$$= \int_c^d \Big(\frac{\partial L}{\partial x^i}\big(\gamma^1(t),\dots,\gamma^n(t),\dot\gamma^1(t),\dots,\dot\gamma^n(t)\big)\mu^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot x^i}\big(\gamma^1(t),\dots,\gamma^n(t),\dot\gamma^1(t),\dots,\dot\gamma^n(t)\big)\dot\mu^i(t)\Big)\,dt = \left[\begin{array}{l}\text{інтегруємо}\\ \text{другу суму}\\ \text{частинами}\end{array}\right] = \int_c^d \Big(\frac{\partial L}{\partial x^i}\big(\gamma(t),\gamma'(t)\big)\mu^i(t) - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot x^i}\big(\gamma(t),\gamma'(t)\big)\Big)\mu^i(t)\Big)\,dt + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot x^i}\big(\gamma(t),\gamma'(t)\big)\mu^i(t)\Big|_c^d}_{0,\ \text{бо } \mu^i(c)=\mu^i(d)=0\ \forall i}.$$

Отже $\forall \mu$ як вище

$$\int_c^d \Big(\frac{\partial L}{\partial x^i}\big(\gamma(t),\gamma'(t)\big) - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot x^i}\big(\gamma(t),\gamma'(t)\big)\Big)\Big)\mu^i(t)\,dt = 0.$$

Обираючи різні μ, отримаємо звідси рівняння Е.-Л. ▲

__Впр.__ Визначимо $E : TM \to \mathbb{R}$ локально як $E := \frac{\partial L}{\partial \dot x^i}\dot x^i - L$. Показати, що вона коректно визначена і що $E(\gamma,\gamma')$ постійна $\forall$ екстремалі γ. E зветься енергією вар. задачі (зокрема, у __Ex. 4__ $E(p,v) = \frac{m}{2}|v|^2 + U(p)$ — повна енергія частинки).

Що таке енергія у задачі про пошук найкоротших?

__Ex. 1.__ Отже, у лок. коорд. $(x^1,\dots,x^n,\dot x^1,\dots,\dot x^n)$ на $\pi^{-1}(U)$, якщо $g|_U = g_{ij}\,dx^i dx^j$, маємо $L = \sqrt{g_{ij}(x^1,\dots,x^n)\dot x^i \dot x^j}$, тому

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2 g_{ik}\dot{x}^i}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Обмежимось рімановим випадком. Нехай γ - <u>регулярна</u> найкоротша. Перейдемо до нат. параметру. Нехай $(x^1,\dots,x^n)$ - лок. задання γ в U. Тоді $\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}=1$ в її точках, і рівн. Е.-Л. набувають вигляду:

$$\frac{d}{dt}\left(g_{ik}\dot{x}^i\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^j\dot{x}^i + g_{ik}\ddot{x}^i$$

Перенесемо все в лівий бік, домножимо на g^{kl}, додамо за k:

$$\underbrace{g_{ik}g^{kl}}_{\delta_i^l}\ddot{x}^i + g^{kl}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j$$

Оскільки $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j$ (просто міняємо індекси місцями):

$\boxed{G \text{ симетрична} \Rightarrow G^{-1} \text{ сим.}}$

$$\ddot{x}^l + \frac{1}{2}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$$

$\boxed{\text{с.к. рім. зв'язності у } (x^1,\dots,x^n)}$

$$\ddot{x}^l + \Gamma^l_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \quad l=\overline{1,n}.$$

Це рівняння геодезичних (нагадаємо, що параметр натуральний)

Сл. Будь-яка регулярна найкоротша внутрішньої метрики рімапового мн. (M, g) є геодезичною.

Зет. Для постійних шляхів це, звичайно, теж так.

Впр. Що буде у субрім. випадку, якщо γ - регулярна, а субрім м-ка - обмеження рімапової?

Ex. 2. Для дії рівняння ті ж (тепер умова натуральності не потрібна), тобто гладкі екстремалі є геодезичними (рім. зв'язності, а отже і рім. м-ка), зокрема регулярними або постійними.

