $\underbrace{[a,b]+[b,c]+[c,a]}_{n}$.



Ідея: площина паралельна векторам $\overline{AB}=b-a$ і $\overline{AC}=c-a$, причому вони неколінеарні (інакше було б $0=\lambda(b-a)+\mu(c-a)=-(\lambda+\mu)a+\lambda b+\mu c$, причому $\lambda\neq 0$ або

$n \neq 0 \Rightarrow a, b, c$ компланарні). Отже, $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$ – базис площини, і площина $\perp n \Leftrightarrow \overline{AB} \perp n$, $\overline{AC} \perp n$:

$(\overline{AB}, n) = (b - a, [a,b] + [b,c] + [c,a]) =$

$= (b, [a,b]) + (b, [b,c]) + (b, [c,a]) - (a, [a,b]) - (a, [b,c]) - (a, [c,a]) =$

$= (b,a,b) + (b,b,c) + (b,c,a) - (a,a,b) - (a,b,c) - (a,c,a) =$

$= 0 + 0 + (a,b,c) - 0 - (a,b,c) - 0 = 0$

(або відразу: $(b, [a,b]) = 0$, бо $b \perp [a,b]$ за def. ing.)

$(\overline{AC}, n) = (c - a, [a,b] + [b,c] + [c,a]) =$

$= (c, [a,b]) + (c, [b,c]) + (c, [c,a]) - (a, [a,b]) - (a, [b,c]) - (a, [c,a]) =$

$= (c,a,b) + 0 + 0 - 0 - (a,b,c) - 0 = 0.$

202(1) Довести:

$$([a,b],[c,d]) = \begin{vmatrix} (a,c) & (a,d) \\ (b,c) & (b,d) \end{vmatrix}$$

—

Подвійний векторний добуток: $[a,[b,c]] = b(a,c) - c(a,b)$

—

Використаємо цю ф-лу та інваріантність:

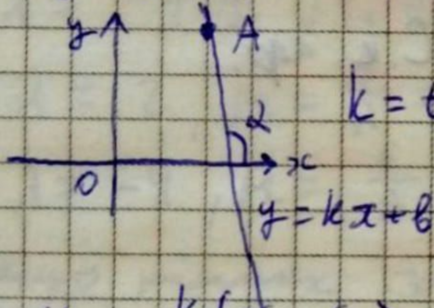
$([a,b], \underbrace{[c,d]}_{e}) = (a, [b, \underbrace{[c,d]}_{e}]) = (a, c(b,d) - d(b,c)) =$

$= (a,c)(b,d) - (a,d)(b,c) = \begin{vmatrix} (a,c) & (a,d) \\ (b,c) & (b,d) \end{vmatrix}.$

207 Довести, що площа паралелограма, що побудований на a і b, дорівнює $\sqrt{\begin{vmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (a,b) & (b,b) \end{vmatrix}}$

$S_{\square} = |[a,b]| = \sqrt{([a,b],[a,b])} = [202(1)] = \sqrt{\begin{vmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (b,a) & (b,b) \end{vmatrix}}.$

363(2) Знайти рівняння прямої з кутовим коеф. -5, що проходить через $(2,3)$. Аф. с.к.



$k = tg\,\alpha = -5$

$y - y_0 = k(x - x_0)$ – рівняння з кутовим коефіцієнтом.

$y - 3 = -5(x-2)$

$y = -5x + 13$

Або загальне: $5x + y - 13 = 0$.

365 Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $(3,-2)$ паралельно $(-2,3)$. Аф. с.к.

Пряма, що прох. через (x_0, y_0) у напрямку (a,b): $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$.

$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{3}$ $(=t)$ – канонічне

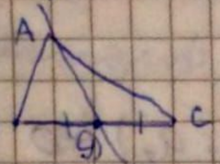
$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ – параметричні

Перепишемо канонічне як пропорцію!

$3(x-3) = -2(y+2)$

$3x + 2y - 5 = 0$ – загальне.

367. $\triangle ABC$: $A(-2,3)$, $B(4,1)$, $C(6,-5)$. Знайти рівняння медіани AD. Аф. с.к.



