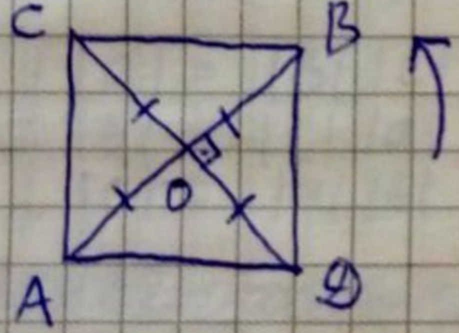
157 – використати 155.

166. ACBD – квадрат, $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$. Знайти C, D.



Центр квадрата: $O\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2-4}{2}\right) = (1, -1)$.

$\overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}(8, -6) = (4, -3)$

Для орієнт. як на рисунку з задачі 155:

$\overline{OC} = (3, 4) \Rightarrow C = O + \overline{OC} = (4, 3)$

$\overline{OD} = (-3, -4) \Rightarrow D = O + \overline{OD} = (-2, -5)$

178. $a=(8,4,1)$, $b=(2,-2,1)$, $c=(1,1,1)$. Знайти d: $|d|=1$, d компланарний a і b, $d \perp c$, $\{a,b,c\}$ і $\{a,d,c\}$ протилежно орієнт. Коорд. дек.

(як у 151)

Можна шукати $d=\lambda a+\mu b$. Або:

$d=(x,y,z)$

$1=|d|^2=x^2+y^2+z^2$

$$0=\begin{vmatrix}8&4&1\\2&-2&1\\x&y&z\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}4&1\\-2&1\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}8&1\\2&1\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}8&4\\2&-2\end{vmatrix}=6x-6y-24z$$

$0=(c,d)=x+y+z$

$$\begin{vmatrix}8&4&1\\2&-2&1\\1&1&1\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}-2&1\\1&1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2&-2\\1&1\end{vmatrix}=-24-4+4<0 \Rightarrow$$

$$0<\begin{vmatrix}8&4&1\\x&y&z\\1&1&1\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}y&z\\1&1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}x&z\\1&1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}x&y\\1&1\end{vmatrix}=8(y-z)-4(x-z)+x-y$$

$=7y-4z-3x.$

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x-y-4z=0\\x+y+z=0\\-3x+7y-4z>0\end{cases}$$

З 2 і 3: $2x-3z=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}z$

$2y+5z=0 \Rightarrow y=-\frac{5}{2}z.$

$\left(\frac{3}{2}z\right)^2+\left(-\frac{5}{2}z\right)^2+z^2=1$

$\frac{38}{4}z^2=1$

$z=\pm\frac{2}{\sqrt{38}} \Rightarrow x=\pm\frac{3}{\sqrt{38}},\ y=\mp\frac{5}{\sqrt{38}}.$

$-3x+7y-4z=\frac{1}{\sqrt{38}}(\mp 9\mp 35\mp 2)$. Щоб було >0, треба брати нижній знак: $d=\left(-\frac{3}{\sqrt{38}},\frac{5}{\sqrt{38}},-\frac{2}{\sqrt{38}}\right).$

183. $a=(11,10,2)$, $b=(4,0,3)$. Знайти c: $|c|=1$, $c\perp a$, $c\perp b$, $\{a,b,c\}>0$ орієнт. Коорд. дек.

Для $c=(x,y,z)$ як раніше:
$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\11x+10y+2z=0\\4x+3z=0\end{cases}$$

$$0 < \begin{vmatrix} 11 & 10 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 11 & 10 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 30x - 25y - 40z$$

Тобто $z = -\frac{4}{3}x, \quad y = -\frac{1}{10}(11x + 2z) = -\frac{1}{10}\left(11 - \frac{8}{3}\right)x = -\frac{25}{30}x = -\frac{5}{6}x.$

$$x^2 + \left(-\frac{4}{3}x\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}x\right)^2 = 1$$

$$\frac{125}{36}x^2 = 1$$

$$x = \pm\frac{6}{5\sqrt{5}}, \quad y = \mp\frac{5}{5\sqrt{5}}, \quad z = \mp\frac{8}{5\sqrt{5}}$$

$\frac{1}{\sqrt{5}}(\pm 36 \pm 25 \pm 64) > 0$ – обираємо верхній знак: $c = \left(\frac{6}{5\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{8}{5\sqrt{5}}\right)$

Або: використаємо векторний добуток $[a,b]$: $\boxed{[a,b] = a \times b}$

$[a,b] \perp a$, $[a,b] \perp b$, $|[a,b]| = |a||b|\sin\varphi$, де φ – кут між a і b, $\{a, b, [a,b]\}$ дод. орієнт. (якщо $a, b, [a,b] \neq 0$).