Ex. 4. Для $L = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{n} (\dot{x}^i)^2 - U(x^1, \dots, x^n)$ маємо $\frac{\partial L}{\partial x^i} = -\frac{\partial U}{\partial x^i} = F^i$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}^i$, $i = \overline{1, n}$, тому рівн. Е.-Л.:

$$m\ddot{x} = F \qquad \text{(II закон Ньютона).}$$

Зокрема, при $U = F = 0$ маємо $\ddot{x} = 0$, тобто $x = at + b$ $(a, b \in \mathbb{R}^n)$ - I закон Ньютона. Для сили тяжіння $U = mgx^n$ $\Rightarrow F = (0, \dots, 0, -mg)$, і з $\ddot{x} = (0, \dots, 0, -g)$ маємо $x^i = a^i t + b^i$, $i = \overline{1, n-1}$,

$x^n = -\frac{gt^2}{2} + a^n t + b^n$ (балістична траєкторія). Тут вектори $b = x(0)$, $a = \dot{x}(0)$ – початкові коорд. і швидкість.

Rem. Як і в механіці, у варіаційній задачі на M можна перейти від лагранжевого формулювання (як у нас) до гамільтонового. Це можна зробити, наприклад, за допомогою ріманової м-ии g на M. $\forall q \in M$ розглянемо операцію спускання індексу $(\cdot)^\flat : T_qM \to T_qM^* : v \mapsto v^\flat : v^\flat(w) = g_q(v, w)$ $\forall w \in T_qM$. Визначимо перетворення Лежандра $Le : TM \to TM^*$, де $TM^* := TM^1_0$ – кодотичне розшарування: $Le(q, v) := (q, v^\flat)$.

Впр. $(\cdot)^\flat$ – лін. ізоморфізм $\forall q$, а Le – дифеоморфізм.

Тоді гамільтоніан варіаційної задачі – це

$$\mathcal{H} := E \circ Le^{-1} : TM^* \to \mathbb{R},$$

де E – енергія, що визначена у Впр. вище. Зокрема, $\mathcal{H}$ зберігається на екстремалях. Лок. коорд. TM^* (на $\pi^{-1}(U)$, де U - область лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на M) традиційно позн. $(x^1, \dots, x^n, p^1, \dots, p^n)$, а в точках γ $p = (\dot\gamma)^\flat$ наз. імпульсом.

Втр. (рівняння Гамільтона). В точках екстремалі $\forall$ лок. коорд.

$$\frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i}, \quad \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p^i}, \quad i = \overline{1,n}.$$

У Ex.1. беруть $g = m\langle \cdot, \cdot \rangle$, тоді $p^i = m\dot{x}^i$ задає перетв. Леж., отже $\mathcal{H}(x^1, \dots, x^n, p^1, \dots, p^n) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{n} (p^i)^2 + U(x^1, \dots, x^n)$. Рівняння:

$$m\ddot{x}^i = \frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} = -\frac{\partial U}{\partial x^i} = F^i, \quad i = \overline{1,n} \quad \text{(знову II закон Н.)},$$

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p^i} = \frac{1}{m} p^i, \quad i = \overline{1,n} \quad \text{(завжди вірно)}.$$

У Ex.2. $E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i - L = (2 g_{ij} \dot{x}^j) \dot{x}^i - g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = L$.

Ізоморфізм $T_q M^* \to T_q M$ (для ріманового випадку), що обернений до $(\cdot)^\flat$, позначається $(\cdot)^\sharp$ (підйом індексу). Тоді $Le^{-1} : (q, p) \mapsto (q, p^\sharp)$, і $\mathcal{H}(q, p) = E(q, p^\sharp) = L(q, p^\sharp) = g_q(p^\sharp, p^\sharp)$ $(= \hat{g}_q(p, p)$, де $\hat{g}$ - кометрика, див. одну з вправ вище) $\forall (q, p) \in TM^*$.

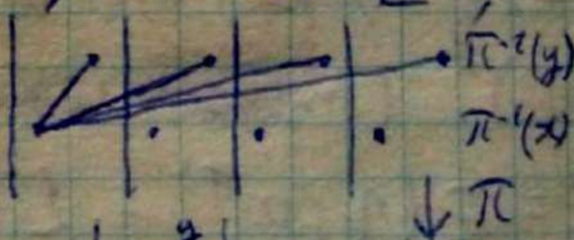
Втр. У рімановому випадку рівн. Гамільтона - це знову рівняння геод. Саме за допомогою рівн. Гамільтона зазвичай визначають об'ріманові геодезичні.

(у цьому випадку все обмежується на підмноговиди TM і TM^*, що відповідають розподілу).

