Домашнє завдання до заняття 14.10.24

**(6.15)** Дослідити зв'язок операції замикання з перетином та об'єднанням за наступним планом (аналогічно до задач **6.12–6.14** заняття).

1. З'ясувати, чи вірні наступні рівності для будь-яких підмножин $A$ і $B$ топологічного простору, якщо це так, довести:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B};$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

2. Якщо одна з попередніх рівностей не виконується, навести контрприклад.
3. Якщо одна з попередніх рівностей не виконується, але включення вірне в одну зі сторін, довести це.

**(10.15)** Нехай $f\colon X \to Y$ – сюр'єктивне неперервне відображення топологічних просторів. Довести, що якщо підмножина $A$ всюди щільна в $X$, то її образ $f(A)$ всюди щільний у $Y$.

**(10.18(2))** Довести, що добуток неперервних функцій $f\colon X \to \mathbb{R}$ і $g\colon X \to \mathbb{R}$ на топологічному просторі $X$ теж є неперервною функцією $fg\colon X \to \mathbb{R}$.

**(11.2)** Довести, що *інверсія*

$$f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\colon x \mapsto \frac{Rx}{|x|^2}$$

(де $R > 0$ постійне, а $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$) є гомеоморфізмом (використати вигляд цього відображення у координатах).

Додаткові задачі (не оцінюються)

**(6.22)** **Задача Куратовського.** Яку найбільшу кількість попарно різних множин можна отримати з деякої підмножини топологічного простору застосуванням до неї операцій замикання і внутрішності? Для цього потрібно шукати такі множини $A$, що попарно різними є $A$, $\overline{A}$, $\operatorname{Int} A$, $\operatorname{Int} \overline{A}$,

$\overline{\mathrm{Int}\,A}$, ... (ці операції повинні змінювати одна іншу, бо повторне застосування тієї ж не змінює множину). Ці ланцюжки не вийде продовжувати необмежено, бо, наприклад, $\overline{\mathrm{Int}\,\overline{\mathrm{Int}\,A}} = \overline{\mathrm{Int}\,A}$ (доведіть це) і аналогічна рівність має місце для іншого ланцюжка (яка саме?). Для пошуку прикладів тут достатньо буде підмножин $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією.

**(6.42)** Довести, що об'єднання скінченної кількості ніде не щільних підмножин топологічного простору ніде не щільне.

**(6.44)** Довести, що $\mathbb{R}$ (зі стандартною топологією) не є об'єднанням зліченної кількості ніде не щільних підмножин (підказка: використати лему Коші – Кантора про вкладені відрізки з курсу аналіза).

**(16.17)** Розглянемо на прямій $\mathbb{R}$ топологію, замкненими множинами якої є $\mathbb{R}$ та усі її зліченні підмножини.

1. Перевірити, що така топологія дійсно існує.
2. Показати, що вона не задовольняє першій аксіомі зліченності.
3. Описати збіжність послідовностей, замикання, секвенційні замикання у цій топології.
4. Знайти приклад підмножини, секвенційне замикання якої не дорівнює замиканню.

**(16.18)** Використавши попередню задачу, навести приклад відображення $f$, для якого виконується секвенційний критерій неперервності (послідовність, що збігається до $x$, переходить у послідовність, що збігається до $f(x)$), але воно не є неперервним.