$c \perp a,\ c \perp b \Rightarrow c = \lambda[a,b]$

$\{a,b,c\}$ і $\{a,b,[a,b]\}$ >0 орієнт. $\Rightarrow \lambda > 0$.

$1 = |c| = |\lambda[a,b]| = |\lambda|\,|[a,b]| = \lambda|[a,b]| \Rightarrow \lambda = \frac{1}{|[a,b]|}$,

тобто $c = \frac{[a,b]}{|[a,b]|}$ – нормований $[a,b]$.

У декартових коорд., якщо $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$:

$$[a,b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k = (a_2b_3 - b_2a_3,$$

формальний визначник

$$-a_1b_3 + b_1a_3,\ a_1b_2 - b_1a_2),$$ де

$i = e_1 = (1,0,0)$, $j = e_2 = (0,1,0)$, $k = e_3 = (0,0,1)$ – базис.

$$[a,b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 11 & 10 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 11 & 10 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} k = (30, -25, -40) = 5(6, -5, -8)$$

$$|[a,b]| = 5 \cdot \sqrt{36 + 25 + 64} = 25\sqrt{5}.$$

$$c = \frac{[a,b]}{|[a,b]|} = \frac{(6, -5, 8)}{5\sqrt{5}}.$$

185. l, m, n - прямі. l утворює з осями коорд. кути $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ (декартова с.к.), m - рівні тупі кути,

$l \perp n$, $m \perp n$, і l, m, n (тобто їх напрямні вектори) >0 орієнт.

Знайти напрямні косинуси n.

Нехай a, b, c – одиничні напрямні вектори l, m, n відп.

$a = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt2}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

$b = (\cos\alpha, \cos\alpha, \cos\alpha)$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$:

$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow |\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt3}$, тобто

$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt3}$, $b = \left(-\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}\right)$.

Як раніше, $c = \frac{[a,b]}{|[a,b]|}$ (бо $c \perp a$, $c \perp b$, $|c| = 1$, $\{a,b,c\} > 0$ орієнт.)

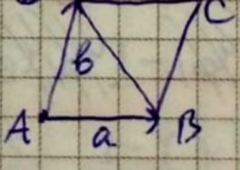
$$[a,b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac12 & -\frac12 \\ -\frac{\sqrt3}{3} & -\frac{\sqrt3}{3} & -\frac{\sqrt3}{3} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt3}{6}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \sqrt2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt3}{6}\left(2, -\sqrt2-1, \sqrt2-1\right)$$

$$|[a,b]| = \frac{\sqrt3}{6}\sqrt{4 + (-\sqrt2-1)^2 + (\sqrt2-1)^2} = \frac{\sqrt3}{6}\sqrt{4+2+2\sqrt2+1+2-2\sqrt2+1} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

$c = \left(-\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt2+1}{\sqrt{10}}, \frac{-\sqrt2+1}{\sqrt{10}}\right)$. Це і будуть напр. косинуси.

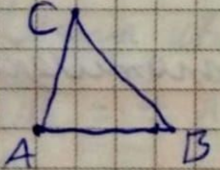
189. Знайти площу ΔABC, $A(-1,0,-1)$, $B(0,2,-3)$, $C(4,4,1)$. Коорд. дек.

– Площа паралелограма, що побудований на a, b (у просторі) – це $|[a,b]|$, трикутника – $\frac12 |[a,b]|$.



$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = |[a,b]|$.

–



$\overline{AB} = (1,2,-2)$, $\overline{AC} = (5,4,2)$.

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \right) = (12, -12, -6) = 6(2,-2,-1)$$

$|[\overline{AB}, \overline{AC}]| = 6\sqrt{4+4+1} = 18$.

$S_{ABC} = \frac12 |[\overline{AB}, \overline{AC}]| = 9$.