<u>Rem.</u> Рівняння Е.-Л. дають необхідні, але не достатні умови (вони навіть не відрізняють $L(\gamma) \leq L(\mu)\ \forall \mu$ від $L(\gamma) \geq L(\mu)\ \forall \mu$). Наприклад, для ріманових найкоротших:

– на S^n геодезична (шлях) довжини $<\pi$ – єдина найкоротша, що з'єднує кінці, $=\pi$ – найкор., але не єдина (точки діам. протилежні, їх безліч), $>\pi$ – не найкоротша.

– прямий циліндр $M = S^1 \times \mathbb{R}$ в E^3 лок. ізометричний E^2, його геодезичні шляхи – образи відрізків прямих під дією лок. ізом. проекції $\pi : E^2 \to M : (u,v) \mapsto (e^{iu}, v)$ $(=(\cos u, \sin u, v))$ (Впр.), тому $\forall\, x \neq y\ \exists$ безліч геодезичних, що їх поєднують (гвинтові), але лише 1 найкоротша (2, якщо точки проектуються в діам. прот. на S^1).



Ріманове експоненційне відображення

(M, g) - k-гл. рімановий мн., $k \geq 3$, $\dim M = n$, ∇ - рім. зв. g.
Для фіксованої $p \in M$ $\forall v \in T_pM$ позначимо через $\gamma_v \in C^k((-\varepsilon, \varepsilon), M)$ геодезичну, що проходить через p у напрямку v: $\gamma_v(0) = p$, $\gamma_v'(0) = v$ (єдину таку на цьому проміжку; тут $\varepsilon > 0$ також залежить від v (і p)).

<u>Lem. 1.</u> $\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$ ($\forall t$ і $\lambda \in \mathbb{R}$ таких, що обидва боки визначені)

▷ При $\lambda = 0$: $\gamma_0(t) = p = \gamma_v(0)$ (бо γ_0 - постійна).
При $\lambda \neq 0$: γ_v - геод. $\Rightarrow \mu(t) := \gamma_v(\lambda t)$ теж визначає геодезичну. Дійсно, нат. параметру γ_v відповідає пар. з постійною $|\mu'|$ у μ, і $\nabla_{\gamma_v'} \gamma_v' = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\mu'} \mu' = 0$. При цьому $\mu(0) = \gamma_v(0) = p = \gamma_{\lambda v}(0)$, $\mu'(0) = \lambda \gamma_v'(0) = \lambda v = \gamma_{\lambda v}'(0)$. За єдиністю, $\mu = \gamma_{\lambda v}$. ◭

<u>Рч. 1</u> $\forall p \in M$ $\exists \varepsilon > 0$ таке, що $\forall v \in T_pM$ з $|v| < \varepsilon$ $\exists$ геодезична $\gamma_v \in C^k((-2, 2), M)$: $\gamma_v(0) = p$, $\gamma_v'(0) = v$.

⊳ Нехай (U,φ) – карта з лок. коорд. $(x^1,\dots,x^n)$, $p\in U$, $\varphi(p)=(0,\dots,0)$, $g|_U=g_{ij}dx^i dx^j$, а $\{\Gamma^k_{ij}\}_{i,j,k=1}^n$ – симв. К. річ. зв. ∇. Для якогось $a>0$ покладемо $D:=\varphi^{-1}(\underbrace{[-a,a]\times\dots\times[-a,a]}_{n})\subset U$ – компакт. Тоді Γ^k_{ij} рівномірно обмежені на D: $\exists\, C>0$: $|\Gamma^k_{ij}|_D|\le C$ $\forall\, i,j,k=\overline{1,n}$ (бо (k-2)-гл., $k\geqslant 3$, D – комп.). Тепер λ, що ставить у відп. $q\in U$ найменше власне значення $G(q)=(g_{ij}(q))_{i,j=1}^n$, приймає на D найменше знач. $\lambda_0>0$ (бо $\lambda>0$). Нехай $(\gamma^1,\dots,\gamma^n)$ – лок. зад. γ_v. Тоді $\forall\, i=\overline{1,n}$ $\gamma^i(0)=0$ і

$$|(\gamma^i)'|\le\sqrt{\sum_{j=1}^n((\gamma^j)')^2}\le\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\sqrt{g_{ij}(\gamma^i)'(\gamma^j)'}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}|\gamma_v'|=\left[\begin{matrix}\text{див. власт.}\\ \text{геод.}\end{matrix}\right]=\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}|v|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_0}}$$

