# Лекції з топології

Петров Є.В.

22 жовтня 2024 р.

## Зміст

Топологія – це частина математики, що вивчає загальне поняття неперервності, відношення еквівалентності, що будуються за допомогою неперервних відображень, та інваріанти цих відношень. Стандартним підходом до введення цих концепцій є використання поняття топологічного простору.

# 1 Топологічний простір. Околи

**Означення 1.1.** Нехай $X$ – довільна множина. *Топологією* на $X$ зветься сукупність $\mathcal{T}$ підмножин $X$, що задовольняє наступним властивостям:

1. Об'єднання будь-якої сукупності підмножин з $\mathcal{T}$ належить до $\mathcal{T}$, тобто якщо $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T}$, то $\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

2. Перетин будь-якої скінченної сукупності підмножин з $\mathcal{T}$ належить до $\mathcal{T}$, тобто якщо $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$, то $\bigcap\limits_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

3. Порожня множина і сама множина $X$ належать до $\mathcal{T}$: $\varnothing, X \in \mathcal{T}$.

Пара $(X, \mathcal{T})$, що складається з множини та топології на ній, зветься *топологічним простором*. Підмножини $X$, що належать до $\mathcal{T}$, називаються *відкритими* підмножинами цього простору (або відкритими в $X$ відносно топології $\mathcal{T}$).

**Зауваження.** У позначеннях вище $A$ – множина індексів (довільної потужності), $n$ – натуральне число. Перераховані вимоги 1.–3. часто називають *аксіомами топології.* Інколи аксіому 3. виводять з перших двох, використовуючи стандартні узгодження теорії множин про об'єднання і перетин порожньої сукупності множин. Якщо зрозуміло, про яку топологію на множині $X$ йдеться, ми будемо опускати її явне позначення і говорити просто про топологічний простір $X$. Елементи топологічного простору традиційно називають його *точками.*

**Означення 1.2.** Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір. Підмножина $V \subset X$ називається *околом* точки $x \in X$, якщо існує відкрита підмножина $U$ (тобто $U \in \mathcal{T}$) така, що $x \in U \subset V$.

Має місце наступний простий критерій відкритості множини:

**Твердження 1.1.** *Підмножина $U \subset X$ відкрита тоді й тільки тоді, коли вона є околом кожної своєї точки $x \in U$.*

**Доведення.** $\underline{\Rightarrow}$ Необхідність очевидна, оскільки для будь-яких $U \in \mathcal{T}$ і $x \in U$ маємо $x \in U \subset U$.

$\underline{\Leftarrow}$ Перевіримо достатність. Нехай для кожної точки $x \in U$ множина $U$ є околом $x$, тобто існує відкрита $U_x \in \mathcal{T}$ така, що $x \in U_x \subset U$. Об'єднання усіх таких множин міститься в $U$, бо кожна з них міститься в $U$:

$$\bigcup_{x\in U} U_x \subset U.$$

З іншого боку, кожна точка $x \in U$ міститься у відповідній множині: $x \in U_x \subset \bigcup\limits_{x\in U} U_x$, тому маємо обернене включення:

$$U \subset \bigcup_{x\in U} U_x.$$

Отже,

$$U = \bigcup_{x\in U} U_x \in \mathcal{T}$$

відкрита як об'єднання відкритих підмножин за аксіомою 1.

■

**Зауваження.** У деяких джерелах поняття "окіл $x$" означає "відкритий окіл $x$", тобто, в силу попереднього твердження, будь-яку відкриту множину, що містить $x$. Як правило, у всіх означеннях і твердженнях, що використовують ці поняття, вони взаємозамінні (перевірка цього у кожному конкретному випадку може розглядатися як нескладна вправа).

Наведемо деякі класичні приклади топологій та відповідних топологічних просторів.

**Приклад 1.1.** Нехай $X$ – довільна множина. В якості системи підмножин виберемо $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$. Ясно, що аксіоми 1.–3. для такої сукупності виконані, і вона утворює топологію на $X$, що зветься *тривіальною* або *антидискретною* топологією на $X$.

**Приклад 1.2.** Нехай $X$ – довільна множина. В якості сукупності підмножин $\mathcal{T}$ виберемо систему всіх підмножин $X$ (інколи це позначають $\mathcal{T} = 2^X$). Так само очевидно, що аксіоми 1.–3. виконані, і система $\mathcal{T}$ утворює топологію на $X$. Її називають *дискретною* топологією на $X$.

**Приклад 1.3.** Нехай множина $X$ складається з двох точок: $X = \{x, y\}$. Неважко встановити, що існують всього 4 сукупності підмножин $X$, які задовольняють аксіомам топології:

- $\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, \{x, y\}\}$ – тривіальна;
- $\mathcal{T}_2 = \{\varnothing, \{x, y\},\ \{x\},\ \{y\}\}$ – дискретна;
- $\mathcal{T}_3 = \{\varnothing, \{x, y\},\ \{x\}\}$;
- $\mathcal{T}_4 = \{\varnothing, \{x, y\},\ \{y\}\}$.

Системи $\mathcal{T}_3$ і $\mathcal{T}_4$ звуться топологіями *зв'язної двокрапки.*

**Вправа 1.1.** Описати всі топології на триточковій множині $X = \{x, y, z\}$.

**Приклад 1.4.** Розглянемо дійсну пряму $X = \mathbb{R}$. Визначимо сукупність її підмножин $\mathcal{T}$ умовою:

$$\mathcal{T} \coloneqq \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall\, x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0\colon (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U\}.$$

Тобто множина належить до $\mathcal{T}$ тоді й тільки тоді, коли кожна її точка входить до неї з деяким $\varepsilon$-околом. Перевіримо, що ця сукупність утворює топологію на $\mathbb{R}$:

1. Для довільної сукупності підмножин $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$ і довільної точки $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, оскільки $x \in U_\alpha$ для деякого індекса $\alpha \in A$, існує $\varepsilon > 0$ таке, що
$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$
Тому $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

2. Для довільної скінченної сукупності підмножин $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$ і довільної $x \in \bigcap\limits_{i=1}^n U_i$ маємо $x \in U_i$ для кожного $i = \overline{1, n}$. Тому для кожного $i$ існує таке $\varepsilon_i > 0$, що $(x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subset U_i$. Покладемо $\varepsilon \coloneqq \min\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n > 0$. Тоді для усіх $i = \overline{1, n}$
$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subset U_i,$$
тому
$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i,$$
отже $\bigcap\limits_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

3. Для порожньої множини умова виконується тривіально; для будь-якої $x \in \mathbb{R}$ достатньо взяти $\varepsilon = 1$.

Ця топологія зветься *стандартною* (*природною*, *натуральною*, *евклідовою*) топологією прямої. Це приклад *метричної топології* (детальніше про це див. нижче у розділі 7).

Стандартним прикладом відкритої множини у цій топології є інтервал. Так, для довільної точки скінченного інтервала $x \in (a,b)$ можна взяти $\varepsilon \coloneqq \min\{x-a, b-x\}$, для напівнескінченних інтервалів усе ще простіше. З іншого боку, наприклад, напівінтервали не є відкритими: для будь-якого $\varepsilon > 0$ окіл $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ не міститься у $[a,b)$. Зауважимо, що $[a,b)$ можна представити у вигляді перетину зліченної кількості інтервалів: $[a,b) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(a-\frac{1}{n}, b)$. Тому умова скінченності у аксіомі 2. топології для цього прикладу суттєва.

Важливість інтервала як приклада відкритої підмножини стандартної прямої підкреслюється наступною теоремою:

**Теорема 1.1** (Опис відкритих підмножин прямої)**.** *Підмножина $U \subset \mathbb{R}$ дійсної прямої зі стандартною топологією є відкритою тоді й тільки тоді, коли вона є об'єднанням не більш ніж зліченної кількості інтервалів, що попарно не перетинаються.*

**Зауваження.** Вираз "не більш ніж зліченний" означає "скінченний або зліченний". Об'єднання підмножин, що попарно не перетинаються, зазвичай називають *диз'юнктним* і позначають знаком $\sqcup$. Отже, в теоремі стверджується, що відкриті підмножини прямої – це в точності ті, що мають вигляд

$$U = \bigsqcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i),$$

де замість $\infty$ може стояти натуральне $n$ або 0 – для порожньої $U$, інтервали можуть мати нескінченні межі, й $(a_i,b_i) \cap (a_j,b_j) = \varnothing$ при $i \neq j$.

**Доведення.** $\underline{\Leftarrow}$ Достатність тут очевидна: ми вже встановили, що інтервали відкриті, а отже і їхні об'єднання.

$\underline{\Rightarrow}$ Покажемо зворотне. Нехай $U \subset \mathbb{R}$ – відкрита, і $x \in U$. За означенням, існує таке $\varepsilon_x > 0$, що $(x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x) \subset U$. Покладемо:

$$a_x \coloneqq \inf\{a \mid \exists\,(a,b)\colon x \in (a,b) \subset U\};$$

$$b_x \coloneqq \sup\{b \mid \exists\,(a,b)\colon x \in (a,b) \subset U\}.$$

За побудовою, $a_x \leqslant x - \varepsilon_x < x$ і $b_x \geqslant x + \varepsilon_x > x$, тобто $x \in (a_x, b_x)$. З іншого боку, $(a_x,b_x) \subset U$. Дійсно, якщо $y \in (a_x,b_x)$ і, скажімо, $y \leqslant x$, то з $a_x < y$ і означення інфімума маємо, що існує інтервал $(a, b)$ такий, що $x \in (a, b) \subset U$ і $a_x \leqslant a < y$. Тоді $y \in (a, x] \subset (a, b) \subset U$. Аналогічно отримуємо $y \in U$ і для випадку $y \geqslant x$ з властивостей супремума.

**Вправа 1.2.** Перевірити, що

$$(a_x, b_x) = \bigcup_{x \in (a,b) \subset U} (a, b),$$

і що $(a_x, b_x)$ – найбільший за включенням інтервал, що містить $x$ і міститься в $U$ (це не буде потрібне для подальшого доведення).

Отже, оскільки для кожного $x \in U$ маємо $x \in (a_x, b_x) \subset U$, аналогічно до доведення попереднього твердження отримуємо, що

$$U = \bigcup_{x \in U} (a_x, b_x).$$

Нехай два таких інтервали $(a_x, b_x)$ і $(a_y, b_y)$ перетинаються, тобто мають спільний елемент $z \in (a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) \neq \varnothing$. Тоді, оскільки $z \in (a_x, b_x) \subset U$, $(a_x, b_x) \subset (a_z, b_z)$ за побудовою $a_z$ і $b_z$. Зокрема, $x \in (a_x, b_x) \subset (a_z, b_z)$, тому, з аналогічних міркувань, $(a_z, b_z) \subset (a_x, b_x)$. Таким чином, $(a_x, b_x) = (a_z, b_z)$. Аналогічно, $(a_y, b_y) = (a_z, b_z)$, тому $(a_y, b_y) = (a_x, b_x)$. Отже, ми показали, що будь-які два побудовані нами інтервали або не перетинаються, або збігаються. Зауважимо, що межі цих інтервалів не обов'язково скінченні: можливо $a_x = -\infty$ або $b_x = +\infty$, і для цих випадків усі попередні міркування залишаються вірними.

Згрупуємо інтервали, що збігаються, залишивши лише попарно різні (а отже такі, що не перетинаються), і перепозначимо їх за допомогою множини індексів $A$. Отримаємо диз'юнктне об'єднання:

$$U = \bigsqcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha).$$

Залишилося помітити, що в кожному з цих інтервалів, що попарно не перетинаються, є раціональне число, тому потужність $|A| \leqslant |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, тобто $A$ не більш ніж злічена. Це й означає, що множина $U$ має потрібний вигляд.

$\blacksquare$

**Приклад 1.5.** Знову покладемо $X = \mathbb{R}$, а в якості системи підмножин в $X$ розглянемо

$$\mathcal{T} \coloneqq \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty)\}_{a \in \mathbb{R}}.$$

Неважко пересвідчитися у тому, що це топологія на $\mathbb{R}$:

1. $\bigcup\limits_{\alpha\in A}(a_\alpha,+\infty) = (\inf\{a_\alpha\}_{\alpha\in A},+\infty)$. Це виконується й для випадку, коли одна з лівих меж дорівнює $+\infty$ (тобто відповідна множина порожня) або $-\infty$ (тобто це вся пряма) – перевірте це!

2. $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(a_i,+\infty) = (\max\{a_i\}_{i=1}^n,+\infty)$. Це теж справедливо й для нескінченних меж. Як і у минулому прикладі, скінченність перетину тут є суттєвою (чому?).

3. виконана за побудовою.

Така $\mathcal{T}$ зветься *топологією напівнескінченних інтервалів* на прямій.

# 2 Замкнені множини

**Означення 2.1.** Нехай $(X,\mathcal{T})$ – топологічний простір. Підмножина $V\subset X$ зветься *замкненою*, якщо доповнення до неї $X\setminus V$ відкрите (тобто $X\setminus V\in\mathcal{T}$).

Властивості замкнених підмножин топологічного простору дуальні до властивостей відкритих:

**Твердження 2.1** (Властивості замкнених множин)**.** *Нехай $(X,\mathcal{T})$ – топологічний простір.*

1. *Перетин будь-якої сукупності замкнених підмножин замкнений, тобто якщо $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ замкнені, то $\bigcap\limits_{\alpha\in A}V_\alpha$ замкнена.*

2. *Об'єднання будь-якої скінченної сукупності замкнених підмножин замкнене, тобто якщо $\{V_i\}_{i=1}^n$ замкнені, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_i$ замкнена.*

3. *Порожня множина та $X$ замкнені.*

**Доведення.** Ці властивості випливають з означень топології, замкненої множини та формул де Моргана:

$$X\setminus\bigcap_{\alpha\in A}V_\alpha=\bigcup_{\alpha\in A}(X\setminus V_\alpha);$$

$$X\setminus\bigcup_{i=1}^{n}V_i=\bigcap_{i=1}^{n}(X\setminus V_i).$$

■

Повернемося до наших прикладів топологій:

**Приклад 2.1.** У тривіальній топології є лише дві відкритих підмножини $\varnothing$ та $X$, тому в точності вони є і замкненими. У подальшому ці дві одночасно відкриті й замкнені у кожній топології множини ми будемо називати *тривіальними*.

**Приклад 2.2.** Відносно дискретної топології будь-яка підмножина $X$ є відкритою і замкненою одночасно.

**Приклад 2.3.** У топології зв'язної двокрапки $\mathcal{T}_3 = \{\varnothing, \{x, y\}, \{x\}\}$ на двоточковій множині $X = \{x, y\}$ єдиною нетривіальною замкненою підмножиною є $\{y\}$. Аналогічно для топології $\mathcal{T}_4$ (у позначеннях прикладу 1.3) на цій множині.

**Приклад 2.4.** Приклади замкнених підмножин прямої $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією суб'єктивно різноманітніші, ніж відкритих. Зокрема, до них відносяться:

- Відрізки $[a, b]$ (зокрема, одноточкова множина $\{a\} = [a, a]$), бо доповнення $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ відкрите в даній топології. Аналогічно для напівнескінченних відрізків $[a, +\infty)$ і $(-\infty, b]$.

- Множина цілих чисел $\mathbb{Z}$, бо доповнення $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$ відкрите (і аналогічно для множини натуральних чисел $\mathbb{N}$).

- Множина Кантора утворюється з відрізка $[0, 1]$ послідовним викиданням інтервалів $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$; $(\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$, $(\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$, $(\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$, $(\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$ і т.д. Вона замкнена, бо її доповнення є об'єднанням зліченної кількості інтервалів, що попарно не перетинаються. Також її можна описати як множину дійсних чисел від 0 до 1, запис яких у трійковій системі числення не містить одиниць, лише нулі та двійки (відтворіть деталі самостійно). Як відомо з курсу аналіза, ця множина, зокрема, континуальна. Її більш детальний опис можна знайти у [13, с. 57-58].

З іншого боку, напівінтервал $[a, b)$ не замкнений, оскільки його доповнення $\mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ не відкрите в цій топології (чому?). При цьому $[a, b) = \bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}]$ (де $n_0$ – натуральне число достатньо велике для того, щоб ці відрізки існували), тож умова скінченності об'єднання у властивості 2. твердження 2.1 суттєва.

**Вправа 2.1.** Показати, що множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ не є замкненою в цій топології.

**Приклад 2.5.** У прямій $\mathbb{R}$ з топологією напівнескінченних інтервалів нетривіальні замкнені підмножини мають вигляд $(-\infty, a]$.

Дуальність властивостей відкритих і замкнених множин підказує нам, що топологію можна визначати за допомогою сукупності замкнених підмножин:

**Твердження 2.2.** *Нехай $\mathcal{C}$ – система підмножин деякої множини $X$, що задовольняє умовам 1.–3. з твердження 2.1. Тоді*

$$\mathcal{T} := \{U \mid X \setminus U \in \mathcal{C}\}$$

*є топологією на $X$, а $\mathcal{C}$ – сукупністю підмножин, що замкнені у цій топології.*

**Доведення.** Як і твердження 2.1, це безпосередній наслідок означень і формул де Моргана.

■

**Приклад 2.6.** Нехай $X$ – довільна множина, а $\mathcal{C}$ складається з усіх скінченних підмножин $X$ і (за потреби) самої $X$. Умови 1.–3. твердження 2.1 для такого $\mathcal{C}$, очевидно, виконані, бо перетин будь-якої кількості та об'єднання скінченної кількості скінченних підмножин скінченні. Отже, доповнення до скінченних підмножин (і $\varnothing$ за потреби) утворюють топологію на $X$, що зветься *кофінітною.* Якщо $X$ скінченна, то ця топологія збігається з дискретною. Зауважимо, що для $X = \mathbb{R}$ скінченні підмножини й уся пряма – це в точності множини коренів деяких поліномів, тобто $V = \{x \mid f(x) = 0\}$ для $f \in \mathbb{R}[x]$. Дійсно, множині $V = \{a_i\}_{i=1}^n$ відповідає $f = \prod\limits_{i=1}^{n}(x - a_i)$, порожній множині – $f = 1$, а всій прямій – $f = 0$. Узагальнимо це спостереження на випадок довільної вимірності у наступному прикладі.

**Приклад 2.7.** Розглянемо у $X = \mathbb{R}^n$ систему *алгебраїчних* підмножин

$$\mathcal{C} := \big\{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, f \in S\ f(x) = 0\}\big\}_{S \subset \mathbb{R}[x^1, \ldots, x^n]}$$

тобто спільних коренів для усіх множин (систем) $S$ поліномів від $n$ змінних (додаткова вправа для читачів, що знайомі з теорією кілець: перевірити, що замість довільних множин $S$ достатньо розглядати ідеали кільця поліномів $\mathbb{R}[x^1, \ldots, x^n]$).

**Вправа 2.2.** Показати, що $\mathcal{C}$ задовольняє умовам 1.–3. твердження 2.1.

Тобто $\mathcal{C}$ є сукупністю замкнених підмножин деякої топології на $\mathbb{R}^n$. Вона називається *топологією Зариського* і є природним вибором для багатьох задач *алгебраїчної геометрії* – дисципліни, що вивчає алгебраїчні множини. Зауважимо, що $\mathbb{R}$ тут можна замінити на довільне поле.

# 3 Порівняння топологій

**Означення 3.1.** Нехай $X$ – деяка множина, а $\mathcal{T}$ і $\mathcal{S}$ – топології на $X$. Кажуть, що $\mathcal{T}$ *слабша* (*грубша*) за $\mathcal{S}$, а $\mathcal{S}$ *сильніша* (*тонша*) за $\mathcal{T}$, якщо будь-яка підмножина, що відкрита відносно топології $\mathcal{T}$, є відкритою й відносно топології $\mathcal{S}$. Це позначається $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ або $\mathcal{S} \succ \mathcal{T}$.

**Зауваження.** Звичайно, це просто включення двох систем підмножин: $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ означає $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Зокрема, воно встановлює *відношення (часткового) порядку* на множині топологій $X$, що задовольняє відповідним аксіомам:

- $\mathcal{T} \prec \mathcal{T}$ для будь-якої $\mathcal{T}$ (*рефлексивність*);
- якщо $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ і $\mathcal{S} \prec \mathcal{T}$, то $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ (*антисиметричність*);
- якщо $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ і $\mathcal{S} \prec \mathcal{R}$, то $\mathcal{T} \prec \mathcal{R}$ (*транзитивність*).

Замість топологій можна порівнювати сукупності замкнених множин, як у прикладі 3.4 нижче (чому?).

**Приклад 3.1.** Тривіальна топологія на довільній множині слабша за будь-яку іншу, тобто є найслабшою.

**Приклад 3.2.** Дискретна топологія на довільній множині сильніша за будь-яку іншу, тобто є найсильнішою.

**Приклад 3.3.** На двоточковій множині $X = \{x, y\}$ топології зв'язної двокрапки $\mathcal{T}_3$ і $\mathcal{T}_4$ (див. позначення вище) знаходяться між тривіальною $\mathcal{T}_1$ і дискретною $\mathcal{T}_2$: $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_3 \prec \mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_4 \prec \mathcal{T}_2$. При цьому вони непорівнювані між собою, бо у кожній з них є відкрита множина, якої немає у іншій ($\{x\}$ та $\{y\}$ відповідно).

**Приклад 3.4.** На прямій $\mathbb{R}$ крім тривіальної (найслабшої) та дискретної (найсильнішої) маємо три приклади топологій: стандартну, напівнескінченних інтервалів і кофінітну. При цьому топологія напівнескінченних інтервалів та кофінітна топологія слабші за стандартну: у кожній з них відкриті множини є, очевидно, об'єднанням інтервалів, а отже відкриті у стандартній. Але між собою ці дві топології непорівнювані. Наприклад, множина $(-\infty, 0]$ є замкненою у топології напівнескінченних інтервалів, але не у кофінітній (бо нескінченна і не збігається з усією прямою), а $\{0\}$ – навпаки.

# 4 База топології

Згадаємо, що у стандартній топології числової прямої відкриті множини є об'єднаннями інтервалів: це випливає з теореми 1.1 або просто з означення цієї топології. Це дає нам ідею "економного" описання топології за допомогою об'єднань множин з деякого "стандартного набору", що формалізована у наступному означенні:

**Означення 4.1.** Деяка сукупність $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ відкритих підмножин топологічного простору $(X, \mathcal{T})$ зветься *базою* топології $\mathcal{T}$, якщо для будь-якої відкритої множини $U \in \mathcal{T}$ і будь-якої її точки $x \in U$ існує така $V \in \mathcal{B}$, що $x \in V \subset U$.

Перш за все, переформулюємо це означення і покажемо, що воно відповідає викладеній вище ідеї:

**Твердження 4.1.** *Система відкритих множин $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ є базою топології $\mathcal{T}$ тоді й тільки тоді, коли будь-яка відкрита множина $U \in \mathcal{T}$ є об'єднанням деякої сукупності множин, що належать до $\mathcal{B}$: існує $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{B}$ така, що $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha$.*

**Доведення.** $\underline{\Rightarrow}$ Дійсно, якщо $\mathcal{B}$ – база, то для кожної відкритої $U$ і кожної $x \in U$ знайдеться $V_x \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V_x \subset U$. Тоді $U = \bigcup\limits_{x \in U} V_x$ (аналогічно, наприклад, до доведення твердження 1.1).

$\underline{\Leftarrow}$ І навпаки, якщо будь-яка відкрита множина має вигляд $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha$, де усі $V_\alpha \in \mathcal{B}$, то для кожної точки $x \in U$ цієї множини існує $\alpha \in A$ таке, що $x \in V_\alpha \subset U$.

∎

**Приклад 4.1.** Тривіальним прикладом бази топології $\mathcal{T}$ для довільного топологічного простору $(X, \mathcal{T})$ є сама топологія: означення, очевидно, виконується для $\mathcal{B} := \mathcal{T}$. Звичайно, про жодну економію опису відкритих множин у цьому випадку не йдеться.

**Приклад 4.2.** Повернемося до стандартної топології $\mathbb{R}$. Як було зазначено вище, інтервали складають деяку базу цієї топології

$$\mathcal{B} := \{(a, b)\}_{a,b \in \mathbb{R},\, a<b},$$

бо за побудовою між кожною відкритою множиною $U \subset \mathbb{R}$ і кожною її точкою $x \in U$ можна вставити інтервал: $x \in (a, b) \subset U$ (наприклад, $(a, b) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ для деякого $\varepsilon > 0$). Але тоді, у свою чергу, з властивостей раціональних чисел випливає існування $q, r \in \mathbb{Q}$ таких, що

$a < q < x$ і $x < r < b$, тобто $x \in (q, r) \subset (a, b) \subset U$. Це означає, що (строго) менша система

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \{(q, r)\}_{q, r \in \mathbb{Q},\, q < r} \subset \mathcal{B}$$

інтервалів з раціональними кінцями також є базою цієї топології. До того ж, вона є зліченною на відміну від $\mathcal{B}$ (і $\mathcal{T}$). Отже, ми бачимо, що база топології не визначається однозначно: одна й та сама топологія може мати кілька баз різної потужності.

# 5 Аксіоми зліченності. Теорема Ліндельофа

**Означення 5.1.** Сукупність $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ відкритих підмножин топологічного простору $(X, \mathcal{T})$, що містять точку $x \in X$, зветься *базою в точці* $x$ топології $\mathcal{T}$, якщо для будь-якої відкритої множини $U \in \mathcal{T}$, що містить $x$, існує така $V \in \mathcal{B}$, що $x \in V \subset U$.