190. Знайти об'єм паралелепіпеда $ABCDA'B'C'D'$, де $A(1,2,3)$, $B(9,6,4)$, $D(3,0,4)$, $A'(5,2,6)$. Коорд. дек. (Д/З).

–

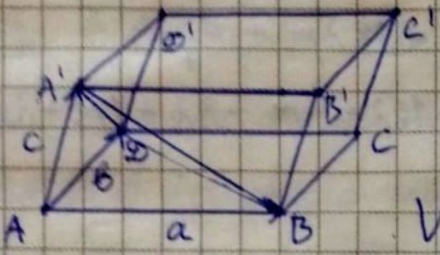
Змішаний добуток: $(a,b,c) := ([a,b],c)$.

У декартових коорд. для $a=(a_1, a_2, a_3)$, $b=(b_1, b_2, b_3)$, $c=(c_1, c_2, c_3)$

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Якщо паралелепіпед $ABCDA'B'C'D'$ побудований на a, b, c, тобто $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$, $\overline{AA'}=c$, то його об'єм

$$V_{ABCDA'B'C'D'} = |(a, b, c)|$$ (а (a, b, c) - його орієнтований об'єм)

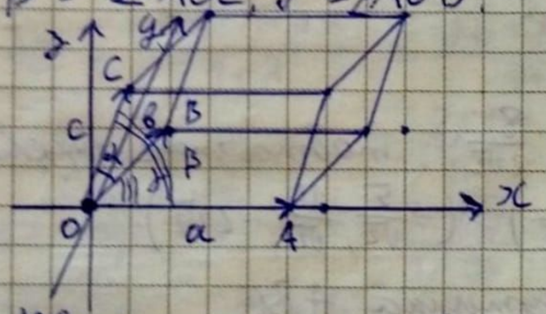


При цьому для тетраедра $ABDA'$, також побудованого на a, b, c, об'єм

$$V_{ABDA'} = \frac{1}{6}|(a,b,c)| \quad \left(a\ \frac{1}{6}(a,b,c) - \text{орієнт. об'єм}\right)$$

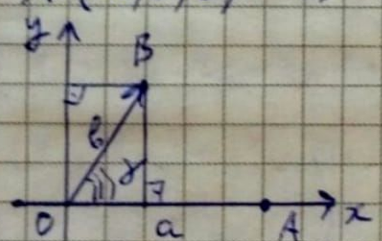
---

191. Знайти об'єм паралелепіпеда, що побудований на $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$, якщо відомі $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$ і $\alpha = \angle BOC$, $\beta = \angle AOC$, $\gamma = \angle AOB$.



Введемо декартову с.к. (початок у O): Ox направлена уздовж $\overline{OA}$, площина Oxy – площина OAB, причому кути між Oy і $\overline{OB}$, між Oz і $\overline{OC}$ – гострі.

$A(a,0,0) \Rightarrow \overline{OA} = (a,0,0)$.



Тоді проекції B на Ox і Oy – це $b\cos\gamma$ і $\sqrt{b^2 - b^2\cos^2\gamma} = b\sin\gamma$ (>0, бо кут між Oy і $\overline{OB}$ гострий): $B = \overline{OB} = (b\cos\gamma, b\sin\gamma, 0)$.

Знайдемо направляючі косинуси $\overline{OC}$:

$\overline{OC} = (c\cos\alpha_x, c\cos\alpha_y, c\cos\alpha_z)$.

α_x – це кут між $\overline{OC}$ і $Ox \parallel \overline{OA}$, тобто β: $\alpha_x = \beta$.

Кут між $\overline{OC}$ і $\overline{OB}$:

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{OC},\overline{OB})}{|\overline{OC}||\overline{OB}|} = \frac{c\cos\beta \cdot b\cos\gamma + c\cos\alpha_y \cdot b\sin\gamma + 0}{cb} =$$

$= \cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha_y \sin\gamma$, звідси

$$\cos\alpha_y = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\gamma}$$ ($\gamma \in (0,\pi)$, бо парал. невироджений)