$D\left(\frac{4+6}{2}, \frac{1-5}{2}\right) = (5,-2)$

$\overline{AD} = (7,-5)$, тому рівн. прямої:

$\frac{x+2}{7} = \frac{y-3}{-5}$

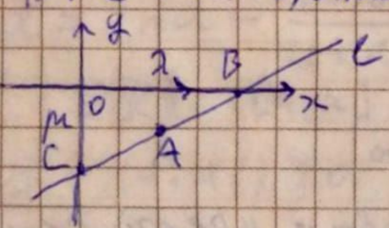
(і взагалі пряма, що прох. через (x_0, y_0) і (x_1, y_1):

$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$, тут: $\frac{x-(-2)}{5-(-2)} = \frac{y-3}{-2-3}$).

$-5x-10 = 7y-21$

$5x+7y-11=0$

370. Через $A(2,-1)$ провести пряму l так, що A – середина BC, де B і C – т. перетину l з Ox і Oy відп. С.к. аф.



Нехай $B(\lambda,0)$, $C(0,\mu)$, тоді $(2,-1) = \left(\frac{\lambda+0}{2}, \frac{0+\mu}{2}\right) \Rightarrow \lambda=4, \mu=-2$.

Рівняння прямої у відрізках: $\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} = 1$

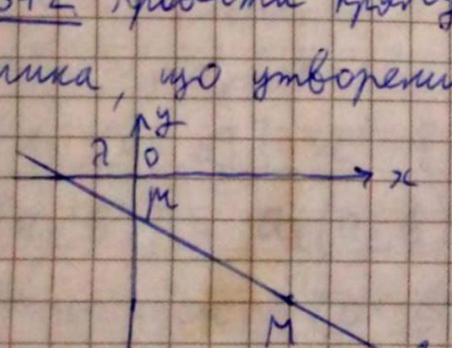
$\left(\frac{x-\lambda}{0-\lambda} = \frac{y-0}{\mu-0} \Rightarrow -\frac{x}{\lambda}+1 = \frac{y}{\mu}\right)$

У нас $\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1$

$x-2y=4$

$x-2y-4=0$.

372. Провести пряму l через $M(4,-3)$ так, що площа трикутника, що утворений l, Ox і Oy, дор. 3. С.к. декартова.



Нехай l відсікає на Ox і Oy відр. λ і μ (як у попер. задачі):

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} = 1.$$

$M \in l$: $\frac{4}{\lambda} - \frac{3}{\mu} = 1$.

Площа трикутника: $\frac{1}{2}|\lambda\mu| = 3$

Якщо λ і μ одного знака:

$$\begin{cases} \frac{4}{\lambda} - \frac{3}{\mu} = 1 \\ \lambda\mu = 6 \end{cases}$$

$\frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{6}$:

$$\frac{4}{\lambda} - \frac{\lambda}{2} = 1$$

$$8 - \lambda^2 = 2\lambda$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$$

$\lambda = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$.

$\lambda = 2$, $\mu = \frac{6}{\lambda} = 3$: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, $3x + 2y - 6 = 0$

$\lambda = -4$, $\mu = \frac{6}{\lambda} = -\frac{3}{2}$: $-\frac{x}{4} - \frac{2y}{3} = 1$, $3x + 8y + 12 = 0$

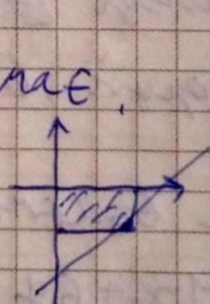
Якщо різних знаків:

$$\begin{cases} \frac{4}{\lambda} - \frac{3}{\mu} = 1 \\ \lambda\mu = -6 \end{cases}, \quad \frac{1}{\mu} = -\frac{\lambda}{6}:$$

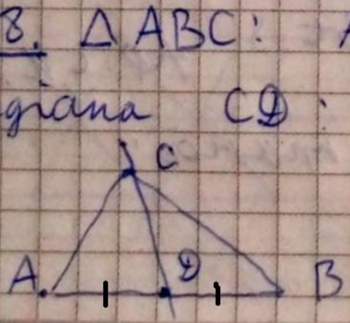
$$\frac{4}{\lambda} + \frac{\lambda}{2} = 1$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 8 = 0$$

$\frac{D}{4} = 1 - 8 < 0$, розв'язків немає.

Дійсно, площа Δ вигляду  > 3, бо він містить прямокутник площі $4 \cdot 3 = 12$.

378. ΔABC: AB: $3x - 2y + 1 = 0$, BC: $x - y + 1 = 0$, медіана CD: $2x - y - 1 = 0$. Знайти рівн. AC. С.к. афі.



B - точка перетину AB і BC:

$$\begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ x-y+1=0 \quad \cdot 2 \end{cases}$$

$x-1=0$, $x=1$, $y=x+1=2$. $B(1,2)$.

