Перевіряємо опис геодезичних H^n з лекції.

$$g = \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2.$$

—

Символи Крістоффеля для діагонального випадку: нехай $g = g_{ij}\, dx^i dx^j$, $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тоді $G = \begin{pmatrix} g_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{g_{nn}} \end{pmatrix}, \text{ тобто } g^{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{1}{g_{ii}}, & i = j \end{cases}$$

Тоді $\forall\, i = \overline{1,n}$

$$\Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} \right) = \left[\begin{matrix} \text{єдиний} \neq 0 \\ \text{доданок при} \\ j = i \end{matrix} \right] = \frac{1}{2 g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}.$$

$\forall\, i \neq j = \overline{1,n}$:

$$\Gamma^i_{ij} = \Gamma^i_{ji} = \frac{1}{2} g^{ik} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) = [k = i] = \frac{1}{2 g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}.$$

$$\Gamma^j_{ii} = \frac{1}{2} g^{jk} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \right) = [k = j] = -\frac{1}{2 g_{jj}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}.$$

Для попарно різних $i, j, k = \overline{1,n}$:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) = [k = l] = 0$$

У нас $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{(x^n)^2}$, тому:

$$\Gamma^i_{ii} = \begin{cases} 0, & i = \overline{1,n-1} \\ \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{(x^n)^2}} \left(-2 \frac{1}{(x^n)^3} \right) = -\frac{1}{x^n}, & i = n \end{cases}$$

$$\Gamma^i_{ij} = \begin{cases} 0, & j = \overline{1,n-1} \\ -\frac{1}{x^n}, & j = n,\ i = \overline{1,n-1} \end{cases} \quad (= \Gamma^i_{ji})$$

$$\Gamma^j_{ii} = \begin{cases} 0, & j = \overline{1,n-1} \\ \frac{1}{x^n}, & j = n,\ i = \overline{1,n-1} \end{cases}$$

Рівн. геодезичних:

$$(x^k)'' + \Gamma^k_{ij} (x^i)'(x^j)' = 0, \quad k = \overline{1,n}$$

У нас:

$$\begin{cases} (x^1)'' - \frac{2}{x^n} (x^1)'(x^n)' = 0 \\ \dots \\ (x^{n-1})'' - \frac{2}{x^n} (x^{n-1})'(x^n)' = 0 \\ (x^n)'' + \frac{1}{x^n} \left((x^1)'^2 + \dots + (x^{n-1})'^2 - (x^n)'^2 \right) = 0 \end{cases}$$

$\forall\, i = \overline{1,n-1}$:

$$(x^i)'' = \frac{2}{x^n} (x^i)'(x^n)'$$

$$\frac{(x^i)''}{(x^i)'} = 2 \frac{(x^n)'}{x^n}$$

$$\ln|(x^i)'| = 2\ln x^n + K_i$$
$$(x^i)' = C_i (x^n)^2$$

Підставимо в останнє:

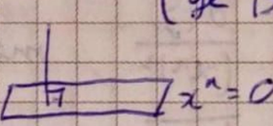
$$(x^n)'' + \frac{1}{x^n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} C_i^2 (x^n)^4 - (x^n)'^2\right) = 0$$
$$\frac{(x^n)'' x^n - (x^n)'^2}{(x^n)^2} = -\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} C_i^2\right)}_{C}(x^n)^2$$

$$\left(\frac{(x^n)'}{x^n}\right)' = -C(x^n)^2$$
$$(\ln x^n)'' = -C(x^n)^2$$

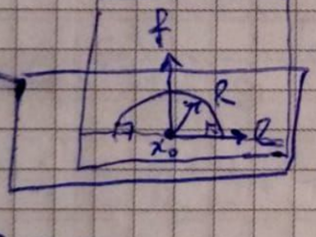
(наприклад якщо дано, що $\gamma(0)=(0,\dots,0,1)$, тобто $(x^i)'(0)=0$, $i=\overline{1,n-1}$)

Зокрема, при $C_1 = \dots = C_{n-1} = 0$ $\quad (x^i)' = 0 \Rightarrow x^i = x_0^i$ для $i=\overline{1,n-1}$,
і $C=0 \Rightarrow (\ln x^n)'' = 0 \Rightarrow x^n = e^{As+B}$ (де $B = \ln x^n(0)$, $A = (x^n)'(0)$)

Це вертикальні напівпрямі



Ми знаємо відповідь і для $C \neq 0$: це повинне бути напівколо, що ортогональне абсолюту $\{x^n=0\}$.



Нехай його центр – т. $x_0 = (x_0^1,\dots,x_0^{n-1},0)$, і воно лежить у площині з евклідовим ортон. базисом $\{e = (e^1,\dots,e^{n-1},0),\ f = (0,\dots,0,1)\}$.