$\cos\alpha_z > 0$ (бо кут α_z між $\overline{OC}$ і Oz гострий);

$$\cos^2\alpha_z = 1-\cos^2\alpha_x-\cos^2\alpha_y = 1-\cos^2\beta-\frac{(\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha)^2}{\sin^2\gamma} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2\gamma}\Big(\underbrace{\sin^2\gamma}_{1-\cos^2\gamma} - \cos^2\underbrace{\beta\sin^2\gamma-\cos^2\beta\cos^2\gamma}_{-\cos^2\beta} + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha\Big)$$

тому $\cos\alpha_z = \frac{\sqrt{\dots}}{\sin\gamma}$. Отже, об'єм:

$$V = |(\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC})| = \left|\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b\cos\gamma & b\sin\gamma & 0 \\ c\cos\beta & c\frac{-\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha}{\sin\gamma} & \frac{c}{\sin\gamma}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\end{vmatrix}\right| =$$

$$= abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

<u>192.</u> $\begin{cases} a=[b,c] \\ b=[c,a] \\ c=[a,b]\end{cases}$ Знайти $|a|, |b|, |c|, \angle(a,b), \angle(a,c), \angle(b,c)$.

З означення вект. добутку:

$$\begin{cases} |a| = |b||c|\sin\angle(b,c) \\ |b| = |c||a|\sin\angle(c,a) \\ |c| = |a||b|\sin\angle(a,b)\end{cases}$$

і $a\perp b,c$, $b\perp c,a$, $c\perp a,b$, тобто $\angle(a,b)=\angle(c,a)=\angle(b,c)=\frac{\pi}{2}$;

$$\begin{cases} |a| = |b||c| \\ |b| = |c||a| \\ |c| = |a||b|\end{cases}$$

~~[illegible]~~

$|a| = |b||c| = |a||b|^2$, тобто

$|a| = 0 \Rightarrow |b| = |c| = 0$

або $|b|^2 = 1 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow |a| = |c|$, $1 = |c||a| = |a|^2 \Rightarrow |a| = |c| = 1$.

Отже, $a=b=c=0$ або $|a|=|b|=|c|=1$, $\angle(a,b)=\angle(b,c)=\angle(c,a)=\frac{\pi}{2}$.

<u>193.</u> a, b, c не колінеарні

$[a,b]=[b,c]=[c,a] \Leftrightarrow a+b+c=0$.

Властивості векторного добутку:

$[a,b]=0 \Leftrightarrow a$ і b колінеарні (зокрема, $[a,a]=0$)

$[a+b,c]=[a,c]+[b,c]$, $[a,b+c]=[a,b]+[a,c]$

$[\lambda a,b]=\lambda[a,b]=[a,\lambda b]$

$[a,b] = -[b,a]$

—

Властивості змішаного добутку:

$(a,b,c)=0 \iff a,b,c$ компланарні (зокрема $(a,a,b)=0$ і т.д.)

$(a+b,c,d) = (a,c,d)+(b,c,d)$ і т.д.

$(\lambda a,b,c) = (a,\lambda b,c) = (a,b,\lambda c) = \lambda(a,b,c)$.

$(a,b,c) = (b,c,a) = (c,a,b) = -(b,a,c) = -(a,c,b) = -(c,b,a)$

$(a,b,c) = ([a,b],c) = (a,[b,c])$ (інваріантність).

—

$\Leftarrow$ Нехай $a+b+c=0$. Домножимо на a:

$0 = [a,a+b+c] = [a,a]+[a,b]+[a,c] = 0+[a,b]-[c,a] \Rightarrow$

$\Rightarrow [a,b]=[c,a]$.

Домножимо на b:

$0 = [b,a+b+c] = [b,a]+[b,b]+[b,c] = -[a,b]+0+[b,c] \Rightarrow$

$\Rightarrow [a,b]=[b,c]$. Неколінеарність тут не знадобилася.

$\Rightarrow$ Нехай $[a,b]=[b,c]=[c,a]$.