База і база в точці пов'язані наступним очевидним чином:

**Твердження 5.1.** *Нехай $\mathcal{B}$ – база топології $\mathcal{T}$, і $x \in X$. Тоді сукупність*

$$\mathcal{B}_x := \{V \in \mathcal{B} \mid V \ni x\} \subset \mathcal{B}$$

*усіх елементів $\mathcal{B}$, що містять $x$, є базою $\mathcal{T}$ в $x$.*

**Доведення.** Це безпосередньо випливає з означень: для будь-якої відкритої $U \ni x$ існує $V \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V \subset U$. Але тоді $V \in \mathcal{B}_x$. ∎

**Вправа 5.1.** Як побудувати базу топології з баз у точках (тобто як виглядає конструкція, зворотня до твердження 5.1)?

Наступні властивості топологічного простору є нашими першими змістовними прикладами *топологічних інваріантів* (чому вони так називаються, буде зрозуміло з подальших лекцій, див. розділ 14).

**Означення 5.2.** Говорять, що топологічний простір $(X, \mathcal{T})$

- задовольняє *першій аксіомі зліченності*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує не більш ніж зліченна база топології $\mathcal{T}$ в $x$;

- задовольняє *другій аксіомі зліченності*, якщо існує не більш ніж зліченна база топології $\mathcal{T}$.

**Наслідок 5.1.** *Якщо топологічний простір задовольняє другій аксіомі зліченності, то він задовольняє і першій аксіомі зліченності.*

**Доведення.** Це наслідок твердження 5.1: якщо $\mathcal{B}$ не більш ніж зліченна, то й $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{B}$ не більш ніж зліченна для кожної $x \in X$.

■

**Зауваження.** Топологічні простори, що задовольняють другій аксіомі зліченності, також звуть просторами з не більш ніж зліченною базою, причому "не більш ніж" часто пропускають. Аналогічна термінологія використовується й для бази в точці. Обернене до попереднього наслідку твердження, взагалі кажучи, невірне: це демонструється, зокрема, у прикладі 5.2 нижче.

**Приклад 5.1.** Як було встановлено у прикладі 4.2, інтервали з раціональними кінцями утворюють зліченну базу $\widetilde{\mathcal{B}}$ стандартної топології прямої $\mathbb{R}$, тобто вона задовольняє другій аксіомі зліченності, а отже й першій. Зауважимо, що крім $\widetilde{\mathcal{B}}_x$ у якості бази в довільній $x \in \mathbb{R}$ можна розглядати, наприклад, теж зліченну $\left\{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ (чому?).

**Вправа 5.2.** Чи задовольняють аксіомам зліченності інші топології на $\mathbb{R}$, що були розглянуті вище? Показати, зокрема, що кофінітна топологія не задовольняє першій аксіомі зліченності (а отже й другій), більш того, це так для кофінітної топології на будь-якій незліченній множині.

**Приклад 5.2.** Розглянемо довільну множину $X$ з дискретною топологією. Для кожної $x \in X$ одноточкова підмножина $\{x\}$ відкрита, і для будь-якої $U \ni x$ маємо $x \in \{x\} \subset U$. Це означає, що система з однієї множини $\{x\}$ є базою в $x$, отже, $X$ задовольняє першій аксіомі зліченності. З іншого боку, якщо $\mathcal{B}$ – якась база цієї топології, то з тієї ж відкритості $\{x\}$ випливає, що для кожної $x \in X$ повинна існувати $V \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V \subset \{x\}$, тобто $V = \{x\}$. Отже, $\mathcal{B}$ повинна містити усі одноточкові підмножини $\{x\}$ (і навпаки, система усіх одноточкових підмножин, очевидно, буде базою). Тому $X$ задовольняє другій аксіомі зліченності тоді й тільки тоді, коли $X$ не більш ніж зліченна.

**Означення 5.3.** Система підмножин $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ множини $X$ зветься *покриттям* її підмножини $V \subset X$, якщо об'єднання елементів $\mathcal{U}$ містить $V$: $V \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$. Якщо менша сукупність $\{U_\alpha\}_{\alpha \in B} \subset \mathcal{U}$ (для деякої $B \subset A$) також є покриттям $V$, її називають *підпокриттям* $\mathcal{U}$. У топологічному просторі $X$ покриття називається *відкритим*, якщо кожна з його множин $U_\alpha$ відкрита.

Якщо у попередньому означенні $V = X$, то його умова перетворюється на $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Виявляється, що відкриті покриття просторів з не більш ніж зліченною базою мають наступну корисну властивість (яка також дещо нагадує означення компактного простору, див. розділ 20 у подальших лекціях):

**Теорема 5.1** (Ліндельоф)**.** *Якщо топологічний простір задовольняє другій аксіомі зліченності, то у будь-якого його відкритого покриття існує не більш ніж зліченне підпокриття.*

**Доведення.** Отже, нехай $X$ – простір, $\mathcal{B}$ – його не більш ніж зліченна база, а $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – деяке відкрите покриття. За означенням покриття, для будь-якої $x \in X$ існує таке $\alpha_x \in A$, що $x \in U_{\alpha_x}$. За означенням бази, тоді існує $V_x \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V_x \subset U_{\alpha_x}$. Залишимо лише елементи бази, що виникають у цій конструкції, тобто розглянемо сукупність

$$\widetilde{\mathcal{B}} \coloneqq \{V \in \mathcal{B} \mid \exists\, \alpha \in A \colon V \subset U_\alpha\} \subset \mathcal{B}$$

елементів бази, що містяться принаймні у одному елементі покриття. Вона також не більш ніж зліченна, тобто її елементи можна перенумерувати: $\widetilde{\mathcal{B}} = \{V_i\}_{i=1}^{\infty}$, де замість $\infty$ може стояти натуральне $n$. Для кожного $i$ тоді оберемо $\alpha_i \in A$ таке, що $V_i \subset U_{\alpha_i}$.

Тепер повернемося до початку: для будь-якої $x \in X$ ми знайшли $V_x \in \mathcal{B}$ таку, що $x \in V_x \subset U_{\alpha_x}$. Це означає, що $V_x \in \widetilde{\mathcal{B}}$, тобто існує $i$ таке, що $V_x = V_i$, а отже

$$x \in V_i \subset U_{\alpha_i} \subset \bigcup_i U_{\alpha_i}.$$

Це означає, що $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}$ (або до $n$) – потрібне нам не більш ніж зліченне підпокриття $\mathcal{U}$.

■

# 6 Критерій бази. Передбаза

Виявляється, що топологія визначається своєю базою однозначно і може бути за нею побудована. У наступній теоремі наведені властивості, що є необхідними та достатніми для того, щоб система підмножин була базою деякої топології.

**Теорема 6.1** (Критерій бази)**.** *Нехай $X$ – множина, а $\mathcal{B}$ – якась сукупність її підмножин. Якщо $\mathcal{B}$ – база деякої топології на $X$, то вона має наступні властивості:*

*<u>B1.</u> $\mathcal{B}$ – покриття $X$: $X = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{B}} V$.*

*<u>B2.</u> Для будь-яких $U, V \in \mathcal{B}$ та $x \in U \cap V$ існує $W \in \mathcal{B}$ така, що $x \in W \subset U \cap V$.*

*І навпаки, якщо $\mathcal{B}$ має властивості <u>B1.</u> і <u>B2.</u>, то на $X$ існує єдина топологія, базою якої є $\mathcal{B}$.*

**Зауваження.** Аналогічно до переформулювання означення бази у твердженні 4.1, властивість <u>B2.</u> еквівалентна наступній: для будь-яких $U, V \in \mathcal{B}$ їхній перетин $U \cap V$ можна представити у вигляді об'єднання множин, що належать до $\mathcal{B}$.

**Доведення.** Властивість <u>B1.</u> випливає з твердження 4.1, оскільки $X$ є відкритою множиною і тому повинна дорівнювати об'єднанню деяких (а отже й усіх) множин $\mathcal{B}$. <u>B2.</u> випливає безпосередньо з означення бази, бо $U \cap V$ – відкрита множина як перетин відкритих.

Тепер нехай $\mathcal{B}$ має зазначені властивості. Побудуємо систему $\mathcal{T}$ підмножин $X$, що складається з усіх можливих об'єднань множин з $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{T} := \left\{ U = \bigcup_{\beta \in B} V_\beta \right\}_{\{V_\beta\}_{\beta \in B} \subset \mathcal{B}}.$$

Зауважимо, що $\varnothing$ також належить до $\mathcal{T}$ як об'єднання порожньої сукупності підмножин. Перевіримо, що $\mathcal{T}$ – топологія на $X$:

<u>1.</u> Нехай $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$. За побудовою, кожен елемент цієї сукупності має вигляд $U_\alpha = \bigcup\limits_{\beta \in B_\alpha} V_{\alpha\beta}$ для деякої $\{V_{\alpha\beta}\}_{\beta \in B_\alpha} \subset \mathcal{B}$, що індексована множиною $B_\alpha$, власною для кожного $\alpha \in A$. Тоді

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A,\, \beta \in B_\alpha} V_{\alpha\beta} \in \mathcal{T}$$

за побудовою $\mathcal{T}$.

<u>2.</u> Нехай $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$. Перш за все, зауважимо, що належність перетину цих множин до $\mathcal{T}$ достатньо перевірити для $n = 2$ з індуктивних міркувань: якщо $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$, то й $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = (U_1 \cap U_2) \cap U_3 \in \mathcal{T}$, бо ми вже знаємо, що це вірно для двох множин, і так далі до $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i = \left( \bigcap\limits_{i=1}^{n-1} U_i \right) \cap U_n \in \mathcal{T}$.

Отже, маємо $U_1 = \bigcup\limits_{\beta\in B_1} V_{1\beta}$ і $U_2 = \bigcup\limits_{\beta\in B_2} V_{2\beta}$ для деяких сукупностей $\{V_{1\beta}\}_{\beta\in B_1}, \{V_{2\beta}\}_{\beta\in B_2} \subset \mathcal{B}$. Тоді з дистрибутивності перетинів і об'єднань випливає, що

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\beta_1\in B_1,\, \beta_2\in B_2} V_{1\beta_1} \cap V_{2\beta_2}.$$

Оскільки для будь-якого вибору індексів $\beta_1 \in B_1$ і $\beta_2 \in B_2$ множини $V_{1\beta_1}$ і $V_{2\beta_2}$ належать до $\mathcal{B}$, з її властивості B2. і зауваження вище випливає, що $V_{1\beta_1} \cap V_{2\beta_2} = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma_{\beta_1\beta_2}} W_{\beta_1\beta_2\gamma}$, де $\{W_{\beta_1\beta_2\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma_{\beta_1\beta_2}} \subset \mathcal{B}$ (для якоїсь індексуючої множини $\Gamma_{\beta_1\beta_2}$, що залежить від $\beta_1$ і $\beta_2$). Тому

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\beta_1\in B_1,\, \beta_2\in B_2,\, \gamma\in\Gamma_{\beta_1\beta_2}} W_{\beta_1\beta_2\gamma} \in \mathcal{T}$$

за побудовою.

3. Як ми зауважили вище, $\varnothing \in \mathcal{T}$. Множина $X$ належить до $\mathcal{T}$ в силу властивості B1.

Відносно топології $\mathcal{T}$ усі множини з $\mathcal{B}$ відкриті (як об'єднання сукупності з одної множини). Те, що $\mathcal{B}$ – база цієї топології, тоді випливає з побудови $\mathcal{T}$ і твердження 4.1.

Залишилося перевірити, що така топологія єдина. Нехай $\mathcal{S}$ – якась інша топологія з базою $\mathcal{B}$. Тоді в силу твердження 4.1 будь-яка $U \in \mathcal{S}$ є об'єднанням елементів $\mathcal{B}$, а отже належить до $\mathcal{T}$: $\mathcal{S} \prec \mathcal{T}$. З іншого боку, усі елементи $\mathcal{B}$ повинні бути відкритими відносно $\mathcal{S}$, а отже і їхні об'єднання, тому $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$. Отже, $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. Це й означає єдиність.

∎

**Приклад 6.1.** Згадаємо, що одною з баз стандартної топології $\mathbb{R}$ є сукупність інтервалів (див. приклад 4.2). Розглянемо тепер аналогічну систему з напівінтервалів:

$$\mathcal{B} \coloneqq \{[a,b)\}_{a,b\in\mathbb{R},\, a<b}\,,$$

Вона задовольняє умовам теореми 6.1. Дійсно, всю пряму можна представити у вигляді, наприклад, $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [-n, n)$, а непорожній перетин двох напівінтервалів також є напівінтервалом. Тому цій базі відповідає деяка топологія. Вона зветься *топологією Зоргенфрея*, а пряма $\mathbb{R}$ з нею – *прямою Зоргенфрея*.

Перш за все, зауважимо, що будь-який інтервал можна представити у вигляді об'єднання напівінтервалів: $(a, b) = \bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b)$ (для деякого достатньо великого натурального $n_0$), а тому й будь-яка відкрита в стандартній топології множина є об'єднанням напівінтервалів, отже відкритою в прямій Зоргенфрея. Таким чином, топологія Зоргенфрея сільніша за стандартну (причому строго, оскільки самі напівінтервали не є відкритими у стандартній топології). Також цікавим є те, що в цій топології напівінтервали є не лише відкритими (як елементи бази), але й замкненими: доповнення $\mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty) = \bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty} [-n, a) \cup \bigcup\limits_{n=n_1}^{\infty} [b, n)$ відкрите.

Для будь-якої $x \in \mathbb{R}$ зліченна сукупність $\left\{[x, x + \frac{1}{n})\right\}_{n=1}^{\infty}$ є базою топології Зоргенфрея в $x$ (перевірте це!), тому пряма Зоргенфрея задовольняє першій аксіомі зліченності. З іншого боку, будь-яка база її топології для кожної $x \in \mathbb{R}$ повинна містити $V_x$ таку, що $x \in V_x \subset [x, x + 1)$. Зокрема, $\min V_x = x$, а тому різним точкам відповідають різні множини: $V_x \neq V_y$ для $x \neq y$. З цього випливає, що потужність будь-якої бази топології Зоргенфрея не менша за потужність $\mathbb{R}$, тому у цієї топології немає не більш ніж зліченних баз. Таким чином, ми отримали ще один приклад простору, що задовольняє першій, але не другій аксіомі зліченності.

**Вправа 6.1.** Перевірити, що сімейство підмножин круга на площині, що складається з усіх його діаметрів і центра, є базою деякої топології.

**Означення 6.1.** Система $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ відкритих підмножин топологічного простору $(X, \mathcal{T})$ зветься *передбазою* його топології $\mathcal{T}$, якщо сукупність усіх скінченних перетинів множин із $\mathcal{C}$ є базою $\mathcal{T}$.

**Зауваження.** Тут під скінченними перетинами маються на увазі перетини лише непорожніх скінченних підсистем $\mathcal{C}$, тобто ми не можемо отримати $X$, перетнувши "нульову кількість множин".

**Приклад 6.2.** Будь-яка база $\mathcal{B}$ довільної топології $\mathcal{T}$ (зокрема сама $\mathcal{T}$) є також її передбазою, бо одноелементні перетини вже утворюють $\mathcal{B}$, а додавання інших перетинів (що є відкритими множинами) ніяк не впливає на властивість $\mathcal{B}$ бути базою.

**Приклад 6.3.** Для стандартної топології на прямій $\mathbb{R}$ система усіх напівнескінченних інтервалів

$$\mathcal{C} := \{(-\infty, a)\}_{a \in \mathbb{R}} \cup \{(a, +\infty)\}_{a \in \mathbb{R}}$$

утворює передбазу. Дійсно, скінченними перетинами множин із $\mathcal{C}$ є усі інтервали, що утворюють базу $\mathcal{B}$ з прикладу 4.2, а також самі напівнескінченні інтервали та порожня множина. Таким чином, отримаємо сукупність перетинів $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \{\varnothing\}$, що теж є базою стандартної топології, оскільки напівнескінченні інтервали у ній відкриті. Якщо утворити систему $\widetilde{\mathcal{C}}$, замінивши в $\mathcal{C}$ дійсні межі $a \in \mathbb{R}$ на раціональні $q \in \mathbb{Q}$, то теж отримаємо передбазу цієї топології (меншу і тепер зліченну), бо перетини утворять об'єднання бази $\widetilde{\mathcal{B}}$ з того ж прикладу, $\widetilde{\mathcal{C}}$ та порожньої множини.

**Приклад 6.4.** Аналогічним чином, для топології прямої Зоргенфрея система проміжків

$$\mathcal{D} \coloneqq \{(-\infty, a)\}_{a\in\mathbb{R}} \cup \{[a, +\infty)\}_{a\in\mathbb{R}}$$

є передбазою, оскільки їхні скінченні перетини – це об'єднання бази з прикладу 6.1, самої $\mathcal{D}$, множини якої відкриті у топології Зоргенфрея, а також порожньої множини.

**Твердження 6.1** (Критерій передбази)**.** *Нехай $X$ – множина, а $\mathcal{C}$ – якась сукупність її підмножин. Якщо $\mathcal{C}$ – передбаза деякої топології на $X$, то вона є покриттям $X$: $X = \bigcup\limits_{V\in\mathcal{C}} V$. І навпаки, якщо $\mathcal{C}$ є покриттям $X$, то на $X$ існує єдина топологія, передбазою якої є $\mathcal{C}$.*

**Доведення.** За означенням, скінченні перетини множин передбази $\mathcal{C}$ утворюють деяку базу $\mathcal{B}$ топології. Тоді кожна множина $U \in \mathcal{B}$ включається до деякої $V \in \mathcal{C}$. Оскільки $\mathcal{B}$ є покриттям $X$ за властивістю B1. теореми 6.1, ним є й $\mathcal{C}$:

$$X = \bigcup_{U\in\mathcal{B}} U \subset \bigcup_{V\in\mathcal{C}} V \subset X.$$

Тепер нехай $\mathcal{C}$ – покриття $X$. Побудуємо систему $\mathcal{B}$ підмножин $X$ з усіх перетинів непорожніх скінченних підсистем $\mathcal{C}$, тобто

$$\mathcal{B} \coloneqq \left\{\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right\}_{\{V_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{C},\, n\in\mathbb{N}}.$$

Покажемо, що $\mathcal{B}$ – база деякої топології на $X$, перевіривши умови теореми 6.1:

B1. За побудовою, $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, бо усі множини $V \in \mathcal{C}$ є перетинами відповідних одноелементних підсистем $\{V\} \subset \mathcal{C}$. Тому $\mathcal{B}$ теж буде покриттям $X$.

B2. Будь-які два елементи $\mathcal{B}$ мають вигляд $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$ та $\bigcap\limits_{j=1}^{m} W_j$ для підсистем $\{V_i\}_{i=1}^n$, $\{W_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{C}$. Тому їхній перетин є перетином усіх елементів скінченної сукупності $\{V_i\}_{i=1}^n \cup \{W_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{C}$, а отже й сам належить до системи $\mathcal{B}$.

Таким чином, існує топологія $\mathcal{T}$ на $X$ з базою $\mathcal{B}$, передбазою якої за означенням є $\mathcal{C}$. Нехай тепер $\mathcal{S}$ – якась інша топологія з передбазою $\mathcal{C}$. Тоді її базою повинна бути сукупність усіх скінченних перетинів множин із $\mathcal{C}$, тобто $\mathcal{B}$. Це означає, що $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ в силу теореми 6.1, що й дає потрібну нам єдиність.

■

**Приклад 6.5.** Якщо з передбази $\mathcal{C}$ стандартної топології $\mathbb{R}$, що описана у прикладі 6.3, прибрати "половину" множин, залишивши

$$\widehat{\mathcal{C}} := \{(a, +\infty)\}_{a\in\mathbb{R}}\,,$$

то ця система все ще буде покриттям $\mathbb{R}$, а отже утворюватиме передбазу деякої топології за попереднім твердженням. Будуючи базу $\mathcal{B}$ як у його доведенні та топологію $\mathcal{T}$ як у доведенні теореми 6.1, отримуємо $\mathcal{B} = \widehat{\mathcal{C}}$ і $\mathcal{T} = \widehat{\mathcal{C}} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$ – топологію напівнескінченних інтервалів, що (набагато) слабша за стандартну. Роблячи так само з "половиною"

$$\widehat{\mathcal{D}} := \{[a, +\infty)\}_{a\in\mathbb{R}}\,,$$

передбази топології Зоргенфрея з прикладу 6.4, що теж є покриттям, отримаємо базу $\widehat{\mathcal{D}}$ і топологію $\widehat{\mathcal{C}} \cup \widehat{\mathcal{D}} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$ (чому?), що сильніша за топологію напівнескінченних інтервалів, (набагато) слабша за топологію Зоргенфрея і непорівнювана зі стандартною.

**Вправа 6.2.** Показати, що якщо $\mathcal{C}$ – передбаза (зокрема база) топології $\mathcal{T}$ на множині $X$, то $\mathcal{T}$ – найслабша топологія на $X$, що містить $\mathcal{C}$. Тому інколи також говорять, що $\mathcal{T}$ *породжується* системою $\mathcal{C}$. Більш того, показати, що будь-яке покриття $\mathcal{C}$ множини $X$ з такою властивістю буде передбазою (але, взагалі кажучи, не базою) $\mathcal{T}$. Таким чином, отримали альтернативне означення передбази.

**Вправа 6.3.** Чи можна переформулювати другу аксіому зліченності у термінах передбази? А як щодо (перед)баз у точках і першої аксіоми зліченності?

# 7 Метричні простори

Важливим класом топологічних просторів є метричні простори, що дуже часто зустрічаються в геометрії, аналізі та застосуваннях математики – всюди, де виникає можливість тим чи іншим чином задати відстань між елементами деякої множини.

**Означення 7.1.** Нехай $X$ – довільна множина. *Метрикою* на $X$ називається відображення $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$, що задовольняє наступним умовам:

1. $\rho(x, y) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x = y$ (*невиродженість*).
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для будь-яких $x, y \in X$ (*симетричність*).
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для будь-яких $x, y, z \in X$ (*нерівність трикутника*).

Пара $(X, \rho)$ з множини та метрики на ній зветься *метричним простором*.

**Зауваження.** Тут $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ – традиційне позначення для множини невід'ємних дійсних чисел. Як і у випадку топологічного простору, якщо зрозуміло, про яку метрику на $X$ йдеться, ми будемо говорити просто про метричний простір $X$. Елементи метричного простору також називають його *точками*, а $\rho(x, y)$ – *відстанню* між точками $x$ та $y$.

**Приклад 7.1.** На довільній множині $X$ введемо $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ наступним чином:

$$\rho(x, y) := \left[\begin{array}{ll} 0, & \text{якщо } x = y; \\ 1, & \text{якщо } x \neq y. \end{array}\right.$$

Це відображення є метрикою. Дійсно, перші дві умови означення випливають з побудови, а нерівність трикутника можна перевірити, виписавши всі варіанти взаємного розташування трьох точок (зробіть це). Така метрика на $X$ зветься *дискретною*.

**Приклад 7.2.** Для $X = \mathbb{R}^n$ розглянемо сімейство відображень $\rho_p$, що параметризоване дійсним $p \in [1, +\infty)$ і визначене для $x = (x^1, \ldots, x^n)$ та $y = (y^1, \ldots, y^n)$ формулою

$$\rho_p(x, y) := \left( \sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Властивості невиродженості та симетричності випливають безпосередньо з цього означення. Зокрема, якщо $\rho_p(x, y) = 0$, то з невід'ємності доданків маємо $x^i = y^i$ для усіх $i$, а отже $x = y$. Нерівність трикутника тут є наслідком нерівності Мінковського, що доводиться в курсі аналіза (див., наприклад, [5, с. 154]). Отже, це метрики на $\mathbb{R}^n$. Метрика $\rho_1$ зветься *манхеттенською* (*вуличною*, *метрикою таксиста*), а $\rho_2$ – *евклідовою*. Крім перелічених, також розглянемо $\rho_\infty$, що визначена наступним чином:

$$\rho_\infty(x, y) \coloneqq \max\{|x^i - y^i|\}_{i=1}^n.$$

Знову невиродженість і симетричність випливають безпосередньо з побудови. Перевіримо нерівність трикутника: для будь-яких $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ та $i$ від 1 до $n$

$$|x^i - y^i| = |x^i - z^i + z^i - y^i| \leqslant |x^i - z^i| + |z^i - y^i| \leqslant \rho_\infty(x, z) + \rho_\infty(z, y).$$

Тоді й найбільше з цих значень $\rho_\infty(x, y) \leqslant \rho_\infty(x, z) + \rho_\infty(z, y)$.

Зауважимо, що при $n = 1$ (на прямій) всі ці метрики збігаються й дають $\rho_p(x, y) = |x - y|$, у т. ч. для $p = \infty$.

**Приклад 7.3.** Побудуємо метрику на множині $C[a, b]$ неперервних функцій на відрізку, використавши ідею, схожу до побудови $\rho_\infty$ у попередньому прикладі:

$$\rho(f, g) \coloneqq \max\{|f(x) - g(x)|\}_{x \in [a,b]}.$$

Цей максимум існує в силу теореми Веєрштрасса (далі у цьому курсі ми будемо розглядати її узагальнення, див. розділ 22). Властивості метрики перевіряються аналогічно до попереднього прикладу (зробіть це).

**Вправа 7.1.** Для довільного дійсного $p \in [1, +\infty)$ розглянемо множину $\ell_p$ дійсних послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ таких, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ збігається. Перевірити що на $\ell_p$

$$\rho(x, y) \coloneqq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

коректно визначене і задає метрику.

Перевірити також що на множині $\ell_\infty$ *обмежених* дійсних послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ (тобто тих, для яких існує $C$ таке, що $|x_n| \leqslant C$ для усіх $n$)

$$\rho(x, y) \coloneqq \sup\{|x_n - y_n|\}_{n=1}^\infty$$

коректно визначене і задає метрику. Пор. ці метрики з прикладом 7.2.