D - точка перетину AB і CD:

$$\begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ 2x-y-1=0 \quad \cdot 2 \end{cases}$$

$-x+3=0$, $x=3$, $y=2x-1=5$. $D(3,5)$

D - середина AB, тому

$A(2\cdot 3-1,\ 2\cdot 5-2)=(5,8)$.

~~Пря~~ C - т. перетину BC і CD:

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$$

$x-2=0$, $x=2$, $y=x+1=3$. $C(2,3)$

Пряма AC:

$$\frac{x-5}{2-5}=\frac{y-8}{3-8}$$

$$-5(x-5)=-3(y-8)$$

$$5x-3y-1=0.$$

—

$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$

$l_1=l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$; $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$;

l_1 і l_2 перет. в 1 точці $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$.

Це формальні пропорції, в знаменниках можуть бути 0!

—

383(1) Визначити взаємне розташування прямих:

$2x+3y-1=0$, $4x+6y-7=0$. Аф. с.к.

$\frac{2}{4}=\frac{3}{6}\neq\frac{-1}{-7}$. Паралельні

383(3) -//- : $3x+9y+5=0$, $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-t \end{cases}$ Аф. с.к.

Запишемо загальне рівняння другої прямої:

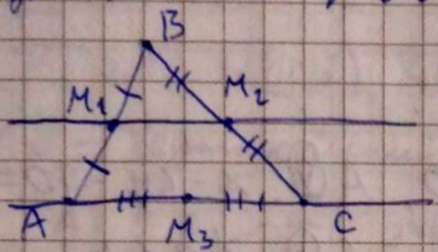
$$t=\frac{x-2}{3}=\frac{y-0}{-1}$$

$x-2=-3y$

$x+3y-2=0$

$\frac{3}{1}=\frac{9}{3}\neq\frac{5}{-2}$ – паралельні.

387. ΔABC, $M_1(2,3)$, $M_2(-1,2)$, $M_3(4,5)$ – середини AB, BC, CA відп. Знайти рівн. AB, BC, CA. Аф. с.к.



AC проходить через M_3 паралельно $\overline{M_1M_2}=(-3,-1)$:

$$\frac{x-4}{-3}=\frac{y-5}{-1}$$

$x-4=3(y-5)$

$x-3y+11=0$

Ан-но: BC через $M_2 \parallel \overline{M_1M_3}=(2,2)$: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{2}$, $x-y+3=0$.

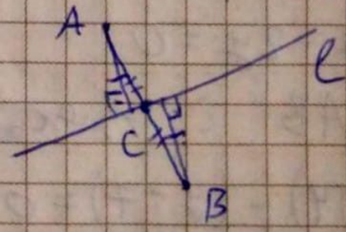
AB – через M_1, $\parallel \overline{M_2M_3}=(5,3)$: $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{3}$, $3(x-2)=5(y-3)$, $3x-5y+9=0$.

389. Знайти рівняння прямих, що рівновіддалені від $A(1,2)$, $B(3,0)$, $C(-4,-5)$. Аф. с.к.

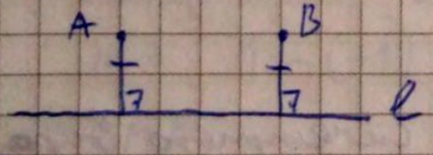
~~Тобто~~ для кожної з таких пр. l: $d(A,l)=d(B,l)=d(C,l)$.

– Якщо l рівновідд. від A і B, то

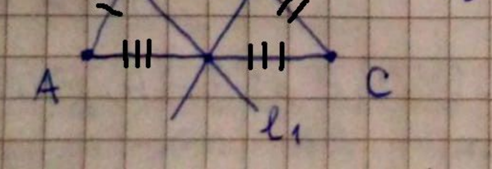
– або l прох. через середину AB:



– або l паралельна AB:



Для трьох точок:



l_1 прох. через середини AB і AC, $\parallel BC$

l_2 – через середини AB і BC, $\parallel AC$

l_3 – через середини AC і BC, $\parallel AB$.

Тобто це медіані ліній тр-ка Наприклад l_1 прох. через

$$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (2,1) \text{ і } \left(\frac{1-4}{2}, \frac{2-5}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right):$$

$$\frac{x-2}{-\frac{3}{2}-2} = \frac{y-1}{-\frac{3}{2}-1} \quad \cdot(-2)$$

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y-1}{5}$$

$$5x - 7y - 3 = 0.$$