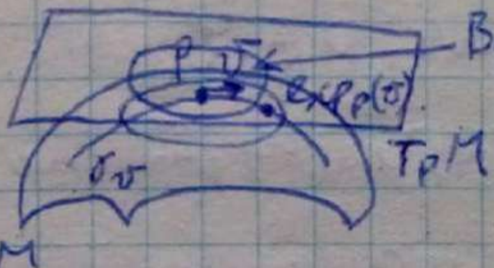
Тоді $\forall\, i=\overline{1,n}$ і $\forall\, t$ з області визначення γ_v: $\boxed{\text{тобто } <\frac{\varepsilon|t|}{\sqrt{\lambda_0}}}$

$$|\gamma^i(t)|=\left|\int_0^t(\gamma^i)'(\tau)\,d\tau\right|\le\int_0^t|(\gamma^i)'(\tau)|\,d\tau<\frac{\varepsilon t}{\sqrt{\lambda_0}}$$

при $t\geqslant 0$ і ан-но $<-\frac{\varepsilon t}{\sqrt{\lambda_0}}$, $t<0$.

Отже, якщо $\varepsilon\le\frac{a\sqrt{\lambda_0}}{2}$, то при $|t|<2$ $|\gamma^i(t)|<a$, і крива не вийде за межі D. В силу рівн. обмеженості на D коеф. рівняння геодезичної, їх розв'язок γ_v існує на $(-2,2)$. ◁

Def. Експоненційним відображенням у $p \in M$ зветься
$\exp_p : v \in T_pM \mapsto \gamma_v(1)$.



Rem. В силу Pr.1, $\exp_p$ визначене принаймні на $B_\varepsilon(0)$, де ε – з цього Pr. Тут і далі кулі та сфери у T_pM – відн. g_p (її норми).

Lem.2. $\exp_p$ k-гл. на області визн., $\exp_p(0) = p$ і $d_0 \exp_p = id_{T_pM}$.

▷ Гладкість випл. з гладкої залежності розв'язків системи ЗДР від початкових умов. $\gamma_0(t) = p$ – постійна, тому $\exp_p(0) = \gamma_0(1) = p$. $d_0 \exp_p : T_0 B_\varepsilon(0) \to T_pM$, дотичний простір до відкр. підмножини T_pM ототожнимо з ним самим. Тоді

$$d_0 \exp_p(v) = \left[\begin{array}{l} t \mapsto tv \text{ прох.} \\ \text{через } 0 \text{ в напр.} \\ v \text{ у } B_\varepsilon(0) \end{array}\right] = (\exp_p(tv))'_{t=0} = (\gamma_{tv}(1))'_{t=0} = [\text{Lem.1}] =$$
$$= (\gamma_v(t))'_{t=0} = v \quad \forall v \in T_pM. \;◁$$

Cor.1. $\exp_p$ – лок. дифеоморфізм в 0 окіл (бо $d_0 \exp_p$ невироджений), тобто $\exists$ відкр. $U \ni p$ в M така, що $\exp_p : \exp_p^{-1}(U) \to U$ – дифео-зм (зокрема, $\exp_p^{-1}(U)$ – відкр. окіл 0 в T_pM).

Rem. Детальніше про лок. дифеоморфізми див. геометрію підмноговидів. Тут використані лок. коорд. і теорема про обернене відображення.

def. Окіл U з **Cor. 1.** зветься нормальним околом $p \in M$.

Rem. $0 \in \exp_p^{-1}(U)$ - відкр. $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(0) \subset \exp_p^{-1}(U)$, тобто $\exp_p : B_\varepsilon(0) \to B^N_\varepsilon(p) := \exp_p(B_\varepsilon(0))$ - дифео-зм (зокрема, $B^N_\varepsilon(p)$ - відкр. окіл p).

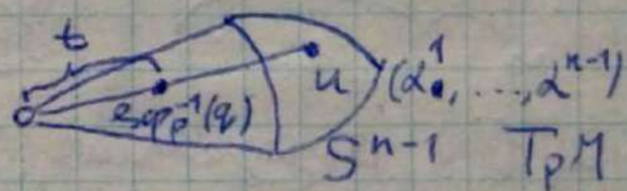
def. $B^N_\varepsilon(p)$ зветься кульовим нормальним околом $p \in M$.

Rem. **Lem. 1** $\Rightarrow \gamma_v(t) = \gamma_{tv}(1) = \exp_p(tv)$ ($\forall\, t, v$: це визначено).