**Означення 7.2.** Нехай $(X, \rho)$ і $(Y, \sigma)$ – метричні простори. Відображення $f\colon X \to Y$ зветься

- *ізометрією*, якщо $f$ – бієкція, і для будь-яких $x, y \in X$

$$\sigma(f(x), f(y)) = \rho(x, y);$$

- *ліпшицевим* з *константою Ліпшиця* $C > 0$ (а також *нерозтягуючим* при $C = 1$), якщо для будь-яких $x, y \in X$

$$\sigma(f(x), f(y)) \leqslant C\rho(x, y);$$

- *біліпшицевою еквівалентністю*, якщо $f$ – бієкція, а $f$ і $f^{-1}$ – ліпшицеві.

**Зауваження.** Про відображення $f$ метричних просторів, яке задовольняє умові $\sigma(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$, говорять також, що воно *зберігає відстані між точками.* Зокрема, такі відображення ін'єктивні: з $f(x) = f(y)$ випливає $\rho(x, y) = \sigma(f(x), f(y)) = 0$, отже $x = y$ в силу невиродженості. Тому в означенні ізометрії достатньо вимагати лише сюр'єктивності відображення $f$. Якщо $f$ – ізометрія, то й $f^{-1}$ – ізометрія. Будь-яка ізометрія є біліпшицевою еквівалентністю, але, взагалі кажучи, не навпаки (приклад можна зайти нижче).

**Приклад 7.4.** Ізометрії $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ евклідового простору $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ на себе (рухи), як може бути відомо з курсів лінійної алгебри та геометрії (принаймні для $n \leqslant 3$), є в точності ізометричними афінними перетвореннями, тобто мають вигляд $f(x) = Ax + b$, де $A \in \mathrm{O}(n)$ – ортогональна матриця і $b \in \mathbb{R}^n$.

**Означення 7.3.** Метричні простори $(X, \rho)$ і $(Y, \sigma)$ звуться

- *ізометричними*, якщо існує ізометрія $f\colon X \to Y$;

- *біліпшицево еквівалентними*, якщо існує біліпшицева еквівалентність $f\colon X \to Y$.

Дві метрики $\rho$ і $\sigma$ на множині $X$ звуться *біліпшицево еквівалентними*, якщо *тотожне* відображення $id_X\colon X \to X$, що кожній точці $X$ ставить у відповідність її ж, є біліпшицевою еквівалентністю метричних просторів $(X, \rho)$ і $(X, \sigma)$.

**Твердження 7.1.** *Метрики $\rho$ та $\sigma$ на $X$ біліпшицево еквівалентні тоді й тільки тоді, коли існують $c, C > 0$ такі, що для будь-яких $x, y \in X$*

$$c\rho(x,y) \leqslant \sigma(x,y) \leqslant C\rho(x,y).$$

**Доведення.** Друга з цих нерівностей є просто умовою ліпшицевості для тотожного відображення $(X,\rho) \to (X,\sigma)$. Записуючи цю умову для оберненого відображення (теж, звичайно, тотожного), отримаємо першу нерівність.

■

**Вправа 7.2.** Показати, що усі еквівалентності з означення 7.3 дійсно є відношеннями еквівалентності (метричних просторів та метрик на множині відповідно).

**Вправа 7.3.** Метричний простір $(X,\rho)$ зветься *повним*, якщо у ньому будь-яка *фундаментальна* послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ (тобто така, що $\rho(x_n, x_m) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$) *збігається* (тобто існує $x \in X$ така, що $\rho(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, див. далі означення 13.1 і зауваження після нього). Перевірити, що якщо метричні простори біліпшицево еквівалентні (зокрема, ізометричні) і один з них повний, то й інший повний.

**Приклад 7.5.** Метрики $\rho_p$ на $\mathbb{R}^n$ з прикладу 7.2 біліпшицево еквівалентні для усіх $p \in [1,+\infty)$, а також $p = \infty$. Дійсно, для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}^n$ та $i$ від 1 до $n$ за побудовою $|x^i - y^i| \leqslant \rho_\infty(x,y)$, тому для усіх $p \in [1,+\infty)$

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant (n\rho_\infty(x,y)^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}\rho_\infty(x,y).$$

З іншого боку, оскільки $\rho_\infty(x,y)$ – це найбільше з $|x^i - y^i|$,

$$\rho_\infty(x,y) = (\rho_\infty(x,y)^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \rho_p(x,y).$$

Це дає потрібні нам згідно з твердженням 7.1 нерівності. Отже, кожна $\rho_p$ з $p \in [1,+\infty)$ еквівалентна $\rho_\infty$, тому вони еквівалентні й одна одній в силу транзитивності.

# 8 Метрична топологія

Тепер покажемо, що метричні простори дійсно є окремим випадком топологічних. Для цього спочатку розглянемо деякі корисні класи підмножин, що очевидним чином узагальнюють відповідні поняття евклідової геометрії:

**Означення 8.1.** Нехай $(X, \rho)$ – метричний простір, $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Підмножина $X$

- $B_\varepsilon(x) \coloneqq \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$ зветься *відкритою кулею* з центром у точці $x$ радіуса $\varepsilon$;
- $D_\varepsilon(x) \coloneqq \{y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant \varepsilon\}$ зветься *замкненою кулею* з центром у точці $x$ радіуса $\varepsilon$;
- $S_\varepsilon(x) \coloneqq \{y \in X \mid \rho(x, y) = \varepsilon\}$ зветься *сферою* з центром у точці $x$ радіуса $\varepsilon$.

**Зауваження.** Очевидно, замкнена куля – це диз'юнктне об'єднання відкритої кулі та сфери з тими ж центром і радіусом. Зауважимо також, що $B_\varepsilon(x) \subset B_\delta(x)$ для $\varepsilon \leqslant \delta$ – це безпосередньо випливає з означення. Так само для замкнених куль (але не для сфер).

Наступне означення узагальнює стандартну топологію прямої:

**Означення 8.2.** *Метричною топологією* метричного простору $(X, \rho)$ (або метрики $\rho$) зветься сукупність його підмножин

$$\mathcal{T} \coloneqq \{U \subset X \mid \forall\, x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \subset U\}.$$

Якщо для топологічного простору $(X, \mathcal{T})$ існує така метрика $\rho$ на $X$, що $\mathcal{T}$ –метрична топологія $\rho$, то цей простір зветься *метризовним.*

Доведемо коректність цього означення.

**Твердження 8.1.** *Метрична топологія є топологією на $X$. Сукупність усіх відкритих куль $(X, \rho)$ є її базою.*

**Доведення.** Перевіримо виконання аксіом топології.

1. Для деякої сукупності підмножин $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$ і довільної точки $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, оскільки $x \in U_\alpha$ для деякого індекса $\alpha \in A$, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$. Тому $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

2. Для скінченної сукупності підмножин $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$ і довільної $x \in \bigcap\limits_{i=1}^n U_i$ маємо $x \in U_i$ для кожного $i = \overline{1, n}$. Тому для кожного $i$ існує таке $\varepsilon_i > 0$, що $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$. Покладемо $\varepsilon \coloneqq \min\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n > 0$. Тоді для усіх $i = \overline{1, n}$ виконується $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$, тому $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap\limits_{i=1}^n U_i$, отже $\bigcap\limits_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

3. Для порожньої множини умова виконується тривіально; для будь-якої $x \in X$ достатньо взяти $B_1(x) \subset X$, тому $X \in \mathcal{T}$.

Згідно з вправою 8.1 нижче, відкриті кулі належать до $\mathcal{T}$. Їх сукупність тоді задовольняє означенню бази $\mathcal{T}$ за побудовою цієї топології.

■

**Зауваження.** Отже, множина відкрита відносно метричної топології тоді й тільки тоді, коли кожна її точка входить до неї з деякою відкритою кулею з центром у цій точці. У подальшому вважатимемо усі метричні простори наділеними цією топологією.

Зауважимо також, що доведення вище повністю повторює доведення для стандартної топології прямої. Можна було провести його іншим способом, застосувавши критерій бази до сукупності відкритих куль (зробіть це).

**Вправа 8.1.** Відносно метричної топології відкриті кулі є відкритими множинами, а замкнені кулі та сфери – замкненими.

**Твердження 8.2.** *Метричні топології біліпшицево еквівалентних метрик співпадають.*

**Доведення.** Отже, нехай $\rho$ та $\sigma$ – біліпшицево еквівалентні метрики на множині $X$. В силу твердження 7.1, тоді існують $c, C > 0$ такі, що для будь-яких $x, y \in X$

$$c\rho(x,y) \leqslant \sigma(x,y) \leqslant C\rho(x,y).$$

Будемо позначати відкриті кулі цих метрик через $B^\rho_\varepsilon(x)$ і $B^\sigma_\varepsilon(x)$ відповідно. Тоді з першої нерівності вище маємо, що $B^\sigma_{c\varepsilon}(x) \subset B^\rho_\varepsilon(x)$ для будь-яких $x \in X$ і $\varepsilon > 0$, бо з $y \in B^\sigma_{c\varepsilon}(x)$ випливає

$$\rho(x,y) \leqslant \frac{\sigma(x,y)}{c} < \varepsilon,$$

тобто $y \in B^\rho_\varepsilon(x)$. Аналогічно, друга нерівність означає, що $B^\rho_\varepsilon(x) \subset B^\sigma_{C\varepsilon}(x)$ для усіх $x$ і $\varepsilon$.

Нехай тепер $\mathcal{T}$ і $\mathcal{S}$ – метричні топології $\rho$ і $\sigma$ відповідно. Для кожної $U \in \mathcal{T}$ і будь-якої $x \in U$ згідно з означенням існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B^\rho_\varepsilon(x) \subset U$. Згідно з показаним вище, тоді й $B^\sigma_{c\varepsilon}(x) \subset B^\rho_\varepsilon(x) \subset U$. Це доводить, що $U \in \mathcal{S}$. Отже, $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$. Аналогічно доводиться, що $\mathcal{S} \prec \mathcal{T}$, тому $\mathcal{T} = \mathcal{S}$.

■

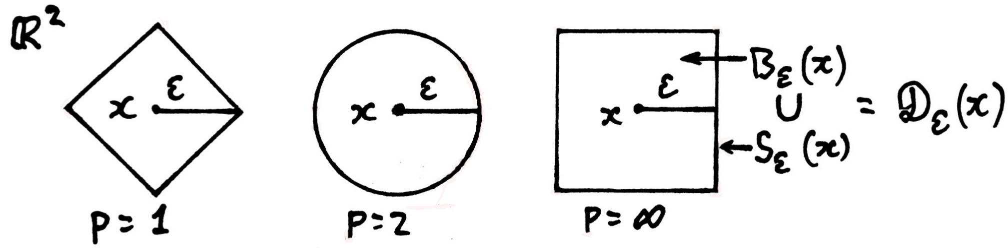
**Приклад 8.1.** Для дискретної метрики на множині $X$ згідно з означеннями маємо

$$B_\varepsilon(x) = \left[ \begin{array}{ll} \{x\}, & \text{якщо } 0 < \varepsilon \leqslant 1; \\ X, & \text{якщо } \varepsilon > 1. \end{array} \right.$$

Тому для кожної $x \in X$ одноточкова множина $\{x\} = B_1(x) \subset \{x\}$, тобто усі $\{x\}$ є відкритими, а тоді й усі підмножини $X$ відкриті як об'єднання одноточкових. Отже, відповідна метрична топологія є дискретною. До речі, як виглядають замкнені кулі та сфери цієї метрики?

**Приклад 8.2.** Повернемося до $X = \mathbb{R}^n$. При $n = 1$ метрика $\rho_p(x, y) = |x - y|$ (одна й та сама для усіх $p$) дає $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, $D_\varepsilon(x) = [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, $S_\varepsilon(x) = \{x - \varepsilon, x + \varepsilon\}$. Згідно з означенням, відповідна метрична топологія – це стандартна топологія $\mathbb{R}$.

Уявлення про різні $\rho_p$ при більших $n$ дає наступна ілюстрація куль площини $\mathbb{R}^2$ для $p = 1$, $p = 2$ і $p = \infty$:




У прикладі 7.5 ми показали, що усі ці метрики біліпшицево еквівалентні, а тому згідно з твердженням 8.2 породжують одну й ту саму метричну топологію. Вона зветься *стандартною* (*природною*, *натуральною*, *евклідовою*) топологією $\mathbb{R}^n$. При цьому з твердження 8.1 випливає, що відкриті кулі різних метрик $\rho_p$ утворюють різні бази цієї топології. Можна розглядати й інші бази, наприклад, у $\mathbb{R}^2$ не відкриті круги або квадрати, а відкриті прямокутники (чому?).

**Твердження 8.3.** *Для будь-якого метричного простору* $(X, \rho)$ *і будь-якої його точки* $x \in X$ *відкриті кулі* $\left\{B_{\frac{1}{n}}(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *складають зліченну базу метричної топології в* $x$. *Тому цей простір задовольняє першій аксіомі зліченності.*

**Доведення.** Якщо $U \ni x$ – відкрита, то згідно з означенням існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B_\varepsilon(x) \subset U$. Оберемо натуральне $n$ таке, що $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Тоді $x \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_\varepsilon(x) \subset U$.

■

**Зауваження.** Зокрема, щоб топологічний простір був метризовним, він повинен задовольняти першій аксіомі зліченності. Тому, наприклад, незліченна множина з кофінітною топологією не є метризовною в силу вправи 5.2. Приклади евклідової метрики на прямій та дискретної метрики на незліченній множині демонструють, що метричні простори можуть як задовольняти, так і не задовольняти другій аксіомі зліченності.

**Вправа 8.2.** Показати, що відкриті кулі будь-якої з метрик $\rho_p$ з центрами в точках з раціональними координатами та радіусами вигляду $\frac{1}{m}$

$$\mathcal{B} \coloneqq \left\{ B_{\frac{1}{m}}(x) \right\}_{x \in \mathbb{Q}^n,\, m \in \mathbb{N}}$$

утворюють зліченну базу стандартної топології $\mathbb{R}^n$, отже цей простір задовольняє другій аксіомі зліченності й для довільного $n$.

# 9 Прообраз топології. Індукована топологія

Тут ми продовжимо знайомитися зі способами побудови топологій.

**Означення 9.1.** Нехай $X$ – деяка множина, $(Y, \mathcal{T})$ – топологічний простір, а $f\colon X \to Y$ – відображення. *Прообразом* топології $\mathcal{T}$ під дією $f$ назвемо сукупність підмножин $X$, що складається з прообразів елементів $\mathcal{T}$ під дією $f$:

$$f^{-1}(\mathcal{T}) \coloneqq \{f^{-1}(V) \subset X\}_{V \in \mathcal{T}}.$$

**Твердження 9.1.** *Система $f^{-1}(\mathcal{T})$ є топологією на $X$.*

**Доведення.** Перевіримо виконання означення топології.

1. Нехай $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset f^{-1}(\mathcal{T})$. Тоді $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$, де $V_\alpha \in \mathcal{T}$, для кожного $\alpha \in A$. Із загальної властивості прообразів маємо

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(V_\alpha) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha\right) \in f^{-1}(\mathcal{T}),$$

бо $\bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathcal{T}$.

2. Аналогічно, для скінченної $\{U_i\}_{i=1}^n \subset f^{-1}(\mathcal{T})$ маємо $U_i = f^{-1}(V_i)$, де $V_i \in \mathcal{T}$, для кожного $i = \overline{1, n}$, і з властивості прообразів

$$\bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(V_i) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n V_i\right) \in f^{-1}(\mathcal{T}),$$

оскільки $\bigcap\limits_{i=1}^n V_i \in \mathcal{T}$.

3. Очевидно, $\varnothing = f^{-1}(\varnothing)$ і $X = f^{-1}(Y)$ належать до $f^{-1}(\mathcal{T})$.

$\blacksquare$

**Зауваження.** Розглянемо частковий випадок, коли $X$ – підмножина $Y$ (де $(Y, \mathcal{T})$, як і раніше, є топологічним простором), а $f = i\colon X \to Y$ – формальне *включення*, тобто відображення, що кожній точці $X$ ставить у відповідність її ж, але вже як точку $Y$. Прообразами підмножин $V \subset Y$ тоді будуть їхні перетини з $X$: $i^{-1}(V) = X \cap V$. Дійсно, належність точки підмножини $X$ до обох частин цієї рівності означає просто, що вона належить також і до $V$.

**Наслідок 9.1.** *Сукупність підмножин, що є перетинами з $X$ відкритих підмножин $Y$,*

$$i^{-1}(\mathcal{T}) = \{U \subset X \mid \exists V \in \mathcal{T}\colon U = X \cap V\}$$

*є топологією на $X \subset Y$.*

**Означення 9.2.** Говорять, що топологія $i^{-1}(\mathcal{T})$ *індукована* на $X$ топологією $\mathcal{T}$. При цьому топологічний простір $(X, i^{-1}(\mathcal{T}))$ називається (топологічним) *підпростором* простору $(Y, \mathcal{T})$.

**Зауваження.** У подальшому, якщо не обумовлене інше, ми будемо вважати, що на довільній підмножині топологічного простору розглядається саме індукована топологія, і будемо говорити про властивості цієї топології (властивості топологічного підпростору) як про властивості підмножини.

**Твердження 9.2.** *Якщо $\mathcal{B}$ – база топології $\mathcal{T}$ на $Y$ (відповідно, база $\mathcal{T}$ у точці $x \in X \subset Y$), то*

$$i^{-1}(\mathcal{B}) = \{X \cap V\}_{V \in \mathcal{B}}$$

*є базою топології, що індукована $\mathcal{T}$ на $X \subset Y$ (відповідно, базою індукованої топології у $x$).*

**Доведення.** Це безпосередньо випливає з означень індукованої топології та бази. Будь-яка підмножина $X$, що відкрита відносно індукованої топології, має вигляд $X \cap U$, де $U \in \mathcal{T}$. Оскільки довільна точка $x \in X \cap U$ належить до $U$, існує $V \in \mathcal{B}$ така, що $x \in V \subset U$. Але тоді виконується і $x \in X \cap V \subset X \cap U$, оскільки $x \in X$. Аналогічно для бази у точці.

$\blacksquare$

**Наслідок 9.2.** *Якщо топологічний простір задовольняє першій (відповідно, другій) аксіомі зліченності, то й будь-який його підпростір задовольняє першій (відповідно, другій) аксіомі зліченності.*

**Доведення.** Дійсно, якщо $\mathcal{B}$ у минулому твердженні не більш ніж зліченна, то такою є й $i^{-1}(\mathcal{B})$.

■

**Зауваження.** Інколи про властивості, що зберігаються при переході до підпростору (як у попередньому наслідку), говорять, що вони *наслідуються*. Корисно у якості вправи перевіряти, чи це так, для кожної з властивостей (інваріантів) топологічних просторів, що будуть виникати у подальшому.

**Приклад 9.1.** Нехай $Y = \mathbb{R}$ зі стандартною топологією. З опису відкритих підмножин цього простору у теоремі 1.1 випливає, що, наприклад, у напівінтервалі $X = [a, b)$ з індукованою топологією відкритими будуть диз'юнктні об'єднання не більш ніж зліченної кількості проміжків вигляду $[a, c)$ (не більше одного), $(d, e)$ і $(f, b)$ (не більше одного). Зауважимо, що проміжки першого з цих типів не є відкритими в топології прямої.

Для підпростору $X = \mathbb{Z}$ прямої індукована топологія є дискретною, оскільки для кожної $x \in \mathbb{Z}$ одноточкова підмножина $\{x\} = \mathbb{Z} \cap (x-1, x+1)$ є відкритою. У вихідній топології прямої такі підмножини замкнені, але не відкриті.

**Приклад 9.2.** Визначимо для кожного цілого невід'ємного $n$ *стандартну $n$-вимірну сферу* як сферу метричного простору $(\mathbb{R}^{n+1}, \rho_2)$ радіуса 1 з центром у початку координат:

$$S^n \coloneqq S_1(0) = \left\{ x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1 \right\}.$$

Пояснення того, чому ця сфера саме $n$-вимірна, буде дане у розділі 29. У якості топології на $S^n$ оберемо індуковану стандартною топологією $\mathbb{R}^{n+1}$. З тверджень 8.1 і 9.2 тоді випливає, що базу цієї топології утворюють перетини зі сферою відкритих куль будь-якої з метрик $\rho_p$. Зокрема, для кола (одновимірної сфери) $S^1$ це відкриті дуги, що є перетинами відкритих евклідових кругів $\mathbb{R}^2$ з колом. Для двовимірної сфери $S^2$ довільний елемент бази можна описати як "відкритий криволінійний круг" у сфері, тобто одну з двох частин, на яку $S^2$ ділить пласке коло, що у ній лежить (без точок самого кола), і яка є перетином з $S^2$ відритої евклідової кулі $\mathbb{R}^3$. Аналогічний опис має місце й для довільної вимірності $n$.

**Вправа 9.1.** Показати, що підмножина $S^1$ є відкритою тоді й тільки тоді, коли вона є диз'юнктним об'єднанням не більш ніж зліченної кількості відкритих дуг (аналогічно до теореми 1.1).

**Зауваження.** З означення метрики випливає, що для будь-якого метричного простору $(Y, \rho)$ і будь-якої його підмножини $X \subset Y$ обмеження $\rho$ на $X \times X$ буде метрикою на $X$, тому пару $(X, \rho|_{X\times X})$ можемо назвати *метричним підпростором* $(Y, \rho)$. Але на ньому існують дві апріорі різні топології!

**Вправа 9.2.** Показати, що метрична топологія $(X, \rho|_{X\times X})$ збігається з топологією, що індукована на $X$ метричною топологією $(Y, \rho)$.

# 10 Розташування точок відносно множини

Наведемо кілька означень, що знадобляться нам для більш детального дослідження підмножин топологічних просторів:

**Означення 10.1.** Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір і $A \subset X$ – його підмножина. Точка $x \in X$ зветься

- *внутрішньою точкою* $A$, якщо існує відкритий окіл $U \ni x$, що міститься в $A$: $x \in U \subset A$; множина усіх внутрішніх точок $A$ називається *внутрішністю* $A$ і позначається $\operatorname{Int} A$ або $\mathring{A}$;

- *точкою дотику* $A$, якщо будь-який відкритий окіл $U \ni x$ перетинається з $A$: $U \cap A \neq \varnothing$; множина усіх точок дотику $A$ називається *замиканням* $A$ і позначається $\overline{A}$ або $\operatorname{Cl} A$;

- *граничною точкою* $A$, якщо будь-який відкритий окіл $U \ni x$ містить хоча б одну точку $A$, відмінну від $x$: $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$; множина усіх граничних точок $A$ називається *похідною множиною* $A$ і позначається $A'$;

- *межовою точкою* $A$, якщо будь-який відкритий окіл $U \ni x$ містить точки як $A$, так і його доповнення: $U \cap A \neq \varnothing$ і $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$; множина усіх межових точок $A$ називається *межею* $A$ і позначається $\partial A$;

- *ізольованою точкою* $A$, якщо існує відкритий окіл $U \ni x$, перетин якого з $A$ складається з самої цієї точки: $U \cap A = \{x\}$.

**Зауваження.** Зокрема, усі внутрішні та ізольовані точки належать до $A$, а ось інші типи точок можуть як належати до $A$, так і ні, як побачимо у наведених нижче прикладах. Також з означень випливає, що $x$ – внутрішня точка $A$ тоді й тільки тоді, коли $A$ – окіл $x$. Як зауважувалося вище, в усіх цих означеннях відкриті околи $U \ni x$ можна поміняти на довільні (перевірте це).

**Вправа 10.1.** Усі перелічені означення залишаться вірними (тобто позначатимуть ті самі об'єкти), якщо замість відкритих околів $U \ni x$ розглядати елементи будь-якої бази топології $\mathcal{T}$, що містять $x$.

Наступні приклади дозволять нам краще опанувати ці поняття.

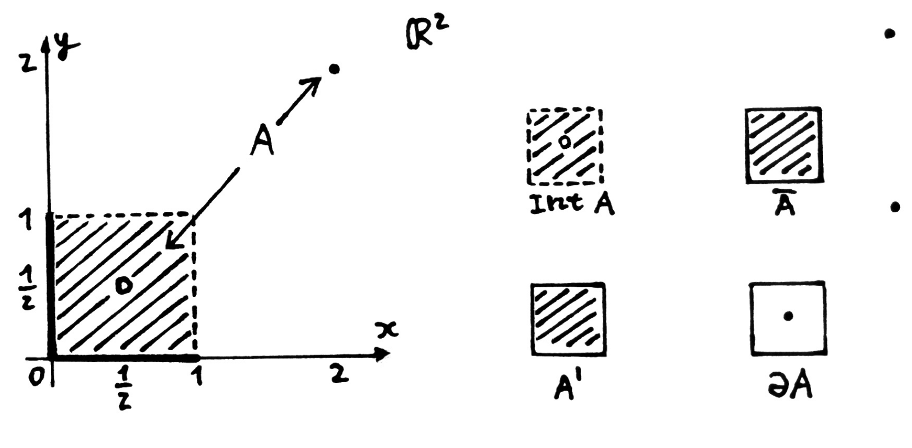
**Приклад 10.1.** Розглянемо у $\mathbb{R}^2$ (зі стандартною топологією) множину

$$A \coloneqq ((0,1) \times (0,1)) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1) \times \{0\}) \cup \{(2,2)\} \setminus \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\},$$

що зображена на ілюстрації знизу зліва. Знайдемо для $A$ множини точок типів, що перелічені у означенні 10.1:

- $\operatorname{Int} A = ((0,1) \times (0,1)) \setminus \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ (відкритий квадрат без точки);
- $\overline{A} = ([0,1] \times [0,1]) \cup \{(2,2)\}$ (замкнений квадрат і точка);
- $A' = [0,1] \times [0,1]$ (замкнений квадрат);
- $\partial A = (\{0,1\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0,1\}) \cup \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (2,2)\right\}$ (сторони квадрата та дві точки);
- єдиною ізольованою точкою $A$ є $(2,2)$.