Домножаючи $a+b+c$ на a,b,c як вище, отримуємо

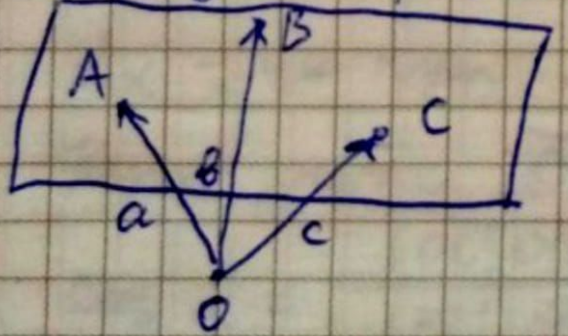
$[a+b+c,a] = [a+b+c,b] = [a+b+c,c] = 0$

$([a+b+c,c] = [a,c]+[b,c]+[c,c] = -[c,a]+[b,c]+0 = 0)$.

Тобто $a+b+c$ колінеарний a,b,c. Якщо б він був $\neq 0$, a,b,c були б колінеарні, протиріччя.

196. a, b, c – некомпланарні, $a = \overline{OA}$, $b = \overline{OB}$, $c = \overline{OC}$.

Показати, що площина ABC ортогональна $\underbrace{[a,b]+[b,c]+[c,a]}_{=\, n}$.



Ідея: площина паралельна векторам $\overline{AB} = b - a$ і $\overline{AC} = c - a$, причому вони неколінеарні (інакше було б $0 = \lambda(b-a) + \mu(c-a) = -(\lambda+\mu)a + \lambda b + \mu c$, причому $\lambda \neq 0$ або

$\mu \neq 0 \Rightarrow a, b, c$ компланарні). Отже, $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$ – базис площини, і площина $\perp n \Leftrightarrow \overline{AB} \perp n, \overline{AC} \perp n$:

$(\overline{AB}, n) = (b-a, [a,b]+[b,c]+[c,a]) =$

$= (b,[a,b]) + (b,[b,c]) + (b,[c,a]) - (a,[a,b]) - (a,[b,c]) - (a,[c,a]) =$

$= (b,a,b) + (b,b,c) + (b,c,a) - (a,a,b) - (a,b,c) - (a,c,a) =$

$= 0 + 0 + (a,b,c) - 0 - (a,b,c) - 0 = 0$

(або відразу: $(b,[a,b]) = 0$, бо $b \perp [a,b]$ за def. і т.д.)

$(\overline{AC}, n) = (c-a, [a,b]+[b,c]+[c,a]) =$

$= (c,[a,b]) + (c,[b,c]) + (c,[c,a]) - (a,[a,b]) - (a,[b,c]) - (a,[c,a]) =$

$= (c,a,b) + 0 + 0 - 0 - (a,b,c) - 0 = 0.$

202(1) Довести:

$$([a,b],[c,d]) = \begin{vmatrix} (a,c) & (a,d) \\ (b,c) & (b,d) \end{vmatrix}$$

—

Подвійний векторний добуток: $[a,[b,c]] = b(a,c) - c(a,b)$

—

Використаємо цю ф-лу та інваріантність:

$$([a,b],\underbrace{[c,d]}_{e}) = (a,[b,\underbrace{[c,d]}_{e}]) = (a, c(b,d) - d(b,c)) =$$

$$= (a,c)(b,d) - (a,d)(b,c) = \begin{vmatrix} (a,c) & (a,d) \\ (b,c) & (b,d) \end{vmatrix}.$$

207 Довести, що площа паралелограма, що побудований на a і b, дорівнює $\sqrt{\begin{vmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (a,b) & (b,b) \end{vmatrix}}$

$$S_{\square} = |[a,b]| = \sqrt{([a,b],[a,b])} = [202(1)] = \sqrt{\begin{vmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (b,a) & (b,b) \end{vmatrix}}.$$

205. $a \neq 0$. Знайти необхідні і достатні умови існування розв'язку x рівняння $[a,x] = b$; знайти заг. вигляд x.

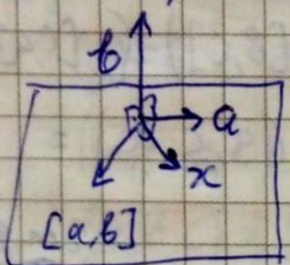
Якщо $[a,x] = b$, то $b \perp a$. (для деякого x)

I навпаки: нехай $b \perp a$.

Якщо $b = 0$, то розв'язки $[a,x] = 0$ – це вектори, колінеарні $a \neq 0$: $x = \lambda a, \lambda \in \mathbb{R}$.