Тоді його параметризація: $\gamma(t) = x_0 + R\cos t\, e + R\sin t\, f$ (R-радіус):

$$\gamma(t) = (x_0^1 + R\cos t\cdot e^1, \dots, x_0^{n-1} + R\cos t\cdot e^{n-1}, R\sin t), \quad t\in(0;\pi)$$

Знайдемо нат. параметр (з початком $t=\frac{\pi}{2}$):

$$s(t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\sqrt{\frac{1}{R^2\sin^2\tau}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(-R\sin\tau\, e^i)^2 + R^2\cos^2\tau\right)}\,d\tau \underset{\sin\tau>0}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\frac{d\tau}{\sin\tau} =$$

$$= \ln\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{t} = \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$

Отже, $t = 2\operatorname{arctg} e^s$.

$$\gamma(s) = x_0 + R\cos(2\operatorname{arctg} e^s)\,e + R\sin(2\operatorname{arctg} e^s)\,f =$$
$$= x_0 + R\frac{1-e^{2s}}{1+e^{2s}}\,e + R\frac{2e^s}{1+e^{2s}}\,f = x_0 + R\frac{e^{-s}-e^s}{e^{-s}+e^s}\,e + R\frac{2}{e^{-s}+e^s}\,f =$$
$$= x_0 - R\operatorname{th}s\; e + \frac{R}{\operatorname{ch}s}\,f$$

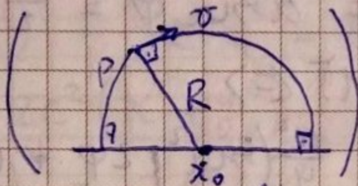
Отже, $x^i = x_0^i - R\,\mathrm{th}\,s\, e^i$, $i=\overline{1,n-1}$; $x^n = \frac{R}{\mathrm{ch}\,s}$.

$i=\overline{1,n-1}$: $(x^i)' = -\frac{R}{\mathrm{ch}^2 s} e^i = -\frac{e^i}{R}(x^n)^2 \Rightarrow C_i = -\frac{e^i}{R}$.

Тоді $C = \sum_i C_i^2 = \frac{1}{R^2}\sum_i (e^i)^2 = \frac{1}{R^2}$. І дійсно,

$$(\ln x^n)'' = \left(\ln \frac{R}{\mathrm{ch}\,s}\right)'' = (\ln R - \ln \mathrm{ch}\,s)'' = -(\mathrm{th}\,s)' = \frac{-1}{\mathrm{ch}^2 s} = -\frac{1}{R^2}(x^n)^2.$$

(не верт.)

Оскільки через ∀ точку P у напрямку ∀ вектора v можна провести таку геод. (), за єдиністю, інших немає.

Натуральний s змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, отже всі геод. повні (і H^n повний)

Паралельно перенесемо $v=(v^1,\dots,v^n)$ у H^n з $(x_0^1,\dots,x_0^{n-1},1)$ у $(x_0^1,\dots,x_0^{n-1},x_0^n)$ уздовж геодезичної $\gamma: t\mapsto(x_0^1,\dots,x_0^{n-1},t)$ (цей параметр - не натуральний, нат. - $s=\ln t + C$).

Рівняння паралельного поля $X(t)=(X^1(t),\dots,X^n(t))$ уздовж γ:

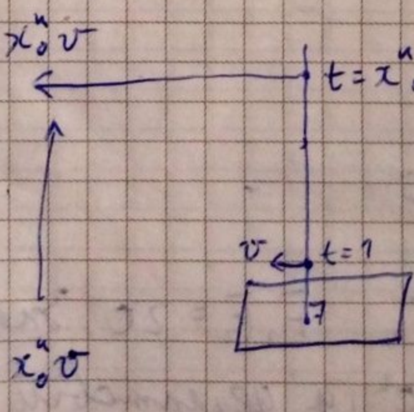
$$(X^k)' + \Gamma^k_{ij}(\gamma^i)' X^j = 0, \quad k=\overline{1,n}$$

у $(\gamma^1(t),\dots,\gamma^n(t))$

У нас:

$$\begin{cases} (X^1)' - \frac{1}{\gamma^n}\left((\gamma^1)'X^n + (\gamma^n)'X^1\right) = 0 \\ \dots \\ (X^{n-1})' - \frac{1}{\gamma^n}\left((\gamma^{n-1})'X^n + (\gamma^n)'X^{n-1}\right) = 0 \\ (X^n)' + \frac{1}{\gamma^n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(\gamma^i)'X^i - (\gamma^n)'X^n\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (X^1)' - \frac{1}{t}X^1 = 0 \\ \dots \\ (X^{n-1})' - \frac{1}{t}X^{n-1} = 0 \\ (X^n)' - \frac{1}{t}X^n = 0 \end{cases}$$



Отже, ∀ i $(X^i)' = \frac{X^i}{t}$

$$\frac{(X^i)'}{X^i} = \frac{1}{t}$$

$$\ln|X^i| = \ln t + K_i$$

$$X^i = C_i t$$

$= x_0^n v$

При $t=1$: $X(1)=v$, тобто $C_i = v^i$, $i=\overline{1,n}$, тому при $t=x_0^n$: $X(x_0^n) = (v^1 x_0^n, \dots, v^n x_0^n)$ - результат пар. перенесення.