Ці множини можна побачити на наступному рисунку справа:



**Приклад 10.2.** У просторі $X$ з дискретною топологією одноточкова множина $\{x\}$ є відкритим околом будь-якої точки $x \in X$, звідки нескладно вивести, що для довільної підмножини $A \subset X$

$$\operatorname{Int} A = \overline{A} = A,\ A' = \partial A = \varnothing,$$

усі точки $A$ ізольовані. Вигляд внутрішності та замикання $A$ також випливає з твердження 10.1 нижче та того, що ця множина є одночасно відкритою та замкненою.

**Приклад 10.3.** Якщо $A \subset \mathbb{R}$ – проміжок прямої зі стандартною топологією з кінцями у дійсних точках $a < b$, тобто $A = (a, b)$, $[a, b]$, $[a, b)$ або $(a, b]$, то

$$\operatorname{Int} A = (a, b),\ \overline{A} = A' = [a, b],\ \partial A = \{a, b\},$$

ізольованих точок у $A$ немає. Це випливає з того, що у точок $(a, b)$ завжди є відкритий окіл (наприклад, вигляду $(x - \varepsilon, x - \varepsilon)$), що міститься в $A$, у точок $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ – окіл, що міститься в $\mathbb{R} \setminus A$, а ось у $a$ і $b$ будь-який окіл перетинає обидві ці множини, навіть якщо викинути з нього саму точку. Аналогічні твердження вірні й для напівнескінченних проміжків.

Усі точки підмножини цілих чисел $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ цього ж простору є ізольованими (і тому не є внутрішніми), бо $\{x\} = \mathbb{Z} \cap (x - 1, x + 1)$ для кожної $x \in \mathbb{Z}$. При цьому у будь-якої $x \notin \mathbb{Z}$ є окіл, що не перетинається з $\mathbb{Z}$, тому точками дотику і межовими є в точності точки $\mathbb{Z}$, і жодна точка не є граничною. Отже,

$$\operatorname{Int} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}' = \varnothing,\ \overline{\mathbb{Z}} = \partial \mathbb{Z} = \mathbb{Z}.$$

Нарешті, з властивостей множини раціональних чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, а саме з того, що у будь-якому околі будь-якої точки $\mathbb{R}$ є як раціональні, так й ірраціональні точки, випливає, що

$$\operatorname{Int} \mathbb{Q} = \varnothing,\ \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}' = \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R},$$

а ізольованих точок немає. Ті ж властивості має множина ірраціональних чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

**Приклад 10.4.** З іншого боку, у прямій Зоргенфрея напівінтервали $[a, b)$ є відкритими та замкненими, зокрема, $[x, x + \varepsilon)$ є відкритим околом $x$ для будь-якого $\varepsilon > 0$. Звідси випливає, що

$$\operatorname{Int} [a, b) = \overline{[a, b)} = [a, b)' = [a, b),\ \partial [a, b) = \varnothing,$$

ізольованих точок немає.

**Вправа 10.2.** Описати внутрішність, замикання, похідну множину, межу та ізольовані точки довільної підмножини $\mathbb{R}$ з топологією напівнескінченних інтервалів.

**Твердження 10.1** (Властивості внутрішності, замикання і межі)**.** *Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір, $A, B \subset X$.*

1. *Внутрішність $A$ є об'єднанням усіх відкритих підмножин $X$, що містяться в $A$:*
$$\operatorname{Int} A = \bigcup_{U \subset A,\, U \in \mathcal{T}} U.$$

2. *Внутрішність $A$ є найбільшою за включенням відкритою підмножиною $X$, що міститься в $A$.*

3. *$A$ відкрита тоді й тільки тоді, коли $A = \operatorname{Int} A$.*

4. *Якщо $A \subset B$, то $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$ (монотонність внутрішності).*

5. *Замикання $A$ є перетином усіх замкнених підмножин $X$, що містять $A$:*
$$\overline{A} = \bigcap_{V \supset A,\, X \setminus V \in \mathcal{T}} V.$$

6. *Замикання $A$ є найменшою за включенням замкненою підмножиною $X$, що містить $A$.*

7. *$A$ замкнена тоді й тільки тоді, коли $A = \overline{A}$.*

8. *Якщо $A \subset B$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$ (монотонність замикання).*

9. *$\overline{A} = A \cup A' = A \cup \partial A = \operatorname{Int} A \sqcup \partial A$.*

10. *$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.*

11. *$X = \operatorname{Int} A \sqcup \overline{X \setminus A} = \overline{A} \sqcup \operatorname{Int}(X \setminus A)$.*

**Доведення.**

1. Дійсно, належність точки $x \in X$ до такого об'єднання еквівалентна існуванню відкритої $U$ такої, що $x \in U \subset A$. Але це й означає, що $x \in \operatorname{Int} A$.

2. випливає з 1.: $\operatorname{Int} A$ відкрита як об'єднання відкритих підмножин, міститься в $A$ як об'єднання підмножин $A$, і будь-яка відкрита $U \subset A$ включається до об'єднання з 1., а тому $U \subset \operatorname{Int} A$. Це й значить, що $\operatorname{Int} A$ – найбільша за включенням серед таких множин.

3. $\Leftarrow$ Достатність випливає з того, що $\operatorname{Int} A$ відкрита згідно з 2.

   $\Rightarrow$ Перевіримо необхідність: якщо $A$ відкрита, то, оскільки $A \subset A$, $A \subset \operatorname{Int} A$ в силу 2. З іншого боку, $\operatorname{Int} A \subset A$ завжди за означенням. Тому $A = \operatorname{Int} A$.

4. Для будь-якої $x \in \operatorname{Int} A$ існує відкрита $U$ така, що $x \in U \subset A \subset B$, тому $x \in \operatorname{Int} B$.

5. Доведемо еквівалентну рівність доповнень до цих множин.

   Дійсно, якщо точка $x \in X$ не належить до вказаного перетину, то існує замкнена $V$ така, що $A \subset V$ і $x \notin V$. Тоді $U \coloneqq X \setminus V$ – відкрита, $x \in U$ і $U \cap A = \varnothing$. Це означає, що $x$ не є точкою дотику $A$: $x \notin \overline{A}$.

   І навпаки: з $x \notin \overline{A}$ випливає існування відкритої $U \ni x$ такої, що $U \cap A = \varnothing$, тоді $V \coloneqq X \setminus U$ – замкнена і має властивості $x \notin V$ і $A \subset V$, отже $x$ не належить до перетину.

6. випливає з 5. так само, як 2. з 1. (перевірте це).

7. доводиться за допомогою 6. так само, як 3. доводиться за допомогою 2. (перевірте це).

8. Доведемо еквівалентне включення доповнень $X \setminus \overline{B} \subset X \setminus \overline{A}$. Дійсно, якщо $x \notin \overline{B}$, то існує відкрита $U \ni x$ така, що $U \cap B = \varnothing$. Але тоді й $U \cap A \subset U \cap B = \varnothing$. Тому $x \notin \overline{A}$.

9. Перш за все, усі множини $A$, $A'$, $\partial A$ і $\operatorname{Int} A \subset A$ включаються до $\overline{A}$, бо з належності $x \in X$ кожній з них випливає, що будь-який відкритий окіл цієї точки має непорожній перетин з $A$ (у випадку $x \in A$ це принаймні сама $x$). Тому різноманітні об'єднання цих множин теж є підмножинами $\overline{A}$. З іншого боку:

   - Якщо $x \in \overline{A}$, але $x \notin A$, то у кожній відкритій $U \ni x$ повинна міститися якась точка $A$ крім $x$, тому $x \in A'$. Отже, $\overline{A} \subset A \cup A'$.
   - Знову ж, якщо $x \in \overline{A}$, але $x \notin A$, то у кожній відкритій $U \ni x$ міститься якась точка $A$ і точка $x \in X \setminus A$, тому $x \in \partial A$. Отже, $\overline{A} \subset A \cup \partial A$.
   - Якщо $x \in \overline{A}$, але $x \notin \operatorname{Int} A$, то у кожній відкритій $U \ni x$ міститься якась точка $A$, і $U \not\subset A$, тому $U$ містить якусь точку $X \setminus A$, отже $x \in \partial A$. Таким чином, $\overline{A} \subset \operatorname{Int} A \cup \partial A$.

Нарешті, якщо $x \in \operatorname{Int} A$, то деякий її відкритий окіл міститься в $A$, тому не містить точок $X \setminus A$, отже $x \notin \partial A$. Тому $\operatorname{Int} A \cap \partial A = \varnothing$, і останнє об'єднання у формулюванні цього пункту є диз'юнктним.

10. Це просто переформулювання означення: $x \in \partial A$ означає, що для будь-якої відкритої $U \ni x$ перетини $U \cap A \neq \varnothing$ (тобто $x \in \overline{A}$) і $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$ (тобто $x \in \overline{X \setminus A}$).

11. Якщо $x \notin \operatorname{Int} A$, то $U \not\subset A$ для кожної відкритої $U \ni x$, тобто $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$, отже $x \in \overline{X \setminus A}$. Таким чином, $X = \operatorname{Int} A \cup \overline{X \setminus A}$. Крім того, якщо $x \in \operatorname{Int} A$, то існує відкрита $U \ni x$ така, що $U \subset A$, тому $U \cap (X \setminus A) = \varnothing$, отже $x \notin \overline{X \setminus A}$. Звідси $\operatorname{Int} A \cap \overline{X \setminus A} = \varnothing$, тому об'єднання тут є диз'юнктним. Другу рівність отримуємо з першої, замінивши $A$ на $X \setminus A$ (і навпаки).

■

З цих основних властивостей можна виводити й інші, наприклад:

**Вправа 10.3.** Показати, що множина $A$ є відкритою тоді й тільки тоді, коли вона не перетинається зі своєю межею: $A \cap \partial A = \varnothing$; і замкненою тоді й тільки тоді, коли вона містить свою межу: $A \supset \partial A$.

## 11 Властивості щільності та сепарабельність

**Означення 11.1.** Підмножина $A$ топологічного простору $X$ зветься *всюди щільною* в $X$, якщо $\overline{A} = X$, і *ніде не щільною* в $X$, якщо $\operatorname{Int} \overline{A} = \varnothing$.

**Зауваження.** З означення замикання випливає, що $A$ є всюди щільною тоді й тільки тоді, коли має непорожній перетин з будь-яким відкритим околом будь-якої точки $X$, тобто з будь-якою непорожньою відкритою підмножиною $X$. Втім, тут достатньо обмежитися множинами з будь-якої бази (перевірте це). Зв'язок між введеними поняттями сформульовано у наступній вправі:

**Вправа 11.1.** Показати, що множина $A$ ніде не щільна тоді й тільки тоді, коли $\operatorname{Int}(X \setminus A)$ всюди щільна (підказка: використати пункт 11. у твердженні 10.1). Вивести з цього, що відкрита множина всюди щільна тоді й тільки тоді, коли її доповнення ніде не щільне.

**Означення 11.2.** Топологічний простір $X$ називається *сепарабельним*, якщо в $X$ існує не більш ніж зліченна всюди щільна підмножина.

**Приклад 11.1.** З прикладу 10.2 випливає, що єдиною всюди щільною підмножиною простору $X$ з дискретною топологією є $X$, а єдиною ніде не щільною – $\varnothing$. Зокрема, такий простір сепарабельний тоді й тільки тоді, коли множина $X$ не більш ніж зліченна.

**Приклад 11.2.** Як було встановлено у прикладі 10.3, у $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, тому раціональні та ірраціональні числа утворюють всюди щільні підмножини, що доповнюють одна одну. Оскільки перша з них є зліченною, цей простір сепарабельний. З іншого боку, $\operatorname{Int} \overline{\mathbb{Z}} = \operatorname{Int} \mathbb{Z} = \varnothing$, тобто цілі числа утворюють ніде не щільну підмножину.

**Приклад 11.3.** У $\mathbb{R}^n$ зі стандартною топологією множина $\mathbb{Q}^n$ точок з раціональними координатами зліченна і всюди щільна. Дійсно, будь-який відкритий окіл $U$ будь-якої точки $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ містить деякий елемент бази метричної топології метрики $\rho_\infty$ – куб

$$B_\varepsilon(x) = (x^1 - \varepsilon, x^1 + \varepsilon) \times \ldots \times (x^n - \varepsilon, x^n + \varepsilon),$$

де $\varepsilon > 0$. Оскільки для будь-якого $i$ від 1 до $n$ інтервал $(x^i - \varepsilon, x^i + \varepsilon)$ містить раціональне $q^i \in \mathbb{Q}$, точка $q \coloneqq (q^1, \ldots, q^n) \in \mathbb{Q}^n$ міститься у $B_\varepsilon(x) \subset U$. Отже, $\mathbb{R}^n$ сепарабельний. З цього і твердження 11.2 нижче випливатиме, що він задовольняє другій аксіомі зліченності.

Прикладами ніде не щільних пімножин $\mathbb{R}^n$ є скінченні, $\mathbb{Z}^n$ (аналогічно до випадку $n = 1$ у попередньому прикладі) і нетривіальні афінні підпростори, скажімо, прямі у площині, прямі та площини у тривимірному просторі (чому?).

Сепарабельність тісно пов'язана з аксіомами зліченності, тому зазвичай її теж відносять до цієї групи аксіом.

**Твердження 11.1.** *Якщо топологічний простір задовольняє другій аксіомі зліченності, то він є сепарабельним.*

**Доведення.** Отже, нехай $\mathcal{B}$ – не більш ніж зліченна база простору $X$. Занумеруємо її елементи: $\mathcal{B} = \{V_i\}_{i=1}^\infty$, де замість $\infty$ може стояти натуральне $n$. Для кожного $i$ тоді оберемо якусь точку $x_i \in V_i$. Тоді не більш ніж зліченна множина таких точок $A \coloneqq \{x_i\}$ є всюди щільною. Дійсно, для будь-якої $x \in X$ та відкритої $U \ni x$ існує $i$ таке, що $x \in V_i \subset U$, а отже $x_i \in V_i \subset U$, тобто $U \cap A \neq \varnothing$.

∎

**Вправа 11.2.** Показати, що обернене твердження, взагалі кажучи, невірне (навести контрприклад).

**Твердження 11.2.** *Метричний простір задовольняє другій аксіомі зліченності тоді й тільки тоді, коли він є сепарабельним.*

**Доведення.** В силу попереднього твердження, тут залишилося довести лише достатність. Отже, нехай $A$ – не більш ніж зліченна всюди щільна підмножина метричного простору $(X, \rho)$. Покажемо, що тоді зліченна система відкритих куль

$$\mathcal{B} := \left\{ B_{\frac{1}{n}}(y) \right\}_{y \in A,\, n \in \mathbb{N}}$$

є його базою. Дійсно, у будь-яку відкриту $U$ будь-яка точка $x \in U$ входить разом з відкритою кулею $B_\varepsilon(x)$ для деякого $\varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x) \subset U$. Оберемо натуральне $n$ таке, що $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Куля $B_{\frac{1}{n}}(x)$ повинна містити точку $y \in A$, бо є непорожньою відкритою множиною. Тоді

$$x \in B_{\frac{1}{n}}(y) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \subset B_{\varepsilon - \rho(x,y)}(y) \subset B_\varepsilon(x) \subset U,$$

де друге включення куль випливає з $\rho(x, y) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, а третє – з нерівності трикутника (перевірте це).

■

**Вправа 11.3.** Показати, що у метричному просторі $C[a, b]$ з прикладу 7.3 підмножина $\mathbb{Q}[x]$ поліномів з раціональними коефіцієнтами є зліченною і всюди щільною, тому цей простір сепарабельний.

**Вправа 11.4.** Показати, що метричні простори $\ell_p$ з вправи 7.1 сепарабельні для усіх $p \in [1, +\infty)$, а $\ell_\infty$ не є сепарабельним.

# 12 Неперервні відображення

Наступне означення визначає, які відображення топологічних просторів ми вважаємо "природними" для них.

**Означення 12.1.** Нехай $(X, \mathcal{T})$ і $(Y, \mathcal{S})$ – топологічні простори. Відображення $f\colon X \to Y$ зветься *неперервним*, якщо прообрази відкритих множин відкриті: $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ для будь-якої $V \in \mathcal{S}$.

Перш за все, встановимо зв'язок між цим поняттям і більш звичним завдяки курсу аналіза поняттям неперервності у точці.

**Означення 12.2.** Відображення топологічних просторів $f\colon X \to Y$ називається *неперервним у точці* $x \in X$, якщо для будь-якого відкритого околу її образу $V \ni f(x)$ існує її відкритий окіл $U \ni x$ такий, що $U \subset f^{-1}(V)$.

**Твердження 12.1.** *Відображення* $f\colon X \to Y$ *неперервне тоді й тільки тоді, коли воно неперервне у кожній точці* $x \in X$.

**Доведення.** $\underline{\Rightarrow}$ Для доведення неперервності у $x$ неперервного $f$ покладемо у означенні $U := f^{-1}(V)$. Це буде потрібний відкритий окіл $x$.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай $V \subset Y$ – довільна відкрита підмножина. Для будь-якої $x \in f^{-1}(V)$ відображення $f$ неперервне в $x$, отже існує відкрита $U_x$ така, що $x \in U_x \subset f^{-1}(V)$ Це означає, що $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} U_x$ – відкрита.

■

**Зауваження.** У означенні 12.1 можна замість відкритих множин використати замкнені (чому?). У означенні 12.2 умову $U \subset f^{-1}(V)$ можна замінити на еквівалентну $f(U) \subset V$. Як і в означеннях минулих розділів, відкриті околи у ньому можна замінити на довільні. Крім того, їх можна замінити на елементи довільних баз відповідних топологій у точках. Більш строго це означає наступне:

**Твердження 12.2.** *Нехай* $(X, \mathcal{T})$ *і* $(Y, \mathcal{S})$ *– топологічні простори,* $x \in X$, $\mathcal{B}$ *і* $\mathcal{C}$ *– бази* $\mathcal{T}$ *у* $x$ *і* $\mathcal{S}$ *у* $f(x)$ *відповідно. Відображення* $f\colon X \to Y$ *неперервне у точці* $x$ *тоді й тільки тоді, коли для будь-якої* $V \in \mathcal{C}$ *існує* $U \in \mathcal{B}$ *така, що* $f(U) \subset V$.

**Доведення.** $\underline{\Rightarrow}$ Будь-яка $V \in \mathcal{C}$ буде відкритим околом $f(x)$, тому згідно з означенням неперервності в $x$ існує відкрита $W \ni x$ така, що $f(W) \subset V$. З означення бази в точці, існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $U \subset W$. Тоді $f(U) \subset f(W) \subset V$.

$\underline{\Leftarrow}$ Аналогічно, для будь-якої відкритої $V \ni f(x)$ існує $W \in \mathcal{C}$ така, що $W \subset V$. За умовою тоді існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $f(U) \subset W \subset V$. При цьому $U$ буде відкритим околом $x$.

■

**Наслідок 12.1.** *Нехай* $(X, \rho)$ *і* $(Y, \sigma)$ *– метричні простори. Відображення* $f\colon X \to Y$ *неперервне у точці* $x \in X$ *тоді й тільки тоді, коли для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta > 0$ *таке, що* $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$.

**Доведення.** Випливає з попереднього твердження і того, що відкриті кулі з центром у $x$ утворюють базу метричної топології в $x$.

■

**Зауваження.** Включення куль у цьому формулюванні означає, що з $\rho(x, y) < \delta$ випливає $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Це вже звичне "епсилон-дельта" означення. Далі через $C(X, Y)$ позначатимемо множину неперервних відображень $X \to Y$.

**Вправа 12.1.** Показати, що відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів неперервне тоді й тільки тоді, коли $f^{-1}(V)$ відкрита для будь-якої $V \in \mathcal{C}$, де $\mathcal{C}$ – якась передбаза (зокрема база) топології $Y$.

**Приклад 12.1.** Для будь-яких просторів $X$ та $Y$ *постійне* відображення $f = y_0\colon X \to Y$, що кожній $x \in X$ ставить у відповідність одну й ту саму $f(x) = y_0$, неперервне, оскільки прообраз будь-якої множини $f^{-1}(V)$ – це або $\varnothing$ (якщо $y_0 \notin V$), або $X$ (якщо $y_0 \in V$).

**Приклад 12.2.** *Тотожне* відображення будь-якого простору $X$ на себе $f = id_X\colon X \to X$, що кожній $x \in X$ ставить у відповідність її ж ($id_X(x) = x$), є неперервним, бо $id_X^{-1}(V) = V$ для будь-якої $V$.

**Приклад 12.3.** Якщо $X$ має дискретну топологію, то $f \in C(X,Y)$ для будь-яких $Y$ і $f\colon X \to Y$, бо всі прообрази відкриті.

**Приклад 12.4.** Якщо $Y$ має антидискретну (тривіальну) топологію, то $f \in C(X,Y)$ для будь-яких $X$ і $f\colon X \to Y$, бо прообрази відкритих множин $f^{-1}(Y) = X$ і $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ відкриті.

**Вправа 12.2.** Як зміниться множина $C(X,Y)$, якщо послабити або посилити топологію $X$ або $Y$?

**Приклад 12.5.** Ліпшицеві відображення метричних просторів (зокрема ізометрії) неперервні у відповідних метричних топологіях. Дійсно, нехай у позначеннях наслідку 12.1 відображення $f\colon X \to Y$ має константу Ліпшиця $C > 0$: $\sigma(f(x), f(y)) \leqslant C\rho(x,y)$ для будь-яких $x, y \in X$. Це означає, що $f\left(B_{\frac{\varepsilon}{C}}(x)\right) \subset B_\varepsilon(f(x))$ для будь-якого $\varepsilon > 0$, тобто достатньо взяти $\delta \coloneqq \frac{\varepsilon}{C}$.

**Приклад 12.6.** Наслідок 12.1 означає, зокрема, що наше поняття неперервності в точці узагальнює означення неперервності функції багатьох змінних $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (зокрема $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) з курсу аналіза, якщо наділити $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}$ стандартними топологіями. Більш того, зберігаються звичні властивості функцій, навіть якщо розглянути більш загальну область визначення:

**Вправа 12.3.** Нехай $f, g \in C(X, \mathbb{R})$ – неперервні *функції* на довільному просторі $X$, тобто його відображення у $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією. Показати, що тоді $f+g$, $fg$, $\frac{f}{g}$ (остання – на області визначення з індукованою топологією, пор. з твердженням 12.4 нижче) також є неперервними.

**Вправа 12.4.** Нехай $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ – відображення довільного простору у $\mathbb{R}^n$ зі стандартною топологією, $f = (f^1, \dots, f^n)$, де $f^i\colon X \to \mathbb{R}$ – *координатні функції* $f$. Показати, що $f \in C(X, \mathbb{R}^n)$ тоді й тільки тоді, коли $f^i \in C(X, \mathbb{R})$ для усіх $i$.

**Зауваження.** З цих двох вправ випливає, що для будь-яких $f, g \in C(X, \mathbb{R}^n)$ і $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ лінійна комбінація $\lambda f + \mu g \in C(X, \mathbb{R}^n)$, тобто $C(X, \mathbb{R}^n)$ утворює векторний підпростір у векторному просторі $(\mathbb{R}^n)^X$ усіх відображень $X \to \mathbb{R}^n$.

**Твердження 12.3.** *Композиція неперервних відображень є неперервним відображенням: якщо $f \in C(Y, Z)$ і $g \in C(X, Y)$, то $f \circ g \in C(X, Z)$.*

**Доведення.** Дійсно, для будь-якої відкритої $V \subset Z$ маємо за означенням, що $f^{-1}(V) \subset Y$ відкрита, а отже й $(f \circ g)^{-1}(V) = g^{-1}(f^{-1}(V)) \subset X$ відкрита.

$\blacksquare$

**Твердження 12.4.** *Нехай $X, Y$ – топологічні простори, $A \subset X$ і $B \subset Y$ – їхні топологічні підпростори (тобто підмножини з індукованою топологією), $f \colon X \to Y$ таке, що $f(A) \subset B$. Якщо $f \in C(X, Y)$, то його обмеження $f|_A \in C(A, B)$.*

**Доведення.** За означенням індукованої топології, будь-яка відкрита підмножина $B$ має вигляд $B \cap V$, де $V$ – відкрита в $Y$. При цьому $(f|_A)^{-1}(B \cap V) = A \cap f^{-1}(V)$ відкрита в $A$, бо $f^{-1}(V)$ відкрита в $X$. Тому $f|_A$ неперервне.

$\blacksquare$

**Зауваження.** Іншими словами, неперервні відображення топологічних просторів індукують неперервні відображення їхніх підпросторів. Також неперервність можна використати для характеризації прообразу топології (зокрема індукованої топології), як показано у наступному твердженні. Зауважимо, що у частково впорядкованій множині існує не більше одного найменшого чи найбільшого елемента, тому подібні твердження дійсно визначають відповідну топологію однозначно і можуть слугувати у якості альтернативних означень (див. також вправу 6.2).

**Твердження 12.5.** *Нехай $f \colon X \to Y$ – відображення деякої множини $X$ у топологічний простір $(Y, \mathcal{T})$. Прообраз $f^{-1}(\mathcal{T})$ тоді є найслабшою топологією на $X$ з тих, у яких $f$ неперервне.*

**Доведення.** Ми вже знаємо, що $f^{-1}(\mathcal{T})$ – топологія. За її побудовою, $f^{-1}(V) \in f^{-1}(\mathcal{T})$ для будь-якої $V \in \mathcal{T}$, тобто $f$ дійсно є неперервним. Але якщо $f$ неперервне відносно будь-якої іншої топології $\mathcal{S}$ на $X$, то й для неї з означення неперервності матимемо $f^{-1}(V) \in \mathcal{S}$ для усіх $V \in \mathcal{T}$, тобто $f^{-1}(\mathcal{T}) \prec \mathcal{S}$.