Якщо $b \neq 0$, то $|[a,b]| = |a||b| \sin\angle(a,b) = |a||b| \neq 0$.

Тоді $a \neq 0$ і $0 \neq [a,b] \perp a$ утворюють базис площини векторів, що ортогональні b:



$[a,x] = b \Rightarrow x \perp b \Rightarrow x = \lambda a + \mu [a,b]$.

Домножимо на a:

$$b = [a,x] = \lambda [a,a] + \mu [a,[a,b]] = \left[\begin{matrix}\text{подв.}\\ \text{добуток}\end{matrix}\right] = 0 +$$

$$+\mu(a(a,b) - b(a,a)) = [a \perp b] = -\mu(a,a)b.$$

$b \neq 0$, тому $\mu = -\frac{1}{(a,a)}$.

Отже, $a \perp b$ – не тільки необхідна, але й достатня умова існування x, і всі такі x мають вигляд

$$x = \lambda a - \frac{[a,b]}{(a,a)} \quad \text{(це вірно і коли } b = 0)$$

$(\forall \lambda \in \mathbb{R}: [a,x] = b)$. $(\Rightarrow a_1 \neq 0, a_2 \neq 0)$

<u>209.</u> $(a_1,a_2) \neq 0$, $(a_2,b) = 0$. Знайти x:

$$\begin{cases} (a_1,x) = \alpha \\ [a_2,x] = b \end{cases}$$

Для другого рівняння можемо використати <u>205.</u> (умова існування x $a_2 \perp b$ виконана):

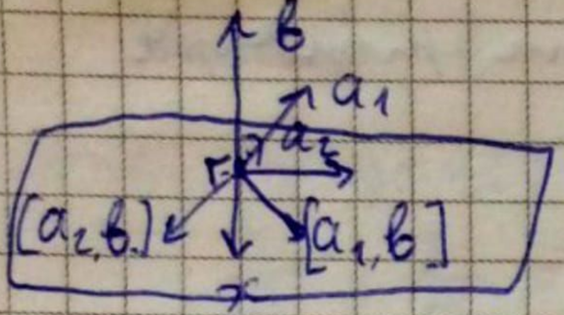
$x = \lambda a_2 - \frac{[a_2,b]}{(a_2,a_2)}$. Підставимо у перше:

$$\alpha = (a_1,x) = \lambda(a_1,a_2) - \frac{(a_1,[a_2,b])}{(a_2,a_2)} \Rightarrow \lambda = \frac{(a_1,a_2,b) + \alpha(a_2,a_2)}{(a_1,a_2)(a_2,a_2)}.$$

$$x = \frac{(\alpha(a_2,a_2) + (a_1,a_2,b))a_2}{(a_1,a_2)(a_2,a_2)} - \frac{[a_2,b]}{(a_2,a_2)} \quad \text{(при } b \neq 0)$$

Або: розглянемо в площині векторів, що $\perp b$, базис не $\{a_2,[a_2,b]\}$ а $\{a_2,[a_1,b]\}$. Дійсно, $[a_1,b] \perp b$, і $[a_2,[a_1,b]] = a_1(a_2,b) - b(a_2,a_1) = -(a_1,a_2)b \neq 0$ при $b \neq 0$,

Отже при $b \neq 0$ вони неколінеарні



$x \perp b$, тому

$$x = \lambda a_2 + \mu [a_1, b].$$

Підставимо:

$$\alpha = (a_1, x) = \lambda (a_1, a_2) + \mu (a_1, [a_1, b]) = \lambda (a_1, a_2) + 0$$

$$b = [a_2, x] = \lambda [a_2, a_2] + \mu [a_2, [a_1, b]] = [\text{див. вище}] =$$

$$= 0 - \mu (a_1, a_2) b.$$

Отже, $\lambda = \frac{\alpha}{(a_1, a_2)}$, $\mu = -\frac{1}{(a_1, a_2)}$ (бо $b \neq 0$), тому

$$x = \frac{\alpha a_2 - [a_1, b]}{(a_1, a_2)}.$$

При $b = 0$ $[a_2, x] = 0$ дає $x = \lambda a_2$, тому $\alpha = (a_1, x) = \lambda (a_1, a_2)$, $\lambda = \frac{1}{(a_1, a_2)}$, і ф-ла вище також вірна.