Оберемо в T_pM якийсь ортонормований (відн. g_p) базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ і $\forall\, q \in B^N_\varepsilon(p)$ розкладемо $\exp_p^{-1}(q) = q^i e_i$, тоді $(q^1, \dots, q^n)$ - точка евкл. кулі $B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$. Це координати на $B^N_\varepsilon(p)$. Відп. карта узгоджена з гл. стр. M, бо $q \mapsto (q^1, \dots, q^n)$ k-гл. в силу k-гладкості $\exp_p^{-1}$. Якщо $v = v^i e_i$, то $\exp_p^{-1}(\gamma_v(t)) = tv = (tv^i) e_i$, тобто γ_v має лок. задання $t \mapsto (tv^1, \dots, tv^n)$.

def. Ці координати на $B^N_\varepsilon(p)$ називають нормальними.

Rem. Тепер представимо для $q\in B^N_\varepsilon(p)$ прообраз $\exp_p^{-1}(q)$ як tu, де $t=|\exp_p^{-1}(q)|$ і $|u|=1$ при $t>0$ (тобто $u\in S_1(0)=:S^{n-1}\subset T_pM$). В околі u введемо на S^{n-1} коорд. $\alpha^1,\dots,\alpha^{n-1}$ (ця S^{n-1} дифеоморфна стандартній). Отримаємо координати $(t,\alpha^1,\dots,\alpha^{n-1})$ в околі $q\neq p$ — аналог полярних. Точніше, вони задані на образі в $B^N_\varepsilon(p)$ конуса над областю визн. $(\alpha^1,\dots,\alpha^{n-1})$ з виколотою вершиною. У цій с.к. лок. задання γ_v:

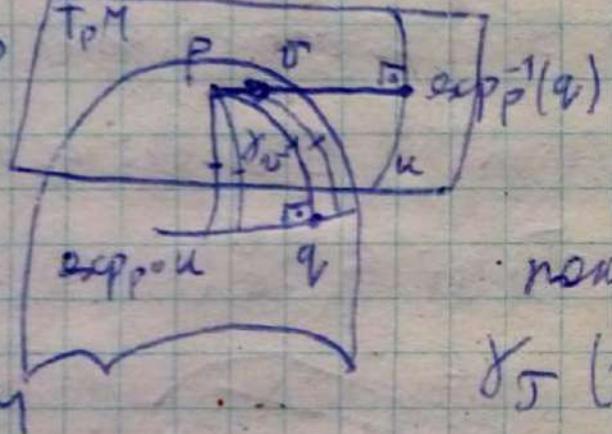


$t\mapsto(t|v|,\alpha^1_0,\dots,\alpha^{n-1}_0)$ при $t\geq 0$ (де $(\alpha^1_0,\dots,\alpha^{n-1}_0)$ — коорд. $\frac{v}{|v|}\in S^{n-1}$) (і $(-t|v|,\alpha^1_1,\dots,\alpha^{n-1}_1)$ при $t<0$, де $(\alpha^1_1,\dots,\alpha^{n-1}_1)$ — т. S^{n-1}, що діаметрально протил. $(\alpha^1_0,\dots,\alpha^{n-1}_0)$).

def. $(t,\alpha^1,\dots,\alpha^{n-1})$ звуться напівгеодезичними координатами.

Впр. Відп. карта теж узгоджена з гл. стр. M.

Тв. 2 (лема Гаусса). $\forall q\in B^N_\varepsilon(p)$, $q\neq p$ нехай $q=\gamma_v(t_0)=\exp_p(u(0))$ — точка перетину γ_v і $\exp_p\circ u$, де $u\in C^k((-\delta,\delta),S^{n-1}_r)$ — крива на сфері $S^{n-1}_r := S_r(0) \subset T_pM$ (відн. g_p) з центром в 0 радіуса $r = |\exp_p^{-1}(q)|$. Тоді γ_v і $\exp_p \circ u$ ортогональні в q, тобто $g_q(\gamma_v'(t_0), (\exp_p \circ u)'(0)) = 0$.

▷ 

Детальне доведення див. у одній з тем пізніше.

Ідея: вважаючи, що γ_v нат. пар. (тобто $|v|=1$), покладемо для $t \in [0, r]$ і $\tau \in (-\delta, \delta)$

$\gamma_\tau(t) := \exp_p\left(t \frac{u(\tau)}{r}\right)$ (варіація). Це $\forall \tau$ крива в $B^N_\varepsilon(p)$, геодезична, $\gamma_0 = \gamma_v$, і вони усі мають довжину r. Диференціюючи вираз для довжини за τ і перетворюючи, отримуємо, що

$g_q(\gamma_v'(\underset{t_0}{r}), (\exp_p \circ u)'(0)) = 0$. ◭

Rem. Тобто в $B^N_\varepsilon(p)$ геодезичні, що виходять з p, ортогональні експоненційним образам гіперсфер T_pM з центром в 0.