$\blacksquare$

# 13 Границі та секвенційні означення

Наступне означення узагальнює ще одне класичне поняття аналіза.

**Означення 13.1.** Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ – послідовність у топологічному просторі $X$. Говорять, що вона *збігається* до точки $x \in X$ (або що $x$ – її *границя*), якщо для будь-якого відкритого околу $U \ni x$ існує натуральне $N$ таке, що $x_n \in U$ для будь-якого $n \geqslant N$.

**Зауваження.** Аналогічно до означень попереднього розділу, можна у якості $U$ брати довільні околи або множини з довільної бази в $x$ (перевірте це). Наприклад, використавши кулі $B_\varepsilon(x)$ для метричних просторів як у наслідку 12.1, отримаємо звичне "епсилон-означення" границі: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне $N$ таке, що $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ для будь-якого $n \geqslant N$. Тому збіжність послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ до точки $x$ у метричному просторі еквівалентна збіжності відстаней $\rho(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. За потреби будемо використовувати класичне позначення збіжності $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ або просто $x_n \to x$. Але зауважимо, що тепер границя може не бути єдиною!

**Приклад 13.1.** Розглянемо послідовність $\left\{x_n = x_0 + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

- У стандартній топології $x_0$ – єдина границя $\{x_n\}$, як відомо з курсу аналіза (і неважко перевірити самостійно). Це так і в прямій Зоргенфрея (перевірте).

- У топології напівнескінченних інтервалів $x \in \mathbb{R}$ є границею $\{x_n\}$ тоді й тільки тоді, коли $x \leqslant x_0$. Дійсно, будь-який відкритий окіл такої точки має вигляд $(a, +\infty)$ з $a < x \leqslant x_0$, а отже містить усі елементи $\{x_n\}$. З іншого боку, у будь-якої точки $x > x_0$ існує окіл $(a, +\infty)$ з $a \in (x_0, x)$, що містить лише скінченну кількість елементів послідовності $\{x_n\}$ або зовсім їх не містить.

- Визначимо топологію базою з напівінтервалів вигляду $(a, b]$ аналогічно до топології Зоргенфрея. У цій топології границь у $\{x_n\}$ не існує. Дійсно, для будь-якої $x \in \mathbb{R}$ можна знайти $\varepsilon > 0$ таке, що відкритий окіл $(x-\varepsilon, x]$ точки $x$ буде містити лише скінченну кількість елементів послідовності $\{x_n\}$ або не міститиме їх зовсім.

**Вправа 13.1.** Описати границі $\{x_n\}$ у дискретній, антидискретній та кофінітній топологіях. Чи можна щось сказати про границі довільної послідовності у довільній множині з цими топологіями?

**Твердження 13.1.** *Якщо відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів неперервне у точці $x \in X$, то для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ у $X$, що збігається до $x$, її образ $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до $f(x)$. Якщо в $x$ існує не більш ніж зліченна база (зокрема, якщо $X$ задовольняє першій аксіомі зліченності), то вірне й обернене твердження.*

**Доведення.** $\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай $f$ неперервне в $x$ і $x_n \to x$. Тоді для будь-якої відкритої $V \ni f(x)$ існує відкрита $U$ така, що $x \in U \subset f^{-1}(V)$, і, у свою чергу, існує натуральне $N$ таке, що для усіх $n \geqslant N$ маємо $x_n \in U$, а отже $f(x_n) \in V$. Таким чином, $f(x_n) \to f(x)$.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай тепер $\mathcal{B}$ – не більш ніж зліченна база в $x$. Перенумеруємо її елементи: $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$. При цьому, якщо $\mathcal{B}$ скінченна, просто візьмемо усі множини починаючи з деякого індекса рівними. Покладемо $W_n \coloneqq U_1 \cap \ldots \cap U_n$ для усіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ – теж база в $x$ (оскільки $x \in W_n \subset U_n$ для будь-якого $n$) і є незростаючою послідовністю відкритих околів $x$: $W_1 \supset W_2 \supset \ldots \supset W_n \supset W_{n+1} \supset \ldots \ni x$.

Припустимо, що умова на послідовності виконується, але $f$ не є неперервним у $x$: існує відкрита $V \ni f(x)$ така, що для будь-якої відкритої $U \ni x$ її образ $f(U) \not\subset V$. Зокрема, тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $x_n \in W_n$ такий, що $f(x_n) \notin V$.

Покажемо, що $x_n \to x$ (це буде вірно для будь-якої послідовності з властивістю $x_n \in W_n$). Дійсно, для будь-якої відкритої $U \ni x$, оскільки $\mathcal{B}$ – база в $x$, існує таке натуральне $N$, що $x \in W_N \subset U_N \subset U$. Тоді для кожного $n \geqslant N$ відповідний елемент послідовності $x_n \in W_n \subset W_N \subset U$, що й доводить збіжність до $x$. З іншого боку, $f(x_n) \not\to f(x)$, бо усі елементи послідовності $\{f(x_n)\}$ лежать за межами відкритого околу $V \ni f(x)$. Отримуємо протиріччя.

∎

**Зауваження.** Умову попереднього твердження також називають умовою *секвенційної неперервності* або *секвенційним* (тобто даним у термінах послідовностей) означенням неперервності. Виявляється, що у цих термінах можна описувати не лише неперервність: *секвенційним замиканням* множини інколи називають сукупність границь усіх послідовностей, що лежать у цій множині. Сама множина міститься у своєму секвенційному замиканні за побудовою, бо кожна її точка є границею постійної послідовності. Множину тоді називають *секвенційно замкненою*, якщо вона дорівнює такому замиканню.

**Твердження 13.2.** *Нехай $\widehat{A}$ – секвенційне замикання підмножини $A \subset X$ топологічного простору, тобто*

$$\widehat{A} \coloneqq \{x \in X \mid \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A\colon x_n \to x\}.$$

*Тоді $\widehat{A} \subset \overline{A}$. Якщо $X$ задовольняє першій аксіомі зліченності, то вірне й обернене включення.*

**Доведення.** $\subseteq$ Якщо $x \in \widehat{A}$, то будь-яка відкрита $U \ni x$ містить усі елементи відповідної послідовності, починаючи з деякого індекса $N$: $\{x_n\}_{n=N}^{\infty} \subset U \cap A$. Отже, $U \cap A \neq \varnothing$. Тому $x \in \overline{A}$.

$\supseteq$ Для будь-якого $x \in \overline{A}$ побудуємо послідовність околів $\{W_n\}$ як у попередньому доведенні. З означення замикання, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $x_n \in W_n \cap A$. Як і раніше, тоді $x_n \to x$ і тому $x \in \widehat{A}$.

■

**Вправа 13.2.** Навести приклади, що демонструють невірність оберненої імплікації у твердженні 13.1 і оберненого включення у твердженні 13.2 для загального простору $X$, тобто те, що секвенційні означення не можна вільно використовувати без аксіом зліченності.

# 14 Гомеоморфність і топологічні інваріанти

Поняття неперервного відображення дозволяє нам визначити основне відношення еквівалентності топологічних просторів – їхню гомеоморфність. Вона формалізує інтуїтивне уявлення про "перетворення множин без розривів і склеювань".

**Означення 14.1.** Відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів $X$ та $Y$ зветься їх *гомеоморфізмом*, якщо $f$ – бієкція і при цьому $f$ та $f^{-1}$ неперервні. Якщо існує гомеоморфізм $f\colon X \to Y$, то говорять, що $X$ *гомеоморфний* $Y$ (або що $X$ та $Y$ гомеоморфні) і позначають це $X \cong Y$.

**Зауваження.** Тобто гомеоморфізм – це взаємно однозначне і взаємно неперервне відображення.

**Твердження 14.1.** *Гомеоморфність є відношенням еквівалентності топологічних просторів.*

**Доведення.** Перевіримо умови з означення еквівалентності.

- *Рефлексивність*: для будь-якого простору $X$ тотожне відображення $id_X\colon X \to X$ – гомеоморфізм (див. приклад 12.2), тому $X \cong X$.

- *Симетричність*: якщо $X \cong Y$ і $f\colon X \to Y$ – відповідний гомеоморфізм, то $f^{-1}\colon Y \to X$ – теж гомеоморфізм за означенням (бо $(f^{-1})^{-1} = f$), тому $Y \cong X$.

- *Транзитивність*: нехай $X \cong Y$, $Y \cong Z$, і $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ – відповідні гомеоморфізми. Тоді $g \circ f\colon X \to Z$ – бієкція, $g \circ f \in C(X, Z)$ і $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \in C(Z, X)$ згідно з твердженням 12.3. Отже, $g \circ f$ – гомеоморфізм, тому $X \cong Z$.

■

**Приклад 14.1.** Якщо $X$ та $Y$ одночасно наділені дискретною або антидискретною топологією, то будь-яка бієкція між ними буде гомеоморфізмом (див. приклади 12.3 і 12.4). Тому $X \cong Y$ тоді й тільки тоді, коли ці множини рівнопотужні.

**Приклад 14.2.** В силу прикладу 12.5, біліпшицеві еквівалентності метричних просторів (зокрема ізометрії) є гомеоморфізмами.

**Приклад 14.3.** Афінні перетворення $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (тобто відображення вигляду $f(x) = Ax + b$, де $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ – невироджена матриця і $b \in \mathbb{R}^n$) є гомеоморфізмами відносно стандартної топології (перевірте це).

**Приклад 14.4.** Усі інтервали в $\mathbb{R}$ (включно з самою $\mathbb{R}$) з топологіями, що індуковані стандартною топологією прямої, гомеоморфні. Дійсно, розглянемо відображення:

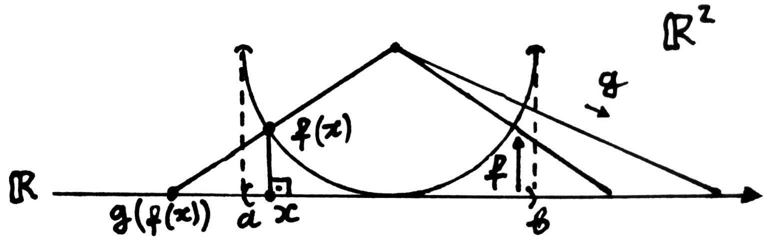
$$\begin{array}{ll}
(0,1) \to (a,b),\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\colon & t \mapsto (1-t)a + tb;\\
(0,1) \to (0,+\infty)\colon & t \mapsto \frac{t}{1-t};\\
(0,+\infty) \to (a,+\infty),\ a \in \mathbb{R}\colon & t \mapsto t + a;\\
(0,+\infty) \to (-\infty,a),\ a \in \mathbb{R}\colon & t \mapsto -t + a;\\
(0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon & t \mapsto \ln t.
\end{array}$$

У якості другої функції також можна взяти $t \mapsto \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} t$. Неважко перевірити, що це все бієкції, і, як відомо з аналіза (див. приклад 12.6), усі ці функції та обернені до них – неперервні, а отже індукують неперервні відображення інтервалів в силу твердження 12.4. З транзитивності гомеоморфності у твердженні 14.1 тоді випливає, що усі перелічені типи інтервалів гомеоморфні.

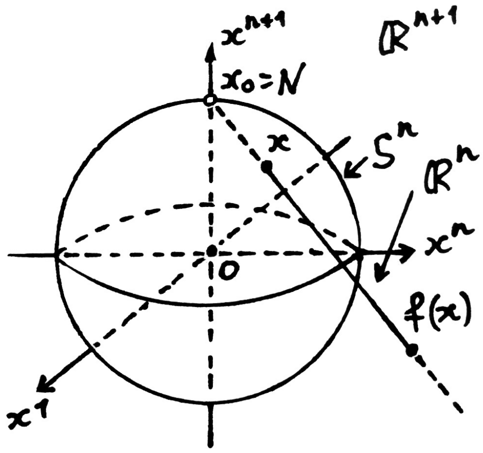
Аналогічно, усі відрізки $[a, b]$ гомеоморфні між собою. Те ж вірне й для усіх напівінтервалів вигляду $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$ або $(-\infty, a]$ (тут всюди $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). При цьому жодні два проміжки з різних груп не гомеоморфні, як буде продемонстровано у наступних розділах (це також випливає з наступної вправи, що, втім, неявно використовує зв'язність, яка з'явиться у цьому курсі пізніше). Зауважимо, що всі використані у цьому прикладі функції строго монотонні, і це не випадково:

**Вправа 14.1.** Показати, що функція $f\colon A \to B$ є гомеоморфізмом проміжків $A \subset \mathbb{R}$ і $B \subset \mathbb{R}$ тоді й тільки тоді, коли вона неперервна, строго монотонна і сюр'єктивна (підказка: використати теорему Больцано – Коші про проміжне значення функції, див. її узагальнення у розділі 25).

**Вправа 14.2.** Тут і далі позначатимемо через $B^n := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ евклідову відкриту кулю радіуса 1 з центром у початку координат. Показати, що $B^n \cong \mathbb{R}^n$. Чи вірно це для довільної непорожньої відкритої опуклої підмножини $\mathbb{R}^n$? (Відповідь див., наприклад, у [9].)




**Вправа 14.3.** Розглянемо геометричний метод побудови гомеоморфізма між скінченним інтервалом $(a, b)$ і $\mathbb{R}$, що показаний на попередньому рисунку. Цей гомеоморфізм має вигляд композиції $g \circ f$, де $f$ – обернена ортогональна проєкція інтервала на відкрите півколо, а $g$ – центральна проєкція півкола на пряму. Записати ці відображення аналітично і показати, що кожне з них (а отже і їхня композиція) є гомеоморфізмом. Півколо тут розглядається з топологією, індукованою з $\mathbb{R}^2$.




**Приклад 14.5.** Вище проілюстрована *стереографічна проєкція* – відображення "проколотої сфери" $f\colon S^n \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ для деякої $x_0 \in S^n$, що ставить у відповідність точці $x$ сфери точку перетину променю $x_0 x$

з гіперплощиною $\mathbb{R}^{n+1}$, яка проходить через 0 ортогонально до радіуса-вектора $x_0$ і яку ми ототожнюємо з $\mathbb{R}^n$. Обертаючи за необхідності систему координат, можемо вважати, що $x_0 = N = (0, \ldots, 0, 1)$ – *північний полюс* сфери. Тоді відповідну гіперплощину утворюють точки з $x^{n+1} = 0$. Для довільної $x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n \setminus \{N\}$ параметричні рівняння променю $Nx$ мають вигляд:

$$\begin{cases} y^1 &= tx^1, \\ \vdots & \vdots \\ y^n &= tx^n, \\ y^{n+1} &= 1 + t(x^{n+1} - 1). \end{cases}$$

Для його перетину з гіперплощиною $\{x^{n+1} = 0\}$ маємо $t = \frac{1}{1 - x^{n+1}}$. Отже,

$$f(x) = \left( \frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \ldots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}} \right).$$

Це бієкція за побудовою, і вона неперервна згідно з твердженням 12.4 як обмеження на $S^n \setminus \{N\}$ неперервного відображення $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x^{n+1} = 1\} \to \mathbb{R}^n$ (див. також вправу 12.4). Знайдемо обернене відображення. Нехай $f(x) = y = (y^1, \ldots, y^n)$, тобто $y^i = \frac{x^i}{1 - x^{n+1}}$ для кожного $i = \overline{1, n}$. Тоді, оскільки $x \in S^n$, квадрат *евклідової норми* $y$ дорівнює

$$|y|^2 := \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x^i)^2}{(1 - x^{n+1})^2} = \frac{1 - (x^{n+1})^2}{(1 - x^{n+1})^2} = \frac{1 + x^{n+1}}{1 - x^{n+1}},$$

звідки отримуємо $x^{n+1} = \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}$ і $1 - x^{n+1} = \frac{2}{|y|^2 + 1}$. Таким чином,

$$f^{-1}(y) = \left( \frac{2y^1}{|y|^2 + 1}, \ldots, \frac{2y^n}{|y|^2 + 1}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} \right).$$

Тобто $f^{-1}$ – обмеження на область значень $S^n \setminus \{N\}$ неперервного відображення $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, тому знову ж неперервне в силу твердження 12.4. Отже, $f$ – гомеоморфізм.

Наступне корисне спостереження також випливає з твердження 12.4:

**Наслідок 14.1.** *Якщо $f\colon X \to Y$ – гомеоморфізм топологічних просторів, $A \subset X$, $B \subset Y$ і $f(A) = B$, то $f|_A\colon A \to B$ – гомеоморфізм підпросторів (з індукованими топологіями).*

**Зауваження.** В означенні гомеоморфізма умова неперервності оберненого відображення $f^{-1}$ означає, що $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ відкрита для будь-якої відкритої $U \subset X$, тобто $f$ переводить відкриті множини у відкриті. Ця властивість відображень має спеціальну назву:

**Означення 14.2.** Відображення $f \colon X \to Y$ топологічних просторів зветься *відкритим* (відповідно, *замкненим*), якщо для будь-якої відкритої (замкненої) $U \subset X$ образ $f(U) \subset Y$ відкритий (замкнений).

**Твердження 14.2.** *Нехай $f \colon X \to Y$ – бієктивне відображення топологічних просторів. Тоді наступні умови еквівалентні:*

- *$f$ – гомеоморфізм;*
- *$U \subset X$ відкрита тоді й тільки тоді, коли $f(U) \subset Y$ відкрита;*
- *$f$ неперервне і відкрите;*
- *$V \subset X$ замкнена тоді й тільки тоді, коли $f(V) \subset Y$ замкнена;*
- *$f$ неперервне і замкнене;*
- *для будь-якої бази $\mathcal{B}$ топології $X$ її образ $f(\mathcal{B}) := \{f(U) \mid U \in \mathcal{B}\}$ – база топології $Y$.*

**Доведення.** Еквівалентність перших п'яти умов безпосередньо випливає з означень і попереднього зауваження (а також із того, що для бієкції $f(X \setminus V) = Y \setminus f(V)$). Доведемо еквівалентність гомеоморфності останній умові збереження бази:

$\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай $f$ – гомеоморфізм. Тоді усі елементи $f(\mathcal{B})$ відкриті в силу відкритості $f$, і для будь-якої відкритої $V \subset Y$ прообраз кожної її точки $y \in V$ належить до $f^{-1}(V)$, що відкрита в $X$ в силу неперервності $f$. Тоді існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $f^{-1}(y) \in U \subset f^{-1}(V)$, отже $y \in f(U) \subset V$, і $f(U) \in f(\mathcal{B})$. Таким чином, $f(\mathcal{B})$ дійсно є базою.

$\underline{\Leftarrow}$ Тепер нехай $f$ зберігає бази, і $\mathcal{B}$ – якась база топології $X$. Тоді $f(\mathcal{B})$ – база топології $Y$. Отже, для будь-якої відкритої $V \subset Y$ і кожної точки $x \in f^{-1}(V)$ існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $f(x) \in f(U) \subset V$, тому $x \in U \subset f^{-1}(V)$. Усі такі $U$ відкриті, тому $f^{-1}(V)$ відкрита. Отже, $f$ неперервне.

Аналогічно, для будь-якої відкритої $W \subset X$ і кожної $y \in f(W)$ існує $U \in \mathcal{B}$ така, що $f^{-1}(y) \in U \subset W$, тому $y \in f(U) \subset f(W)$. Оскільки усі $f(U)$ відкриті як елементи бази $f(\mathcal{B})$, $f(W)$ відкрита. Таким чином, $f$ відкрите, а отже є гомеоморфізмом.

$\blacksquare$

**Зауваження.** З попереднього доведення випливає, що для гомеоморфності $f$ достатньо, щоб воно переводило в базу топології $Y$ якусь одну базу $\mathcal{B}$. Аналогічний критерій можна сформулювати також для баз у точках. З того, що гомеоморфізми зберігають відкриті околи, випливає, що вони також зберігають внутрішності, замикання, межі, границі послідовностей і т. ін. (Сформулюйте й доведіть відповідні наслідки.) Важливим окремим класом гомеоморфізмів є вкладення:

**Означення 14.3.** Відображення топологічних просторів $f\colon X \to Y$ зветься *вкладенням* $X$ у $Y$, якщо його обмеження на область значень $f\colon X \to f(X)$ є гомеоморфізмом для індукованої топології на $f(X)$.

**Приклад 14.6.** Якщо $X \subset Y$ – підпростір топологічного простору $Y$, то включення $i\colon X \to Y$ є вкладенням, бо його обмеження $i\colon X \to i(X) = X$ є тотожним (тут обидві копії $X$ мають одну й ту саму – індуковану – топологію).

**Зауваження.** З означення випливає, що будь-яке вкладення є неперервним (чому?) та ін'єктивним відображенням, але ці дві властивості не є достатніми, як демонструє наступний приклад (пор. також з наслідком 20.4 далі).

**Приклад 14.7.** Відображення $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}^2$, що визначене умовою $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, є неперервним (бо задається неперервними функціями) та ін'єктивним, але не є вкладенням, бо напівінтервал $[0,1)$ не гомеоморфний колу $S^1 = f([0,1))$. Це буде встановлено далі у прикладі 23.10 (а також випливатиме з результатів розділу 20), але можна й безпосередньо перевірити, що відображення $f\colon [0,1) \to S^1$ не є гомеоморфізмом, бо не є відкритим (зробіть це).

**Зауваження.** Щоб доводити <u>не</u>гомеоморфність топологічних просторів (скажімо, проміжків різних типів з прикладу 14.4), нам знадобляться властивості з наступного неформального означення, що зберігаються при гомеоморфізмах. Тоді якщо існує така властивість (інваріант), що виконується для простору $X$ і не виконується для $Y$, то $X \ncong Y$.

**Означення 14.4.** Нехай $\mathcal{P}$ – якась властивість або характеристика, у т. ч. числова, топологічних просторів така, що для будь-яких гомеоморфних $X$ та $Y$ простір $X$ задовольняє $\mathcal{P}$ тоді й тільки тоді, коли $Y$ задовольняє $\mathcal{P}$ або характеристики $\mathcal{P}$ просторів $X$ та $Y$ рівні. Тоді будемо називати $\mathcal{P}$ *топологічним інваріантом.*

**Приклад 14.8.** Поки що нам зустрічалися наступні топологічні інваріанти простору $(X, \mathcal{T})$:

- Потужність $X$ (бо гомеоморфізм є бієкцією). Наприклад, жоден скінченний простір негомеоморфний нескінченному, а зліченний – континуальному.

- Потужність топології $\mathcal{T}$ (бо гомеоморфізм встановлює бієкцію між відкритими множинами в силу твердження 14.2). Наприклад, простори з тривіальною і нетривіальною топологіями негомеоморфні, навіть якщо це одна й та сама множина.

- Друга аксіома зліченності (це випливає з умови збереження бази у твердженні 14.2, бо гомеоморфізм переводить не більш ніж зліченну базу у не більш ніж зліченну базу). Наприклад, стандартна пряма негомеоморфна прямій Зоргенфрея.

- Перша аксіома зліченності (з аналогічної умови збереження бази в точці). Наприклад, пряма з кофінітною топологією негомеоморфна ані стандартній, ані прямій Зоргенфрея.

- Сепарабельність (бо гомеоморфізм зберігає як замикання, так і потужності множин). Наприклад, метричні простори $C[a, b]$ і $\ell_\infty$ негомеоморфні в силу вправ 11.3 і 11.4. Зокрема, тоді з прикладу 14.2 випливає, що вони не можуть бути й біліпшицево еквівалентними.

- Метризовність (доведіть самостійно і наведіть приклад).

У подальших розділах цей список буде доповнюватися.

# 15 Топологія прямого добутку

Продовжимо знайомство з *топологічними конструкціями*, тобто зі способами побудови нових топологічних просторів з існуючих. У нас вже був приклад такої конструкції – прообраз топології (зокрема індукована топологія). Нагадаємо, що *прямим (декартовим) добутком* скінченної сукупності множин $X_1, \ldots, X_n$ зветься множина усіх впорядкованих наборів, що містять по одному елементу кожної з цих множин:

$$X_1 \times \ldots \times X_n \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall i = \overline{1, n}\ x_i \in X_i\}.$$

**Твердження 15.1.** *Нехай $X$ та $Y$ – топологічні простори з базами топологій $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$ відповідно. Тоді*

$$\mathcal{H} \coloneqq \{U \times V \,|\, U \in \mathcal{B}, V \in \mathcal{C}\}$$

*є базою деякої топології на прямому декартовому добутку $X \times Y$. Відносно цієї топології $W \subset X \times Y$ відкрита тоді й тільки тоді, коли для будь-якої її точки $(x, y) \in W$ існують відкриті $U \subset X$ і $V \subset Y$ такі, що $(x, y) \in U \times V \subset W$. Зокрема, ця топологія однозначно визначена топологіями $X$ та $Y$ (тобто не залежить від вибору баз $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$).*

**Доведення.** Перевіримо виконання умов критерію бази для системи $\mathcal{H}$. Оскільки $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$ є покриттями $X$ та $Y$ відповідно, для кожної $(x, y) \in X \times Y$ існують $U \in \mathcal{B}$ і $V \in \mathcal{C}$ такі, що $x \in U$ та $y \in V$, а отже $(x, y) \in U \times V$. Таким чином, $\mathcal{H}$ є покриттям $X \times Y$.

Нехай тепер $U \times V, \widetilde{U} \times \widetilde{V} \in \mathcal{H}$. Оскільки $(U \times V) \cap (\widetilde{U} \times \widetilde{V}) = (U \cap \widetilde{U}) \times (V \cap \widetilde{V})$, для будь-якої $(x, y)$ з цього перетину маємо $x \in U \cap \widetilde{U}$ та $y \in V \cap \widetilde{V}$. Оскільки $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$ – бази, існують $\widehat{U} \in \mathcal{B}$ і $\widehat{V} \in \mathcal{C}$, для яких $x \in \widehat{U} \subset U \cap \widetilde{U}$ та $y \in \widehat{V} \subset V \cap \widetilde{V}$. Отже, $(x, y) \in \widehat{U} \times \widehat{V} \subset (U \times V) \cap (\widetilde{U} \times \widetilde{V})$.

В силу критерію, $\mathcal{H}$ дійсно є базою деякої топології на $X \times Y$. Доведемо тепер необхідну та достатню умову належності множини $W$ цій топології. Незалежність від вибору баз випливає звідси, бо умова дана в термінах топологій $X$ і $Y$.

$\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай $W \subset X \times Y$ відкрита. За визначенням бази, тоді для будь-якої точки $(x, y) \in W$ існують такі $U \in \mathcal{B}$ і $V \in \mathcal{C}$, що $(x, y) \in U \times V \subset W$. Зокрема, $U$ і $V$ відкриті.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай тепер для будь-якої $(x, y) \in W$ існують відкриті $U$ і $V$, для яких $(x, y) \in U \times V \subset W$. Тоді існують $\widehat{U} \in \mathcal{B}$ і $\widehat{V} \in \mathcal{C}$ такі, що $x \in \widehat{U} \subset U$ та $y \in \widehat{V} \subset V$, а отже $(x, y) \in \widehat{U} \times \widehat{V} \subset U \times V \subset W$. Оскільки усі такі $\widehat{U} \times \widehat{V} \in \mathcal{H}$ відкриті, $W$ відкрита відносно топології $X \times Y$ з базою $\mathcal{H}$.

■

**Означення 15.1.** Топологія на $X \times Y$, що побудована у твердженні 15.1, зветься *топологією прямого добутку*, а $X \times Y$ – прямим добутком топологічних просторів $X$ та $Y$.

**Вправа 15.1.** Показати, що топологія прямого добутку має властивість асоціативності: топології $(X \times Y) \times Z$ і $X \times (Y \times Z)$ на $X \times Y \times Z$ збігаються, тобто можна говорити однозначно про простір $X \times Y \times Z$. Більш того, це вірно для будь-якої скінченної кількості множників: можна коректно (тобто незалежно від розстановки дужок) визначити прямий добуток топологічних просторів $X_1, \ldots, X_n$, де підмножина $W \subset X_1 \times \ldots \times X_n$

відкрита тоді й тільки тоді, коли для будь-якої точки $(x_1, \ldots, x_n) \in W$ існують відкриті $U_i \subset X_i$ для усіх $i$ від 1 до $n$ такі, що $(x_1, \ldots, x_n) \in U_1 \times \ldots \times U_n \subset W$.

**Зауваження.** У подальшому будемо за замовчуванням вважати топологію на добутку скінченної кількості топологічних просторів саме такою. Аналогічно до означення бази, з твердження 15.1 і попередньої вправи випливає, що $W \subset X_1 \times \ldots \times X_n$ відкрита тоді й тільки тоді, коли її можна представити у вигляді об'єднання добутків відкритих множин $U_1 \times \ldots \times U_n$. Зокрема, самі ці добутки є відкритими і утворюють базу даної топології.

**Означення 15.2.** *Канонічні проєкції* $p_X\colon X \times Y \to X$ і $p_Y\colon X \times Y \to Y$ прямого добутку на множники визначені наступним чином: $p_X\colon (x, y) \mapsto x$ і $p_Y\colon (x, y) \mapsto y$.

**Твердження 15.2** (Властивості канонічних проєкцій)**.** *Нехай $X$, $Y$ і $Z$ – деякі топологічні простори, і при цьому $X \times Y$ наділений топологією прямого добутку.*

1. *Відображення $p_X$ і $p_Y$ є неперервними.*

2. *Топологія прямого добутку є найслабшою на $X \times Y$ з тих, для яких відображення $p_X$ і $p_Y$ неперервні.*

3. *Відображення $f\colon Z \to X \times Y$ неперервне тоді й тільки тоді, коли композиції $p_X \circ f$ і $p_Y \circ f$ неперервні.*

4. *Відображення $p_X|_{X \times \{y\}}\colon X \times \{y\} \to X$ та $p_Y|_{\{x\} \times Y}\colon \{x\} \times Y \to Y$ є гомеоморфізмами для будь-яких $y \in Y$ та $x \in X$ відповідно. Тут $X \times \{y\}$ та $\{x\} \times Y$ розглядаються з топологіями, що індуковані з $X \times Y$.*

**Доведення.**

1. Помітимо, що прообраз будь-якої $U \subset X$ має вигляд $p_X^{-1}(U) = U \times Y$ і тому відкритий в $X \times Y$ для відкритої $U$ як добуток відкритих множин (див. попереднє зауваження). Отже, $p_X$ неперервне. Аналогічно для $p_Y$.

2. Ми вже знаємо з 1., що проєкції неперервні у топології прямого добутку. Нехай тепер $\mathcal{T}$ – якась інша топологія на $X \times Y$, відносно

якої $p_X$ і $p_Y$ неперервні. Тоді для будь-яких відкритих $U \subset X$, $V \subset Y$ їхній добуток

$$U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V) = p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V) \in \mathcal{T},$$

бо це перетин відкритих множин. А тоді й усі елементи топології прямого добутку на $X \times Y$ також належать до $\mathcal{T}$ як об'єднання множин вигляду $U \times V$. Таким чином, топологія прямого добутку слабша за $\mathcal{T}$.

3. $\underline{\Rightarrow}$ Нехай $f \in C(Z, X \times Y)$. Оскільки $p_X \in C(X \times Y, X)$ і $p_Y \in C(X \times Y, Y)$ в силу 1., $p_X \circ f \in C(Z, X)$ і $p_Y \circ f \in C(Z, Y)$ як композиції неперервних.

   $\underline{\Leftarrow}$ Тепер нехай $p_X \circ f \in C(Z, X)$ і $p_Y \circ f \in C(Z, Y)$. Тоді для будь-яких відкритих $U \subset X$ і $V \subset Y$ маємо

$$f^{-1}(U \times V) = f^{-1}((U \times Y) \cap (X \times V)) = f^{-1}(U \times Y) \cap f^{-1}(X \times V) =$$
$$= f^{-1}(p_X^{-1}(U)) \cap f^{-1}(p_Y^{-1}(V)) = (p_X \circ f)^{-1}(U) \cap (p_Y \circ f)^{-1}(V),$$

   що є відкритим як перетин відкритих. Таким чином, $f \in C(Z, X \times Y)$, оскільки в силу вправи 12.1, щоб довести його неперервність, достатньо показати, що усі прообрази елементів якоїсь бази $X \times Y$ відкриті.

4. Доведемо це твердження для $p_X$ (для $p_Y$ аналогічно). Зауважимо, що відображення $p_X|_{X \times \{y\}} \colon X \times \{y\} \to X$ бієктивне за побудовою і неперервне як обмеження неперервного. Тому в силу твердження 14.2 залишилося показати, що воно відкрите. Нехай $W \subset X \times \{y\}$ відкрита в індукованій топології, тобто є перетином $X \times \{y\}$ і деякої множини, відкритої відносно топології прямого добутку. В силу зауваження вище, це означає, що для деяких сукупностей відкритих множин $\{U_\alpha \subset X\}_{\alpha \in A}$ і $\{V_\alpha \subset Y\}_{\alpha \in A}$

$$W = (X \times \{y\}) \cap \left( \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times V_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A \colon y \in V_\alpha} U_\alpha \times \{y\}.$$

   Тут об'єднання береться по усіх індексах $\alpha \in A$ таких, що $y \in V_\alpha$. Друга рівність тут випливає з того, що точка $(x, y)$ міститься у перетині, яким є $W$, тоді й тільки тоді, коли $x \in U_\alpha$ і $y \in V_\alpha$ для деякого індекса $\alpha \in A$. Тоді

$$p_X(W) = \bigcup_{\alpha \in A \colon y \in V_\alpha} U_\alpha,$$

що відкрита в $X$ як об'єднання відкритих. Це й доводить відкритість обмеження $p_X$ на $X \times \{y\}$.

■

**Зауваження.** Усі ці властивості очевидним чином узагальнюються на будь-яку скінченну кількість множників (як у вправі 15.1). Зокрема, в узагальненні пункта 4. гомеоморфізмами будуть обмеження вигляду

$$p_{X_i}|_{\{x_1\}\times\ldots\times X_i\times\ldots\times\{x_n\}}\colon \{x_1\}\times\ldots\times X_i\times\ldots\times\{x_n\}\to X_i.$$

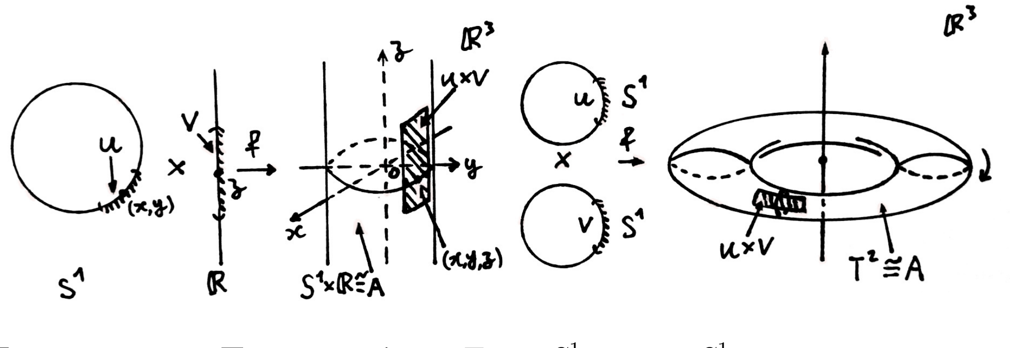
Характеризація топології прямого добутку у пункті 2. невипадково нагадує характеризацію прообразу топології у твердженні 12.5: це окремі випадки загального поняття *ініціальної топології* (див. [6, с. 30-32, с. 35-37 перекладу]). Більш того, використовуючи цю характеризацію, можна узагальнити поняття топології прямого добутку зі скінченної кількості множників на довільну сукупність топологічних просторів $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ (т. зв. *тихонівський добуток*). Детальніше див. [2, с. 106, 108], [6, с. 31-32, с. 37 перекладу] або [12, с. 113-114].

**Приклад 15.1.** Розглянемо простори $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^m$ зі стандартними топологіями та їхній добуток, який ототожнимо з $\mathbb{R}^{n+m}$. Зауважимо, що у якості бази стандартної топології на $\mathbb{R}^k$ можна обрати сукупність відкритих паралелепіпедів, тобто добутків інтервалів $\prod\limits_{i=1}^{k}(a^i,b^i)$. Дійсно, відкриті кулі метрики $\rho_\infty$ – куби $B_\varepsilon(x)=\prod\limits_{i=1}^{k}(x^i-\varepsilon,x^i+\varepsilon)$ – мають такий вигляд і, з іншого боку, кожен відкритий паралелепіпед можна представити у вигляді об'єднання відкритих куль цієї метрики, бо кожен з інтервалів $(a^i,b^i)$ разом з кожною своєю точкою $x^i$ містить $(x^i-\varepsilon,x^i+\varepsilon)$ для деякого $\varepsilon>0$. Таким чином, згідно з твердженням 15.1, база топології прямого добутку на $\mathbb{R}^{n+m}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ складається з множин вигляду

$$\prod_{i=1}^{n}(a^i,b^i)\times\prod_{i=n+1}^{n+m}(a^i,b^i)=\prod_{i=1}^{n+m}(a^i,b^i).$$

Отже, ця топологія на $\mathbb{R}^{n+m}$ збігається зі стандартною. Аналогічно для довільної скінченної кількості множників: так, $\mathbb{R}^n$ можна представити у вигляді $\underbrace{\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n}$ з топологією прямого добутку. Зокрема, тоді критерій неперервності відображень у $\mathbb{R}^n$ з вправи 12.4 випливає з узагальнення пункта 3. твердження 15.2 на випадок $n$ множників.

**Приклад 15.2.** Прямий добуток кола на пряму $S^1 \times \mathbb{R}$ гомеоморфний будь-якому круговому (або еліптичному) циліндру в $\mathbb{R}^3$. Тут, як завжди, $\mathbb{R}^3$ розглядається зі стандартною топологією, а циліндр – з індукованою. Дійсно, розглянемо круговий циліндр $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Будь-який інший еліптичний циліндр в $\mathbb{R}^3$ можна отримати з нього афінним перетворенням, що є гомеоморфізмом $\mathbb{R}^3$ на себе (приклад 14.3) і тому індукує гомеоморфізм циліндрів згідно з наслідком 14.1. Розглянемо $f : S^1 \times \mathbb{R} \to A$, що переводить пару $((x, y), z)$ з точки кола і точки прямої у точку $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Очевидно, це бієктивне відображення на $A$. Згідно з твердженням 15.1 і прикладом 9.2, базу $S^1 \times \mathbb{R}$ утворюють прямі добутки відкритих дуг кола на інтервали прямої. Під дією $f$ вони переходять у відкриті "криволінійні прямокутники" в $A$ (див. ілюстрацію нижче). З іншого боку, базу індукованої топології $A$ складають, згідно з твердженням 9.2, перетини $A$ з елементами якоїсь бази $\mathbb{R}^3$. Обравши цю базу з паралелепіпедів, як у попередньому прикладі, бачимо, що $f$ переводить базу $S^1 \times \mathbb{R}$ у базу $A$, і тому є гомеоморфізмом в силу твердження 14.2 (точніше, у побудовану базу $A$ входитимуть також пари криволінійних прямокутників, що утворюються, коли паралелепіпед "проштрикує" циліндр, але їх можна звідти прибрати як об'єднання інших елементів бази). Іншими словами, відображення $f : S^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ є вкладенням $S^1 \times \mathbb{R}$ у $\mathbb{R}^3$ з образом $A$. Аналогічно, добуток кола на обмежений проміжок, скажімо, $S^1 \times [a, b]$, гомеоморфний обмеженому циліндру в $\mathbb{R}^3$ (чому?).




**Приклад 15.3.** Прямий добуток $T^n := \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ зветься *n-вимірним тором.* Зокрема, $T^1 = S^1$, а $T^2$ гомеоморфний круговому тору ("поверхні бублика", див. рисунок вище) в $\mathbb{R}^3$, тобто підмножині, утвореній обертанням кола навколо прямої, що лежить в площині цього кола і не перетинається з ним. Гомеоморфізм будується аналогічно до попереднього прикладу (зробіть це). Таким чином, $T^2$ теж вкладається у $\mathbb{R}^3$.

**Вправа 15.2.** Показати, що добуток $X \times Y$ задовольняє першій (відповідно, другій) аксіомі зліченності тоді й тільки тоді, коли простори $X$

та $Y$ задовольняють першій (другій) аксіомі зліченності. Чи узагальнюється це на довільну скінченну кількість множників? Чи вірне аналогічне твердження для сепарабельності (хоча б в один бік)?

**Вправа 15.3.** Показати, що для будь-якого метричного простору $(X, \rho)$ його метрика $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ є неперервною функцією на декартовому квадраті $X \times X$ з прямим добутком метричних топологій.

**Вправа 15.4.** Нехай $(X, \rho)$ та $(Y, \sigma)$ – метричні простори. Чи є прямий добуток метричних топологій на $X \times Y$ метричною топологією якоїсь метрики?

# 16 Фактортопологія

Ознайомимося ще з одним прикладом топологічної конструкції.

**Означення 16.1.** Нехай $(X, \mathcal{T})$ – топологічний простір, $Y$ – деяка множина, а $f\colon X \to Y$ – відображення. *Факторнтопологією* на $Y$, що породжена $f$, назвемо сукупність усіх таких підмножин $Y$, прообрази яких під дією $f$ відкриті у $X$:

$$\mathcal{S} \coloneqq \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}.$$

**Твердження 16.1.** *Факторнтопологія є найсильнішою топологією на $Y$ з тих, у яких $f$ неперервне.*

**Доведення.** Перш за все, доведемо, що $\mathcal{S}$ з попереднього означення – дійсно топологія, перевіривши виконання аксіом.

1. Нехай $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{S}$. Тоді $f^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{T}$ для кожного $\alpha \in A$, тому

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{T},$$

отже $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{S}$.

2. Аналогічно, для скінченної сукупності $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{S}$ маємо $f^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}$ для кожного $i = \overline{1, n}$, тоді

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i) \in \mathcal{T},$$

і тому $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{S}$.

3. Множини $\varnothing$ і $Y$ належать до $\mathcal{S}$, оскільки $\varnothing = f^{-1}(\varnothing)$ і $X = f^{-1}(Y)$ належать до $\mathcal{T}$.

За побудовою, прообрази відкритих відносно $\mathcal{S}$ множин відкриті, тому $f$ неперервне. Нехай тепер $\mathcal{R}$ – якась інша топологія на $Y$ така, що $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{R})$ неперервне. Тоді для будь-якої $U \in \mathcal{R}$ її прообраз $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$, тобто $U \in \mathcal{S}$. Таким чином, $\mathcal{R} \prec \mathcal{S}$.

■

**Зауваження.** Ця характеризація фактортопології виглядає дуальною до характеризацій ініціальних топологій: прообразу топології (твердження 12.5) і топології прямого добутку (пункт 2. твердження 15.2). У свою чергу, фактортопологія є частковим випадком поняття *фінальної топології* (див. [6, с. 32-34, с. 38-40 перекладу]), що є дуальним до поняття ініціальної топології.

**Означення 16.2.** Нехай $\sim$ – відношення еквівалентності на множині $X$. *Клас еквівалентності* елемента $x \in X$ позначатимемо через $[x]$, тобто $[x] = \{y \mid y \sim x\}$. Сукупність усіх попарно різних класів еквівалентності назвемо *фактормножиною* $X$ за $\sim$ і будемо позначати $X/_{\sim}$. Відображення $p\colon X \to X/_{\sim}$, що переводить $x$ у його клас еквівалентності $[x]$, будемо називати *канонічною проєкцією*. Якщо при цьому $(X,\mathcal{T})$ – топологічний простір, то фактортопологію, що породжена на $X/_{\sim}$ відображенням $p$, називають фактортопологією, що породжена відношенням $\sim$, а фактормножину $X/_{\sim}$ з цією топологією – *факторпростором* $(X,\mathcal{T})$ за $\sim$.

**Зауваження.** Таким чином, $U \subset X/_{\sim}$ відкрита відносно фактортопології тоді й тільки тоді, коли відкрита в $X$ множина

$$p^{-1}(U) = \{x \mid [x] \in U\} = \bigcup_{[x]\in U} [x],$$

тобто сукупність усіх елементів усіх класів еквівалентності, що входять до $U$. Згідно з твердженням 16.1, канонічна проєкція $p$ є неперервним відображенням.

Попереднє означення окремого випадку фактортопології насправді певним чином еквівалентне загальному означенню фактортопології, що породжена відображенням, якщо це відображення сюр'єктивне. Дійсно, нехай $f\colon X \to Y$ – деяка сюр'єкція. Назвемо точки $x$ і $y$ з $X$ еквівалентними, якщо $f(x) = f(y)$. Це задає відношення еквівалентності $\sim$ на $X$, класами еквівалентності якого є прообрази одноточкових підмножин $Y$, причому коректно визначене і є бієкцією відображення $\varphi\colon X/_{\sim} \to Y$, що переводить кожен клас еквівалентності $[x]$ у $f(x)$ (перевірте це). Якщо $X$ – топологічний простір, то підмножина $U \subset X/_\sim$ є відкритою у сенсі означення 16.2 тоді й тільки тоді, коли $\varphi(U) \subset Y$ відкрита у сенсі означення 16.1 (чому?), тобто $\varphi$ є (канонічно визначеним) гомеоморфізмом цих просторів у силу твердження 14.2. Далі ми роглядатимемо лише факторт опологію у сенсі означення 16.2 і за замовчуванням вважатимемо, що на фактормножині топологічного простору введена саме така топологія. Узагальнимо конструкцію, за допомогою якої вище був визначений гомеоморфізм $\varphi$:

**Означення 16.3.** Нехай $X$ і $Y$ – деякі множини, $\sim$ – відношення еквівалентності на $X$, і відображення $f\colon X \to Y$ *факторизовне*, тобто переводить еквівалентні точки в одну й ту саму: $f(x) = f(y)$ для будь-яких $x \sim y$ з $X$. Тоді визначимо *факторвідображення* $f/_\sim\colon X/_\sim \to Y$ наступним чином: $f/_\sim([x]) \coloneqq f(x)$ для будь-якого $[x] \in X/_\sim$.

**Зауваження.** Таким чином, $f/_\sim$ переводить клас еквівалентності в образ довільного його елемента. Коректність цього означення випливає з факторизовності $f$. Іншими словами, $f/_\sim$ визначається умовою $f = (f/_\sim) \circ p$. Такі рівності композицій зручно представляти у вигляді *комутативних діаграм*, тобто орієнтованих графів, вершинами яких є деякі множини, а ребрами (що позначені стрілочками) – відображення між ними, таких, що усі композиції стрілочок, що ведуть з певної множини у якусь іншу, рівні. У даному випадку діаграма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/_\sim \arrow[r, "f/_\sim"] & Y \end{tikzcd}$$

множин та відображень повинна бути комутативною. Зокрема, будь-яке відображення $X/_\sim \to Y$ має вигляд $f/_\sim$ для деякого $f\colon X \to Y$ (чому?). Наступний критерій неперервності таких відображень нагадує пункт <u>3.</u> твердження 15.2:

**Твердження 16.2.** *Відображення топологічних просторів $f\colon X \to Y$, що факторизовне відносно відношення еквівалентності $\sim$ на $X$, є неперервним тоді й тільки тоді, коли факторвідображення $f/_\sim\colon X/_\sim \to Y$ неперервне.*

**Доведення.** $\underline{\Leftarrow}$ Якщо $f/_\sim \in C(X/_\sim, Y)$, то $f = (f/_\sim) \circ p \in C(X, Y)$ як композиція неперервних (див. попереднє зауваження).

$\underline{\Rightarrow}$ Нехай $f \in C(X, Y)$. Тоді для будь-якої відкритої $V \subset Y$ множина $p^{-1}((f/_\sim)^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$ відкрита в $X$, а отже $(f/_\sim)^{-1}(V)$ відкрита в $X/_\sim$ за означенням фактортопології. Це й означає, що $f/_\sim \in C(X/_\sim, Y)$. ■

**Приклад 16.1.** У цьому і трьох наступних прикладах $X \coloneqq \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid t, s \in [0, 1]\} = [0, 1] \times [0, 1]$ – замкнений квадрат. Топологію на ньому можна вводити як індуковану стандартною топологією площини або як топологію прямого добутку (чому це одне й те саме?). Перш за все, задамо відношення еквівалентності на $X$ умовою $(0, s) \sim (1, s)$ для кожного $s \in [0, 1]$, інші точки еквівалентні тільки собі. Визначимо $f\colon X \to S^1 \times [0, 1]$ умовою $f(t, s) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), s)$. Воно неперервне і факторизовне відносно $\sim$ (бо $2\pi$ є періодом синуса і косинуса), тому породжує факторвідображення $f/_\sim\colon X/_\sim \to S^1 \times [0, 1]$, що неперервне згідно з твердженням 16.2. Більш того, неважко перевірити, що відображення $f/_\sim$ є біекцією.

Перевіримо, що $f/_\sim$ – відкрите. Нехай $U \in X/_\sim$ відкрита, тоді $p^{-1}(U)$ відкрита в $X$. Розглянемо довільну точку $U$. Якщо ця точка – клас еквівалентності з одного елемента $[(t, s)] = \{(t, s)\}$ (де $t \in (0, 1)$), то в $X$ у точки $(t, s) \in p^{-1}(U)$ можна знайти відкритий окіл вигляду $X \cap B_\varepsilon(t, s) \subset p^{-1}(U)$, що не містить точок вигляду $(0, s)$ або $(1, s)$. Тут $B_\varepsilon(t, s) = (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ – відкрита куля метрики $\rho_\infty$. Тоді

$$f/_\sim([(t, s)]) = f(t, s) \in f(X \cap B_\varepsilon(t, s)) \subset f/_\sim(U),$$

і $f(X \cap B_\varepsilon(t, s))$ є добутком дуги кола на проміжок $[0, 1] \cap (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$, відкритий у $[0, 1]$, тобто є відкритим околом $f/_\sim([(t, s)])$ у $S^1 \times [0, 1]$. Отже, $f/_\sim([(t, s)])$ – внутрішня точка $f/_\sim(U)$.