Сч. 2. У напівгеодезичних координатах g має вигляд

$$g = dt^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} G_{ij}\, dx^i dx^j.$$

$\triangleright$ $t \mapsto (t, \alpha_0^1, \dots, \alpha_0^{n-1})$ - нат. параметризована геодезична, її дот. вектор - довжини 1: $g_{11} = g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 1$. В силу Рч.2, вона ортогональна до кривих $\alpha \mapsto (t_0, \alpha_0^1, \dots, \underset{i}{\alpha}, \dots, \alpha_0^{n-1})$, що лежать в образах гіперсфер T_pM, тобто $\frac{\partial}{\partial t} \perp \frac{\partial}{\partial \alpha^i}$ $\forall i = \overline{1, n-1}$, і відп. коеф. $=0$ $\triangleleft$

Впр. Що можна сказати про вигляд м-ки у нормальних коорд.?

Рч.3 $\forall p \in M$ $\exists$ відкр. $U \ni p$ і $\delta > 0$ такі, що $\forall q \in U$ $U \subset B_\delta^N(q)$.

$\triangleright$ З доведення Рч.1 можна вивести, що для деякої відкр. з компактним замиканням $V \ni p$ (що міститься у деякому коорд. околі $\overset{(U)}{p}$) $\exists\, \varepsilon > 0$: $\exp_q$ визначене на $B_\varepsilon(0) \subset T_qM$ $\forall q \in V$ (наприклад, для $V = \operatorname{Int} D$ з того доведення). Дійсно, провівши міркування з доведення Рч.1. для кожної точки V, отримаємо $\varepsilon = \frac{a\sqrt{r_0}}{2}$, де a - фікс., а r_0 непер. залежить від точки, після цього перейдемо до найменшого значення на компакті $\overline{V}$. Тоді $\tilde{V} := \{(q, v) \in TM \mid q \in V, v \in B_\varepsilon(0) \subset T_qM\}$ - відкр. окіл $(p, 0)$ у TM, і на ньому визначене $F: \tilde{V} \to M \times M$:

$(q, v) \mapsto (q, \exp_q v)$. Воно k-гладке в силу гладкої залежності розв'язку системи ЗДР від початкових умов. Оскільки $d_0 \exp_q = id_{T_qM}$, м-ця Якобі F у $(p,0)$ має вигляд $\left(\begin{array}{c|c} I & C \\ \hline A & I \end{array}\right)$, тобто $d_{(p,0)}F$ невироджений: F — лок. дифеоморфізм в околі $(p,0)$ (ан-но $\exp_p$ вище): $\exists$ відкр. $\tilde{W} \ni (p,0)$ $(i\ \tilde{W} \subset \tilde{V})$: $F: \tilde{W} \to F(\tilde{W})$ — дифео-зм, зокрема $F(\tilde{W})$ — відкр. окіл $F(p,0) = (p,p)$. Оскільки у TM прообраз коорд. околу $\pi^{-1}(\hat{U})$ гомеоморфний $\hat{U} \times \mathbb{R}^n$, $\tilde{W}$ містить відкр. окіл $(p,0)$ вигляду $\{(q,v) \in TM \mid q \in W, v \in B_\delta(0) \subset T_qM\}$, де W — відкр. в M, $p \in W$, $W \subset V$, $\delta > 0$. У свою чергу, образ цього околу під дією F — відкр. окіл (p,p) $(\subset F(\tilde{W}))$, тому містить окіл вигляду $U \times U$, де $p \in U$ — відкр. Тоді $\forall\, q, r \in U$ $F^{-1}(q, r) = (q, v)$, де $\exp_q v = r$, $v \in B_\delta(0) \subset T_qM$. При цьому $\exp_q: B_\delta(0) \to \exp_q(B_\delta(0)) =: B^N_\delta(q)$ — дифео-зм як $F(q, \cdot)$, тому $B^N_\delta(q)$ — кульовий норм. окіл. Тобто $r \in B^N_\delta(q)$. Т.ч., $U \subset B^N_\delta(q)$. ▲