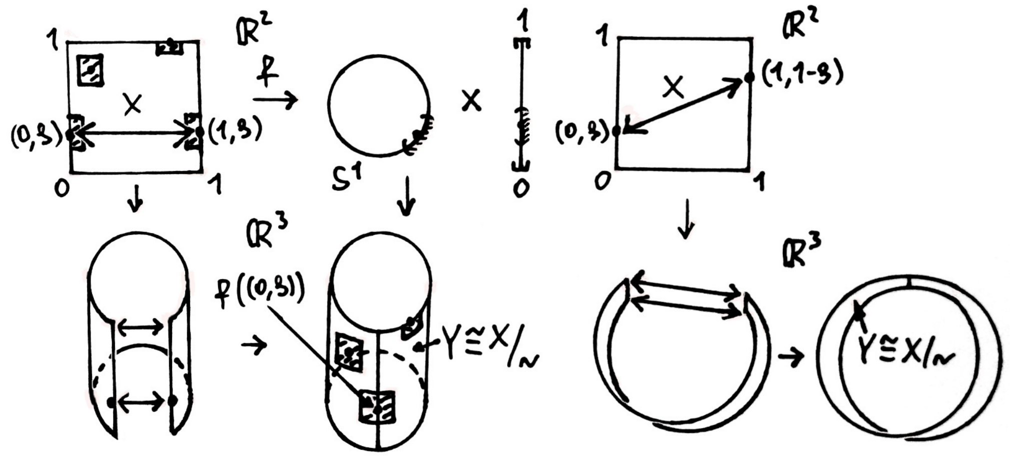
Тепер розглянемо точку $U$, що є класом еквівалентності з двох елементів: $[(0, s)] = \{(0, s), (1, s)\}$. Обидві ці точки входять у відкриту $p^{-1}(U)$ з деякими околами: $(0, s) \in X \cap B_{\varepsilon_0}(0, s) \subset p^{-1}(U)$ і $(1, s) \in X \cap B_{\varepsilon_1}(1, s) \subset p^{-1}(U)$. Покладемо $\varepsilon \coloneqq \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$. Тоді $f(X \cap (B_\varepsilon(0, s) \cup B_\varepsilon(1, s)))$, що утвориться склеюванням двох околів, знову буде добутком дуги кола на відкритий (в індукованій топології $[0, 1]$) проміжок і утворюватиме відкритий окіл $f/_\sim([(0, s)])$ у $S^1 \times [0, 1]$, Оскільки

$$f/_\sim([(0, s)]) = f(0, s) \in f(X \cap (B_\varepsilon(0, s) \cup B_\varepsilon(1, s))) \subset f/_\sim(U),$$

$f/_\sim([(0, s)])$ теж буде внутрішньою точкою $f/_\sim(U)$. Таким чином, $f/_\sim(U)$ відкрита. Тому $f/_\sim$ дійсно відкрите, а отже є гомеоморфізмом згідно з твердженням 14.2. Ми встановили, що $X/_\sim \cong S^1 \times [0, 1]$.

З іншого боку, добуток $S^1 \times [0, 1]$ гомеоморфний замкненому обмеженому еліптичному циліндру в $\mathbb{R}^3$, наприклад, множині $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 =$

$1,\ z \in [0,1]\}$. Це доводиться аналогічно до прикладу 15.2: просто переводимо пару $((x,y),z)$ у точку $(x,y,z)$ циліндра. Отже, склеюючи (тобто ототожнюючи) точки протилежних сторін квадрата за допомогою факторизації, отримуємо циліндр, як на наступному рисунку:

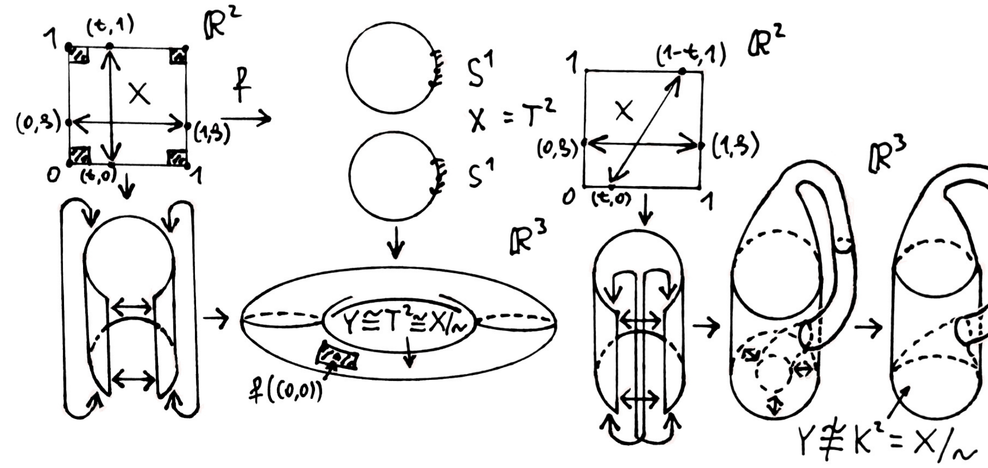



**Приклад 16.2.** Для того ж $X$ нехай $(0,s) \sim (1,1-s)$ для кожного $s \in [0,1]$, інші точки еквівалентні тільки собі. Аналогічно до попереднього прикладу, будуємо підмножину $\mathbb{R}^3$, що гомеоморфна $X/_\sim$, склеюючи точки протилежних сторін квадрата, але тепер перед склеюванням потрібно зробити напівобертання, що відповідає симетрії відносно центру квадрата. Це проілюстровано вище. Простір $X/_\sim$, що при цьому утворюється, зветься (замкненим) *листом Мебіуса*, або *стрічкою Мебіуса*.

**Приклад 16.3.** Тепер нехай $(0,s) \sim (1,s)$ для кожного $s \in [0,1]$, $(t,0) \sim (t,1)$ для кожного $t \in [0,1]$, інші (внутрішні) точки еквівалентні тільки собі. Зауважимо, що тут чотири точки $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ і $(1,1)$ еквівалентні, а інші точки межі квадрата ототожнюються по дві. Аналогічно до прикладу 16.1, можна побудувати відображення $f\colon X \to S^1 \times S^1$:

$$f(t,s) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)),$$

що факторизується у гомеоморфізм $f/_\sim\colon X/_\sim \to S^1 \times S^1 = T^2$ (перевірте це; зауважимо, що окіл для вершин квадрата треба будувати з чотирьох частин), тобто $X/_\sim$ гомеоморфний двовимірному тору. Він, у свою чергу, гомеоморфний поверхні бублика в $\mathbb{R}^3$ (див. приклад 15.3). Наступний рисунок дає уявлення, як отримати з квадрата цю поверхню: спочатку склеюємо квадрат у циліндр, а потім приклеюємо його кінці один до одного.




**Приклад 16.4.** Нарешті, нехай $(0,s) \sim (1,s)$ для кожного $s \in [0,1]$, $(t,0) \sim (1-t,1)$ для кожного $t \in [0,1]$, внутрішні точки квадрата еквівалентні тільки собі. Тут знову вершини квадрата еквівалентні, а інші точки межі квадрата склеюються по дві. Інтуїтивне уявлення про простір $X/_\sim$ можна отримати з ілюстрації вище за аналогією з тором: тепер перед склеюванням кінців циліндра необхідно його вивернути. Зауважимо, що з цієї причини умовне зображення цього простору у вигляді поверхні має самоперетини. Насправді він не вкладається у $\mathbb{R}^3$, на відміну від просторів з попередніх трьох прикладів, тобто не існує множини $Y \subset \mathbb{R}^3$ з індукованою топологією, що гомеоморфна $X/_\sim$. Втім, така множина існує у $\mathbb{R}^4$. Доведення цих фактів виходить за межі даного курсу. Простір $X/_\sim$ зветься *пляшкою Клейна* й інколи позначається $K^2$.

**Зауваження.** У подальшому площину $\mathbb{R}^2$, у якій лежить стандартне коло $S^1$, будемо ототожнювати з комплексною площиною $\mathbb{C}$. Тоді $S^1$ ототожниться з множиною комплексних чисел модуля 1. Тому, наприклад, відображення $f$ з прикладу 16.3 можна записати у більш компактній формі $f(t,s) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s})$ в силу формули Ейлера $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

**Приклад 16.5.** Нехай $A$ – підмножина топологічного простору $X$. Введемо відношення еквівалентності $\sim$ на $X$ наступним чином: усі точки $A$ еквівалентні, усі інші еквівалентні тільки собі. Тоді факторпростір $X/_\sim$ позначається $X/_A$ й інколи зветься факторпростором $X$ за $A$. Інтуїтивно ця факторизація відповідає стягуванню множини $A$ в одну точку. Наприклад, $[0,1]/_{\{0,1\}} \cong S^1$: склеюючи кінці відрізка, отримуємо коло. Це доводиться як у прикладі 16.1 (тільки простіше) за допомогою відображення $f\colon [0,1] \to S^1$: $f(t) = e^{2\pi i t}$. Узагальнимо це спостереження:

**Вправа 16.1.** Далі будемо позначати через $D^n \coloneqq D_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ евклідову замкнену кулю радіуса 1 з центром у початку координат. Очевидно, при $n \geqslant 1$ межею цієї кулі буде $S^{n-1} \subset D^n$. Показати, що $D^n/_{S^{n-1}} \cong S^n$.

# 17 Суми, склеювання і букети

Нехай $X$ та $Y$ – деякі множини. Якщо вони є підмножинами якоїсь множини $Z$ і не перетинаються там, то можемо розглянути їх диз'юнктне об'єднання $X \sqcup Y$. Якщо вони перетинаються, можна доповнити їх елементи "мітками", тобто замінити $X$ та $Y$ на $\{(x, 0) \mid x \in X\}$ та $\{(y, 1) \mid y \in Y\}$ відповідно та розглянути об'єднання цих нових множин, що гарантовано буде диз'юнктним. Аналогічно, для сім'ї $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ довільних множин (у тому числі й таких, що не включаються у спільну множину) можемо визначити їх формальне *диз'юнктне об'єднання* наступним чином:

$$\bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \coloneqq \{(x, \gamma) \mid \gamma \in \Gamma,\, x \in X_\gamma\}.$$

Далі під диз'юнктним об'єднанням множин будемо розуміти саме цю конструкцію. Якщо ці множини наділені топологіями, то топологію їхнього диз'юнктного об'єднання будуватимемо наступним чином:

**Означення 17.1.** *Топологічною сумою* сукупності топологічних просторів $\{(X_\gamma, \mathcal{T}_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ називається множина $\bigsqcup\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ з топологією

$$\mathcal{T} \coloneqq \left\{ \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma \;\middle|\; \forall\, \gamma \in \Gamma\; U_\gamma \in \mathcal{T}_\gamma \right\}.$$

**Вправа 17.1.** Перевірити, що $\mathcal{T}$ з попереднього означення дійсно є топологією. Більш того, це найсильніша топологія на $\bigsqcup\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ з тих, у яких включення

$$i_\gamma\colon X_\gamma \to \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\colon x \mapsto (x, \gamma)$$

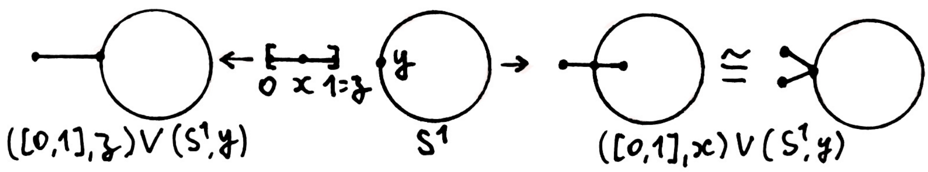
для усіх $\gamma \in \Gamma$ неперервні. Таким чином, це ще один (разом з фактортопологією) приклад фінальної топології.

**Означення 17.2.** Нехай $X$ та $Y$ – топологічні простори, $A \subset X$, і відображення $f\colon A \to Y$ неперервне (відносно індукованої топології $A$). Тоді *склеюванням* просторів $X$ та $Y$ за $f$ називається факторпростір $X \cup_f Y \coloneqq (X \sqcup Y)/_\sim$, де еквівалентність $\sim$ визначається умовою $x \sim f(x)$ для кожної $x \in A$, а інші точки еквівалентні лише собі.

**Приклад 17.1.** Нехай $f = y_0$ – постійне відображення з $A \subset X$ у одноточковий простір $Y = \{y_0\}$. Тоді $X \cup_f Y$ – це результат ототожнення усіх точок $A$ з точкою $y_0$, що гомеоморфний $X/_A$ з прикладу 16.5 (чому?). Так, $S^1$ – це результат склеювання кінців відрізка $[0,1]$ з точкою (або, як ще кажуть, приклеювання точки до кінців цього відрізка).

**Означення 17.3.** *Букетом* топологічних просторів $X$ та $Y$ з відміченими точками $x \in X$ та $y \in Y$ зветься простір $(X,x) \vee (Y,y) \coloneqq X \cup_f Y$, де $f\colon A \to Y$ визначене умовами $A = \{x\}$ і $f(x) = y$.

**Приклад 17.2.** Тобто ми склеюємо відмічені точки. Нижче зображені різні букети відрізка і кола, що залежать від вибору точки відрізка:



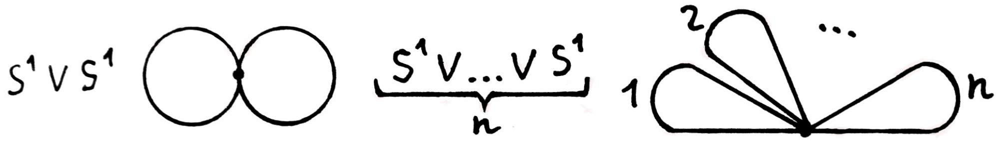

Поняття букета також природним чином узагальнюється на довільну сім'ю просторів:

**Означення 17.4.** *Букетом* сукупності топологічних просторів із відміченими точками $\{(X_\gamma, x_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ зветься факторпростір

$$\bigvee_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma, x_\gamma) \coloneqq \left(\bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right) \Big/ _{\sim},$$

де відношення еквівалентності $\sim$ визначається умовою $x_\gamma \sim x_\delta$ для будь-яких $\gamma, \delta \in \Gamma$, інші точки еквівалентні лише собі.

**Вправа 17.2.** Показати, що букет скінченної сукупності кіл $S^1$ не залежить (з точністю до гомеоморфізма) від вибору відмічених точок. Тому букет $n$ кіл позначається просто $\underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}$. Наприклад, при $n = 2$ це "вісімка" (див. наступну ілюстрацію).




З іншими топологічними конструкціями, що будуються за допомогою факторизації, можна ознайомитися у [10, с. 8-14, с. 17-25 перекладу].

# 18 Дія групи на множині. Простір орбіт

Розглянемо тепер ще один важливий клас факторпросторів. Для цього знадобляться деякі базові поняття та приклади з теорії груп, які за необхідності можна знайти у доповненні (зокрема, означення A.1 та приклади після нього). Як і там, у цьому параграфі, якщо не вказане інше, для груп будуть використовуватися мультиплікативні позначення, тобто групова операція виглядатиме як множення.

**Означення 18.1.** Нехай $G$ – деяка група, а $X$ – множина. *(Лівою) дією* $G$ на $X$ зветься відображення $\lambda\colon G \times X \to X$, що переводить пару $(a, x)$ з елемента групи і елемента множини у $\lambda(a, x) = a \cdot x \in X$ (позначення з точкою будемо використовувати, коли зрозуміло, про яку саме дію йдеться) таке, що:

1. $e \cdot x = x$ для будь-якого $x \in X$, де $e$ – нейтральний елемент (одиниця) $G$.

2. $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$ для будь-яких $a, b \in G$ і $x \in X$.

**Означення 18.2.** Дія називається:

- *ефективною*, якщо для будь-якого $e \neq a \in G$ існує $x \in X$ такий, що $a \cdot x \neq x$;

- *вільною*, якщо $a \cdot x \neq x$ для будь-яких $e \neq a \in G$ і $x \in X$;

- *транзитивною*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ існує $a \in G$ такий, що $a \cdot x = y$.

*Орбітою* елемента $x \in X$ зветься $G \cdot x \coloneqq \{a \cdot x \mid a \in G\}$.

**Зауваження.** Очевидно, вільні дії є ефективними. Транзитивність дії еквівалентна тому, що вся множина $X$ є орбітою будь-якого її елемента: $X = G \cdot x$. Зв'язок з поняттям факторможини стає зрозумілим, коли ми помітимо, що орбіти дії – це класи деякого відношення еквівалентності:

**Твердження 18.1.** *Нехай група $G$ діє на $X$. Введемо відношення $\sim$ на $X$: $x \sim y$, якщо $y \in G \cdot x$. Тоді це відношення еквівалентності, причому класом еквівалентності $x \in X$ є $G \cdot x$.*

**Доведення.** Іншими словами, $x \sim y$ тоді й тільки тоді, коли існує $a \in G$ такий, що $y = a \cdot x$ Перевіримо виконання умов еквівалентності:

- Для будь-якого $x \in X$ за умовою 1. означення дії $x = e \cdot x$, тому $x \sim x$.

- Нехай $x \sim y$, тобто $y = a \cdot x$ для деякого $a \in G$. Діючи на обидві частини цієї рівності оберненим елементом $a^{-1}$, з умов означення дії отримуємо, що

$$a^{-1} \cdot y = a^{-1} \cdot (a \cdot x) = (a^{-1}a) \cdot x = e \cdot x = x,$$

тому $y \sim x$.

- Якщо $x \sim y$ і $y \sim z$, тобто $y = a \cdot x$ і $z = b \cdot y$ для деяких $a, b \in G$, то за умовою 2. означення дії $z = b \cdot (a \cdot x) = (ba) \cdot x$, тому $x \sim z$.

Орбіти тоді є класами еквівалентності за побудовою цього відношення.

■

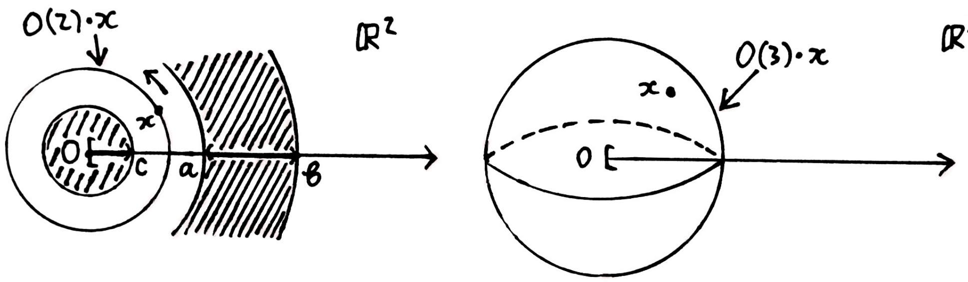
**Означення 18.3.** Нехай група $G$ діє на $X$, а $\sim$ – відношення еквівалентності з попереднього твердження. Тоді факторможина $X/_{\sim}$, тобто множина усіх попарно різних орбіт дії, називається *множиною орбіт* $X$ за (дією) $G$ і позначається $X/_G$. Якщо $X$ – топологічний простір, то $X/_G$ з фактортопологією зветься *простором орбіт.*

**Зауваження.** Більш коректним для лівої дії було б позначення ${}_G\backslash X$, але у нас всі дії такі, тому немає сенсу робити розрізнення. У означенні *правої дії* умова 2. замінюється на $(x \cdot a) \cdot b = x \cdot (ab)$.

**Приклад 18.1.** Нехай $X = \mathbb{R}^n$ (зі стандартною топологією; тут і далі до кінця розділу $n \geqslant 1$), а $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ – *повна лінійна група*, що складається з усіх невироджених $(n \times n)$-матриць з дійсними коефіцієнтами. Операція на цій групі – це матричний добуток, а нейтральний елемент – одинична матриця $E$. Дія визначається умовою $A \cdot x \coloneqq Ax$ для матриці $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ і точки $x \in \mathbb{R}^n$, яку ми вважаємо вектором-стовпчиком. Умови означення дії випливають з властивостей матричного добутку. Ця дія є ефективною, але не вільною (перевірте це). Орбіта точки $x$ має вигляд $\{0\}$ для $x = 0$ і $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ для $x \neq 0$ (чому?), зокрема, дія не транзитивна. Тобто $\mathbb{R}^n/_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})} = \{\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cdot 0, \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cdot x_0\}$ (для довільної $x_0 \neq 0$), а фактортопологія виявляється топологією зв'язної двокрапки $\big\{\varnothing, \mathbb{R}^n/_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}, \{\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cdot x_0\}\big\}$, бо $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ відкрита в $\mathbb{R}^n$, а $\{0\}$ – ні.

**Приклад 18.2.** Для того ж $X = \mathbb{R}^n$ розглянемо *ортогональну групу* $G = \mathrm{O}(n)$. Це підгрупа (див. означення A.3) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, що складається з усіх ортогональних матриць $A$, тобто таких, що $AA^T = A^T A = E$, де

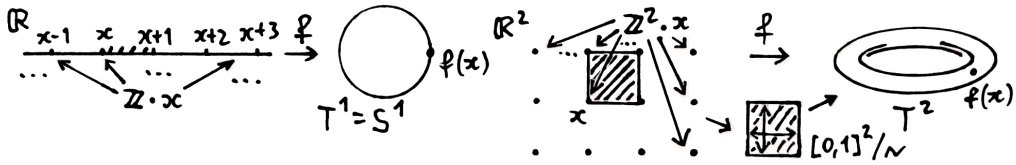
$(\cdot)^T$ – матричне транспонування. Якщо елементи $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ відповідають довільним невиродженим операторам на $\mathbb{R}^n$, то ці матриці – ізометріям евклідової метрики, що зберігають початок координат. Дія визначається як у попередньому прикладі. Вона є ефективною, не вільною (чому?) і не транзитивною: орбіта точки $x \in \mathbb{R}^n$ має вигляд $\mathrm{O}(n) \cdot x = S_{|x|}(0)$, тобто є евклідовою сферою з центром у 0 і радіусом $|x|$, якщо допустити також сфери радіуса 0, що складаються лише з центра (перевірте це). При $n = 2$ і 3 ці орбіти можна побачити на наступному рисунку:




Зокрема, при $n = 2$ цей приклад пояснює походження поняття "орбіта". Простір орбіт $\mathbb{R}^n/_{\mathrm{O}(n)}$ гомеоморфний променю $[0,+\infty) \subset \mathbb{R}$ (з індукованої топологією). Дійсно, розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$: $x \mapsto |x|$. Воно переводить кожну орбіту в одну точку, тобто факторизується у біекцію $\mathbb{R}^n/_{\mathrm{O}(n)} \to [0,+\infty)$. Зауважимо, що у якості бази фактортопології можна обрати множини сфер, радіуси яких містяться у інтервалах $(a,b)$ або напівінтервалах $[0,c)$ (чому?). Прообрази цих множин в $\mathbb{R}^n$ – це відкриті сферичні кільця $B_b(0) \setminus D_a(0)$ і кулі $B_c(0)$ відповідно, що зображені зліва на попередній ілюстрації для випадку $n = 2$. Оскільки факторизоване $f$ переводить ці множини у проміжки $(a,b)$ і $[0,c)$ відповідно, що утворюють базу $[0,+\infty)$, воно є гомеоморфізмом в силу твердження 14.2.

**Приклад 18.3.** Тепер для $X = \mathbb{R}^n$ візьмемо $G = \mathbb{R}^n$ з операцією додавання векторів (див. приклад A.3) та дією паралельними перенесеннями: $a \cdot x \coloneqq x + a$. Очевидно, це дія, вона вільна (зокрема ефективна), бо $x + a \neq x$ при $a \neq 0$, і транзитивна, бо $y = x + (y - x)$ для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}^n$. Отже, простір орбіт $\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}^n}$ є одноточковим.

**Приклад 18.4.** Знову для $X = \mathbb{R}^n$ візьмемо групу наборів з $n$ цілих чисел $G = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ (що теж описана у прикладі A.3) з тією ж дією, що у попередньому прикладі. Вона так само вільна, але вже не транзитивна, бо орбіта довільного елемента має вигляд т. зв. *решітки* (або *ґратки*) $\mathbb{Z}^n \cdot (x^1, \ldots, x^n) = \{(x^1 + a^1, \ldots, x^n + a^n) \mid a^1, \ldots, a^n \in \mathbb{Z}\}$. Див. наступну ілюстрацію для $n = 1$ і 2:




Визначимо відображення $f\colon \mathbb{R}^n \to \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n} = T^n$ у $n$-вимірний тор умовою $f(x^1, \ldots, x^n) = \Big(e^{2\pi i x^1}, \ldots, e^{2\pi i x^n}\Big)$. В силу періодичності тригонометричних функцій, воно переводить усі точки деякої орбіти в одну точку тора (й різні орбіти – в різні точки), тому факторизується у бієкцію $\mathbb{R}^n/_{\mathbb{Z}^n} \to T^n$. Можна сказати, що $f$ "намотує" простір на тор, зокрема, пряму на коло при $n = 1$.

**Вправа 18.1.** Перевірити, що побудоване факторвідображення є гомеоморфізмом, тобто $\mathbb{R}^n/_{\mathbb{Z}^n} \cong T^n$.

Також можна спочатку встановити гомеоморфізм $\mathbb{R}^n/_{\mathbb{Z}^n} \cong [0,1]^n/_\sim$, де $[0,1]^n := \underbrace{[0,1] \times \ldots \times [0,1]}_{n}$ – $n$-вимірний куб, а відношення еквівалентності $\sim$ на ньому визначається таким чином: $(x^1, \ldots, x^n) \sim (y^1, \ldots, y^n)$, якщо для кожного $i = \overline{1,n}$ або $x^i = y^i$, або множина $\{x^i, y^i\} = \{0, 1\}$. Іншими словами, це куб зі склеєними протилежними гранями, шо узагальнює приклади 16.5 при $n = 1$ і 16.3 при $n = 2$ (див. рисунок вище справа). Гомеоморфізм будується як відображення, що переводить орбіту елемента $(x^1, \ldots, x^n)$ у клас еквівалентності точки куба $(\{x^1\}, \ldots, \{x^n\})$, де $\{\cdot\}$ означає дробову частину числа. У свою чергу, $[0,1]^n/_\sim \cong T^n$ аналогічно до згаданих прикладів. Виконайте всі необхідні перевірки самостійно.

**Приклад 18.5.** Нехай $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ з топологією, що індукована стандартною, а $G = \mathbb{R}_* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ з операцією множення – мультиплікативна група поля дійсних чисел з прикладу A.4, що діє на $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ гомотетіями: $\lambda \cdot x := \lambda x$. Ця дія, очевидно, вільна, але не транзитивна: орбітою точки $x \neq 0$ є пряма, що проходить через початок координат та $x$ (але без самого початку координат 0):

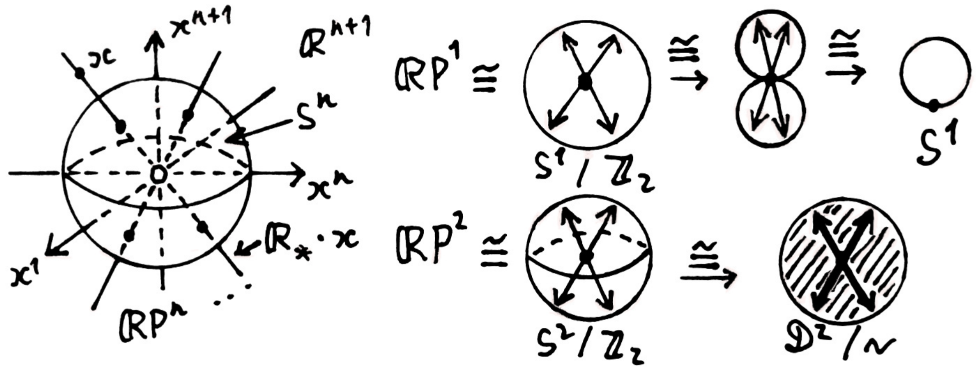
$$(x^1 : \ldots : x^{n+1}) := \mathbb{R}_* \cdot (x^1, \ldots, x^{n+1}) = \big\{(\lambda x^1, \ldots, \lambda x^{n+1}) \bigm| \lambda \neq 0\big\},$$

де для позначення орбіти ми традиційно використовуємо *однорідні координати.* Відповідний простір орбіт $\mathbb{R}P^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/_{\mathbb{R}_*}$ зветься *$n$-вимірним дійсним проєктивним простором.*

Зауважимо, що кожна пряма, що відповідає точці $\mathbb{R}P^n$, перетинає стандартну $n$-вимірну сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ у двох діаметрально протилежних точках. Це дозволяє встановити гомеоморфність $\mathbb{R}P^n$ і фактор-простору, що утворюється з $S^n$ ототожненням пар діаметрально протилежних точок і який також можна описати як простір орбіт $S^n/_{\mathbb{Z}_2}$. Тут групу $\mathbb{Z}_2$ з прикладу A.5 зручно представляти у вигляді $\{1, -1\}$ з операцією множення (бо $[0] \mapsto 1$, $[1] \mapsto -1$ задає ізоморфізм $\mathbb{Z}_2$ на $\{1, -1\}$ у сенсі означення A.2; перевірте це) і брати дію таку ж, як для $\mathbb{R}_*$, тобто нетривіальний елемент $-1$ просто змінює всі точки на діаметрально протилежні: $(-1) \cdot x = -x$. Відповідний гомеоморфізм має вигляд

$$(x^1 : \ldots : x^{n+1}) \mapsto \pm \left( \frac{x^1}{|x|}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{|x|} \right),$$

де вираз справа позначає пару діаметрально протилежних точок $S^n$ (див. ілюстрацію нижче).




**Вправа 18.2.** Показати, що це відображення дійсно є гомеоморфізмом, тобто $\mathbb{R}P^n \cong S^n/_{\mathbb{Z}_2}$.

Далі будемо за потреби ототожнювати ці два простори. Зауважимо, що $\mathbb{R}P^n$ також можна представити у вигляді об'єднання

$$\mathbb{R}P^n = \left\{(x^1 : \ldots : x^{n+1}) \;\middle|\; x^{n+1} \neq 0\right\} \sqcup \left\{(x^1 : \ldots : x^n : 0)\right\}.$$

До цих множин входять прямі, що відповідно не лежать і лежать у гіперплощині $x^{n+1} = 0$. Це відповідає розбиттю сфери $S^n$ на пару відкритих напівсфер і екватор, що є $(n-1)$-вимірною сферою. Перша з цих підмножин $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфна відкритій одиничній кулі $B^n$. Відповідний гомеоморфізм можна побудувати як факторизацію наступного відображення з $S^n \setminus \{x^{n+1} = 0\}$ у $B^n$:

$$(x^1, \ldots, x^{n+1}) \mapsto \left[ \begin{array}{ll} (x^1, \ldots, x^n), & \text{якщо } x^{n+1} > 0; \\ (-x^1, \ldots, -x^n), & \text{якщо } x^{n+1} < 0. \end{array} \right.$$

Тобто точки верхньої напівсфери ортогонально проєктуються на відкриту одиничну кулю у гіперплощині $x^{n+1} = 0$, а точки нижньої – переводяться у діаметрально протилежні точки верхньої, а потім теж проєктуються. Якщо при цьому залишити на місці пари точок екватора, що ототожнюються, ми отримаємо бієкцію між факторпросторами $S^n/_{\mathbb{Z}_2}$ і $D^n/_{\sim}$, де відношення еквівалентності $\sim$ на замкненій одиничній кулі $D^n = B^n \sqcup S^{n-1}$ ототожнює діаметрально протилежні точки його межі $S^{n-1}$, при цьому точки внутрішності $B^n$ еквівалентні лише собі.

**Вправа 18.3.** Показати, що побудована таким чином бієкція є гомеоморфізмом, тобто $S^n/_{\mathbb{Z}_2} \cong D^n/_{\sim}$.

Таким чином, існують три різних описи $\mathbb{R}P^n$ як факторпростору. Зокрема, при $n = 1$ (для *проєктивної прямої* $\mathbb{R}P^1$) маємо $D^1 = [-1, 1]$, і при склеювання кінців цього відрізку отримуємо коло, як у прикладі 16.5: $\mathbb{R}P^1 \cong D^1/_{\sim} \cong S^1$. Ототожнюючи діаметрально протилежні точки кола, тобто знаходячи $S^1/_{\mathbb{Z}_2}$, також отримаємо $S^1$, як показано на рисунку вище. При $n = 2$ *проєктивна площина* $\mathbb{R}P^2 \cong S^2/_{\mathbb{Z}_2} \cong D^2/_{\sim}$ не вкладається в $\mathbb{R}^3$, як і пляшка Клейна з прикладу 16.4 (але теж вкладається в $\mathbb{R}^4$). Детальніше про будову цього простору див., наприклад, у [11, с. 313-321, 340-341, с. 311-319, 338-339 перекладу]. Там же можна знайти пояснення використання терміну "проєктивний".

**Вправа 18.4.** Введемо на $X = [0, 1] \times [0, 1]$ з прикладів 16.1–16.4 відношення еквівалентності наступними умовами: $(0, s) \sim (1, 1 - s)$ для кожного $s \in [0, 1]$, $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$ для кожного $t \in [0, 1]$, внутрішні точки квадрата еквівалентні тільки собі. Показати, що $X/_{\sim} \cong \mathbb{R}P^2$.

**Вправа 18.5.** Описати *n-вимірний комплексний проєктивний простір* $\mathbb{C}P^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/_{\mathbb{C}_*}$ за аналогією з $\mathbb{R}P^n$. Показати, що $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ (підказка: використати стереографічну проєкцію з прикладу 14.5).

# 19 Аксіоми відокремлюваності

У цьому розділі ми ознайомимося з цілою сім'єю корисних топологічних інваріантів, що пов'язані з відокремлюванням точок і множин топологічних просторів.

**Означення 19.1.** Говорять, що топологічний простір $X$ *задовольняє аксіомі* $T_0$ (*Колмогорова*), або є $T_0$-*простором*, якщо для будь-яких різних точок $x, y \in X$, $x \neq y$, існує відкритий окіл $U \ni x$ такий, що $U \not\ni y$ або існує відкритий окіл $U \ni y$ такий, що $U \not\ni x$.

**Приклад 19.1.** Простір з більш ніж одної точки з тривіальною (антидискретною) топологією очевидним чином не задовольняє $T_0$.

**Вправа 19.1.** Навести приклад нетривіальної топології на триточковій множині $X = \{x, y, z\}$ що не задовольняє $T_0$.

**Означення 19.2.** Топологічний простір $X$ *задовольняє аксіомі* $T_1$ (*Тихонова, Фреше*), або є $T_1$*-простором*, якщо для будь-яких різних точок $x, y \in X$, $x \neq y$, існує відкритий окіл $U \ni x$ такий, що $U \not\ni y$.

**Зауваження.** Переставлюючи $x$ та $y$ місцями, отримуємо, що аналогічний окіл існує й для точки $y$. Тому ця нова аксіома сильніша: з $T_1$ випливає $T_0$, але, взагалі кажучи, не навпаки, що демонструють наступні приклади.

**Приклад 19.2.** Топологія зв'язної двокрапки на двоелементній множині $\{\varnothing, \{x\}, \{x, y\}\}$ задовольняє $T_0$, але не $T_1$: у $y$ немає відкритого околу, що не містив би $x$, а для $x$ таким околом є $\{x\}$.

**Приклад 19.3.** Дійсна пряма $\mathbb{R}$ з топологією напівнескінченних інтервалів є $T_0$-, але не $T_1$-простором: якщо $x < y$, то відкритий окіл $(a, +\infty) \ni y$ для $x < a < y$ не містить $x$, але будь-який відкритий окіл $x$ містить $y$.

**Твердження 19.1.** *Простір $X$ задовольняє $T_1$ тоді й тільки тоді, коли одноточкова множина $\{x\}$ є замкненою для кожної $x \in X$.*

**Доведення.** Дійсно, замкненість $\{x\}$ еквівалентна відкритості доповнення $X \setminus \{x\}$, тобто тому, що для будь-якої $y \neq x$ існує її відкритий окіл $U \ni y$ такий, що $U \subset X \setminus \{x\}$. Але це і є умова аксіоми $T_1$.

■

**Наслідок 19.1.** *Простір задовольняє $T_1$ тоді й тільки тоді, коли усі його скінченні підмножини замкнені. Зокрема, кофінітна топологія – найслабша на даній множині з тих, що задовольняють $T_1$.*

**Доведення.** Це випливає з попереднього твердження та замкненості скінченних об'єднань замкнених множин. Таким чином, замкнені множини кофінітної топології на $X$ – скінченні та $X$ – містяться в сукупності замкнених множин будь-якої іншої $T_1$-топології $\mathcal{T}$, а тому кофінітна топологія слабша за $\mathcal{T}$.

■

**Означення 19.3.** Топологічний простір $X$ *задовольняє аксіомі* $T_2$ (*Хаусдорфа*), або є *хаусдорфовим простором*, якщо для будь-яких різних точок $x, y \in X$, $x \neq y$, існують відкриті околи $U \ni x$ і $V \ni y$, що не перетинаються: $U \cap V = \varnothing$.

**Зауваження.** Очевидно, з $T_2$ випливає $T_1$. Але знову, взагалі кажучи, не навпаки:

**Приклад 19.4.** Кофінітна топологія на нескінченній множині задовольняє $T_1$ в силу наслідку 19.1, але не $T_2$, оскільки будь-які дві непорожні відкриті множини перетинаються.

**Приклад 19.5.** Розглянемо дійсну пряму з "подвоєним нулем": $X := (-\infty, 0) \cup \{0_1, 0_2\} \cup (0, +\infty)$. Топологія тут складається з

- відкритих підмножин $\mathbb{R}$ (зі стандартною топологією), що не містять точку 0;

- відкритих підмножин $\mathbb{R}$, де точка 0 замінена на $0_1$;

- відкритих підмножин $\mathbb{R}$, де точка 0 замінена на $0_2$.

Перевірте, що це дійсно топологія і що вона задовольняє $T_1$. Вона не задовольняє $T_2$, бо будь-які відкриті околи точок $0_1$ і $0_2$ перетинаються.

**Твердження 19.2.** *Будь-яка послідовність у хаусдорфовому топологічному просторі має не більше одної границі.*

**Доведення.** Припустимо, що у хаусдорфовому $X$ існує послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, що має принаймні дві різних границі: $x_n \to x$ і $x_n \to y$, де $x \neq y$. Тоді у цих точок існують відкриті околи $U \ni x$ і $V \ni y$, що не перетинаються. Але за означенням границі тоді існують такі натуральні $N$ і $M$, що $x_n \in U$ для $n \geqslant N$ та $x_n \in V$ для $n \geqslant M$, а отже $x_n \in U \cap V$ для будь-якого $n \geqslant \max\{N, M\}$, протиріччя.

$\blacksquare$

**Зауваження.** В умові попереднього твердження аксіоми $T_1$ було б недостатньо, як демонструють простори з двох попередніх прикладів. Дійсно, якщо $X$ – нескінченна множина з кофінітною топологією, то будь-який відкритий окіл будь-якої точки $x \in X$ містить всі елементи будь-якої нескінченної (тобто з нескінченною кількістю попарно різних елементів) послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ крім, можливо, скінченного числа, і тому $x_n \to x$. У просторі ж з прикладу 19.5 точки $0_1$ і $0_2$ є границями послідовності $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$.

**Означення 19.4.** Топологічний простір $X$ *задовольняє аксіомі* $T_3$, якщо для будь-якої точки $x \in X$ і будь-якої замкненої множини $A \subset X$ такої, що $x \notin A$, існують відкриті $U \ni x$ і $V \supset A$, що не перетинаються: $U \cap V = \varnothing$. Простір $X$ зветься *регулярним*, якщо він задовольняє $T_1$ і $T_3$.

**Зауваження.** Відкриту множину $V \supset A$ часто звуть *відкритим околом* $A$. З аксіоми $T_3$ не випливає жодна з попередніх, як демонструє тривіальна топологія. Дійсно, вона задовольняє $T_3$, бо з існування $x \notin A$ для замкненої $A$ випливає $A = \varnothing$, тому умова виконується для $U = X$ і $V = \varnothing$. В умовах вправи 19.1 також можна знайти приклад, який буде задовольняти $T_3$, але не $T_0$, а отже не $T_1$ і не $T_2$ (зробіть це). Саме тому в означенні регулярності виконання $T_1$ вимагається окремо. Якщо для точок $x \neq y$ регулярного простору покласти $A = \{y\}$ (що є замкненою згідно з твердженням 19.1) в умові аксіоми $T_3$, то отримаємо $T_2$. Тому регулярні простори хаусдорфові. Обернене, взагалі кажучи, невірне, бо з $T_2$ не випливає $T_3$:

**Приклад 19.6.** Визначимо топологію на $\mathbb{R}$ базою з усіх множин $U$ і $U \setminus \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, де $U$ відкрита відносно стандартної топології (перевірте виконання умов критерію бази). Вона задовольняє $T_2$, тому що сильніша за стандартну, і не задовольняє $T_3$, бо множина $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ відносно неї замкнена, але будь-який відкритий окіл цієї множини перетинає будь-який відкритий окіл точки 0 (чому?).

**Твердження 19.3.** *Простір $X$ задовольняє $T_3$ тоді й тільки тоді, коли для будь-яких $x \in X$ і відкритої $U \ni x$ існує відкрита $V \ni x$ така, що $\overline{V} \subset U$.*

**Доведення.** $\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай $x$ міститься у відкритій $U$. Тоді $X \setminus U$ замкнена і не містить $x$. Згідно з аксіомою $T_3$, існують відкриті $V \ni x$ і $W \supset X \setminus U$ такі, що $V \bigcap W = \varnothing$. Але тоді $V \subset X \setminus W$, і з монотонності замикання маємо

$$\overline{V} \subset \overline{X \setminus W} = X \setminus W \subset U,$$

де рівність випливає з того, що $X \setminus W$ замкнена, а наступне за нею включення – з $X \setminus U \subset W$.

$\underline{\Leftarrow}$ Тепер маємо $x$, що не міститься у замкненій $A$. Звідси $X \setminus A$ відкрита та містить $x$. За умовою, існує відкрита $V \ni x$ така, що $\overline{V} \subset X \setminus A$, тобто $\overline{V} \bigcap A = \varnothing$. За означенням замикання, тоді для кожної $y \in A$ існує відкрита $W_y \ni y$ така, що $W_y \cap V = \varnothing$. Покладемо $W := \bigcup\limits_{y \in A} W_y$. Це відкрита множина як об'єднання відкритих, $A \subset W$ і $W \cap V = \varnothing$ за побудовою. Це й означає виконання $T_3$.

■

**Означення 19.5.** Топологічний простір $X$ *задовольняє аксіомі* $T_4$, якщо для будь-яких замкнених множин, що не перетинаються, $A, B \subset X$, $A \cap B = \varnothing$, існують їх відкриті околи $U \supset A$ і $V \supset B$, що не перетинаються:

$U \cap V = \varnothing$. Простір $X$ називається *нормальним*, якщо він задовольняє аксіомам $T_1$ і $T_4$.

**Зауваження.** У ситуації аксіоми $T_4$ говорять, що $U$ і $V$ *відокремлюють* $A$ від $B$ (і аналогічно в попередніх аксіомах, коли одна чи обидві множини є точками). Знову ж, небхідність вимагати $T_1$ у означенні нормальності обумовлена тим, що з $T_4$ не випливає жодна з попередніх аксіом. Для $T_0$–$T_2$ це демонструють ті ж приклади, що у попередньому зауваженні. Топологія зв'язної двокрапки з прикладу 19.2 задовольняє $T_4$ тривіальним чином, бо двох непорожніх замкнених множин, що не перетинаються, там не існує, але не задовольняє $T_3$, бо $x$ не відокремлюється від замкненої $\{y\}$. З нормальності виводиться регулярність так само, як з регулярності – хаусдорфовість. Знову-таки, обернена імплікація, взагалі кажучи, невірна, що демонструє наступний приклад:

# Доповнення. Необхідні відомості з алгебри

У цьому розділі будуть наведені потрібні для цього курсу початкові відомості з теорії груп. Детальніше викладення міститься, наприклад, у [4], або частині I книги [7] (гл. 1–3). Зокрема, там можна знайти доведення викладених тут тверджень, але більшість з них неважко перевірити самостійно, що й рекомендується робити у якості вправ.

**Означення A.1.** *Групою* зветься множина $G$ разом з бінарною *груповою операцією*, тобто відображенням $G\times G \to G\colon (a,b)\mapsto ab$, що задовольняє наступним умовам:

- $(ab)c = a(bc)$ для будь-яких $a, b, c \in G$ (*асоціативність* операції);
- існує *нейтральний елемент* (або *одиниця групи*) $e$ такий, що $ae = ea = a$ для будь-якого $a \in G$;
- для будь-якого $a \in G$ існує *обернений елемент* $a^{-1} \in G$ такий, що $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Якщо крім того групова операція *комутативна*, тобто $ab = ba$ для будь-яких $a, b \in G$, то групу $G$ називають *абелевою*.

Як бачимо, групова операція виглядає як множення чисел. Ці позначення називаються *мультиплікативними*, і саме їх ми й будемо тут використовувати. Як і у цьому означенні, одиницю групи будемо у загальному випадку позначати через $e$. Натомість, для абелевих груп часто застосовують *адитивні* позначення, тобто групова операція виглядає як додавання ($(a,b)\mapsto a+b$), нейтральний елемент позначається нулем ($a + 0 = a$ для будь-якого $a \in G$), а обернений виглядає як протилежний (для будь-якого $a \in G$ існує $-a \in G$ такий, що $a + (-a) = 0$). Такий вибір позначень мотивується, зокрема, наступними прикладами. Виконайте для них усі необхідні перевірки самостійно.

**Приклад A.1.** *Тривіальною* зветься група $\{e\}$, що складається лише з одиниці.

**Приклад A.2.** Усі цілі числа з операцією додавання утворюють абелеву групу $\mathbb{Z}$. Це ж вірно для множини дійсних $\mathbb{R}$ чисел з цією операцією, а також для множин елементів будь-якого поля та будь-якого векторного простору з їх відповідними операціями додавання.

**Приклад A.3.** Узагальнимо попередній приклад, розглянувши множини $\mathbb{Z}^n$ і $\mathbb{R}^n$ впорядкованих наборів з $n$ цілих (відповідно, дійсних) чисел. Це абелеві групи з операціями покомпонентного додавання: $(x^1,\ldots,x^n)+(y^1,\ldots,y^n) = (x^1+y^1,\ldots,x^n+y^n)$.

**Приклад A.4.** Усі ненульові дійсні числа з операцією множення теж утворюють абелеву групу $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Це ж вірно для множини ненульових елементів будь-якого поля з його операцією множення (т. зв. *мультиплікативна група поля*). Крім того, абелеву групу утворюють усі додатні дійсні числа з тією ж операцією множення.

**Приклад A.5.** Для будь-якого натурального $n$ будемо вважати цілі числа $k$ і $l$ еквівалентними, якщо вони рівні за модулем $n$: $k \equiv l \mod n$, тобто $k-l$ кратне $n$. Відповідна множина класів еквівалентності позначається $\mathbb{Z}_n$. У якості її елементів зручно розглядати класи еквівалентності перших $n$ цілих невід'ємних чисел: $\mathbb{Z}_n = \{[0], \ldots, [n-1]\}$, де $[k]$ складається з усіх цілих чисел, що мають залишок $k$ при діленні на $n$. Тоді коректно визначена операція додавання $[k] + [l] := [k+l]$, що перетворює $\mathbb{Z}_n$ на абелеву групу з $n$ елементів. Вона зветься *групою залишків за модулем $n$*. Звичайно, група $\mathbb{Z}_1$ тривіальна.

**Приклад A.6.** Для натурального $n$ усі перестановки множини $\{1, \ldots, n\}$ з операцією композиції утворюють скінченну *симетричну групу $S_n$*. При $n \geqslant 3$ вона є неабелевою.

**Означення A.2.** Відображення груп $\alpha\colon G \to H$ зветься їх *гомоморфізмом*, якщо зберігає групову операцію: $\alpha(ab) = \alpha(a)\,\alpha(b)$ для будь-яких $a, b \in G$. Гомоморфізм груп зветься їх *ізоморфізмом*, якщо є біекцією. Якщо існує ізоморфізм $\alpha\colon G \to H$, то говорять, що група $G$ ізоморфна групі $H$ (або що групи $G$ і $H$ ізоморфні). Ми позначатимемо це $G \simeq H$.

З означення також випливає, що гомоморфізм зберігає одиницю групи та обернені елементи: $\alpha(e) = e$ (зауважимо, що тут $e$ зліва й справа позначає, взагалі кажучи, різні елементи: одиниці $G$ і $H$ відповідно), $\alpha(a^{-1}) = \alpha(a)^{-1}$ для будь-якого $a \in G$ (перевірте це). Відображення груп, що обернене до ізоморфізма, теж є ізоморфізмом в силу означень. Ізоморфність є відношенням еквівалентності на множині груп (чому?) та означає, що їх структури фактично однакові з алгебраїчної точки зору. Зокрема, ізоморфізм зберігає абелевість групи.

**Приклад A.7.** Відображення $x \mapsto \ln x$ є ізоморфізмом між групами додатних дійсних чисел з операцією множення та усіх дійсних чисел з операцією додавання, що розглядалися у прикладах A.4 і A.2 відповідно (перевірте це).

**Означення A.3.** Нехай $G$ – деяка група. Підмножина $H \subset G$ зветься *підгрупою $G$*, якщо $ab \in H$ і $a^{-1} \in H$ для будь-яких $a, b \in H$.

Будь-яка підгрупа $H$ групи $G$ містить одиницю $e \in G$ (покажіть це) і з обмеженням на $H$ групової операції сама перетворюється на групу, бо для неї виконані умови означення А.1. Дві умови попереднього означення часто записують як одну: $ab^{-1} \in H$ для будь-яких $a, b \in H$, що є еквівалентною до них (чому?).

**Приклад А.8.** Будь-яка група $G$ містить *тривіальні* підгрупи $\{e\}$ (див. приклад А.1) та $G$.

**Приклад А.9.** Додатні дійсні числа утворюють підгрупу групи ненульових дійсних чисел з прикладу А.4, бо добуток двох додатних чисел і обернене до додатного є додатними. Аналогічним чином підмножина $\mathbb{Z}^n$ у $\mathbb{R}^n$ з прикладу А.3 (зокрема $\mathbb{Z}$ у $\mathbb{R}$) є підгрупою.

# Література


[1] О.А. Борисенко. Диференціальна геометрія і топологія. Х.: Основа, 1995.

[2] Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. Введение в топологию. Издание второе, дополненное. М.: Наука, 1995.

[3] О.Я. Виро, О.А. Иванов, Н.Ю. Нецветаев, В.М. Харламов. Элементарная топология. М.: МЦНМО, 2012.

[4] О.Г. Ганюшкін, О.О. Безущак. Теорія груп: навчальний посібник. Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2005.

[5] А.Я. Дороговцев. Математичний аналіз. Частина 1. Київ: Либідь, 1993.

[6] N. Bourbaki. General Topology. Chapters 1–4. Springer, 1995. Переклад: Н. Бурбаки. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.

[7] D.S. Dummit, R.M. Foote. Abstract Algebra. Third Edition. Wiley, 2004.

[8] C. Kosniowski. A First Course in Algebraic Topology. Cambridge University Press, 1980. Переклад: Ч. Коснёвски. Начальный курс алгебраической топологии. М.: Мир, 1983.

[9] S. Geschke. Convex Open Subsets of $\mathbb{R}^n$ Are Homeomorphic to $n$-dimensional Open Balls. Preprint, Hausdorff Center for Mathematics, July 4 2012.

[10] A. Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2001. Переклад: А. Хатчер. Алгебраическая топология. М.: МЦНМО, 2011.

[11] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen. Geometry and the Imagination. AMS Chelsea, 1999. Переклад: Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.

[12] J.R. Munkres. Topology. Second Edition. Prentice Hall, 2000.

[13] L.A. Steen, J.A. Seebach, Jr. Counterexamples in Topology. Dover Publications, 1995.