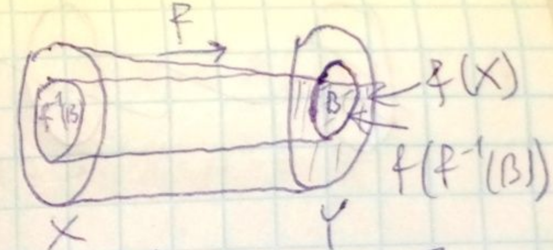
9.A,B. Нехай $f: X \to Y$ - відображення. Нагадаємо:

Образ $A \subset X$ $\quad f(A) := \{ f(x) \mid x \in A \} \subset Y$

Прообраз $B \subset Y$ $\quad f^{-1}(B) := \{ x \in X \mid f(x) \in B \} \subset X$

Чи вірно, що $f(f^{-1}(B)) = B \quad \forall B \subset Y$?

Ні. Справа у тому, що в B можуть бути точки, що не є образами точок X (не належать до образу $f(X)$ відобр. f) Наприклад, нехай $X = Y = \mathbb{R} = B$, $f(x) = x^2$, $f: X \to Y$. Тоді $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, а $f(f^{-1}(\mathbb{R})) = [0, +\infty)$



Чи вірне включення в якийсь бік?

Так, $f(f^{-1}(B)) \subset B \quad \forall B \subset Y$.

Дійсно, $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow y = f(x),\ \underset{\substack{\Updownarrow \\ f(x) \in B}}{x \in f^{-1}(B)} \Rightarrow y \in B$.

Показати, що $f(f^{-1}(B)) = B \Leftrightarrow B \subset f(X)$. Зокрема, при $B = Y$ це означає, що $Y = f(X)$, тобто f – сюр; якщо f – сюр, то це так $\forall B$.

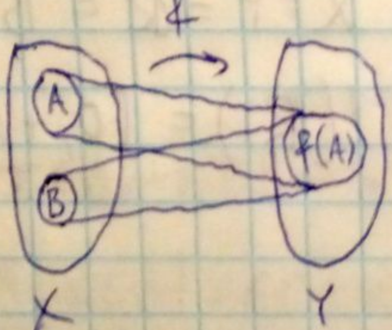
<u>$\Rightarrow$.</u> $f^{-1}(B) \subset X \Rightarrow B = f(f^{-1}(B)) \subset f(X)$.

<u>$\Leftarrow$.</u> $\subseteq$ вірне завжди $\uparrow$

<u>$\supseteq$:</u> $\forall y \in B \subset f(X)\ \exists x \in X : y = f(x)$. Тоді $x \in f^{-1}(B)$ (бо $y \in B$) $\Rightarrow y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$.

<u>9.Е.</u> Чи вірно, що $f^{-1}(f(A)) = A \ \forall A \subset X$?

Ні. У точок A можуть бути образи з кількома прообразами, деякі з яких не лежать у A.



Наприклад, знову ж $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = [0, +\infty)$

Тоді $f(A) = \underset{[0,+\infty)}{\underset{\|}{\mathbb{R}_+}}$, $f^{-1}(f(A)) = \mathbb{R}$.

$f^{-1}(f(A)) = A \cup B$

Чи вірне включення в якийсь бік?

Так, $f^{-1}(f(A)) \supset A \quad \forall A \subset X$.

Дійсно, $\forall x \in A \quad f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$.

<u>g F</u> $f^{-1}(f(A)) = A \Leftrightarrow f(A) \cap f(X \setminus A) = \varnothing$

<u>$\Rightarrow$</u> $\exists y \in f(A) \cap f(X \setminus A)$, тобто $\exists x \in A,\ x' \notin A :\ y = f(x) = f(x')$.

Але тоді $x' \in f^{-1}(f(A)) = A$ ↯.

<u>$\Leftarrow$</u> <u>$\supseteq$</u> вірно завжди ↑

<u>$\subseteq$</u> $x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow$ [умова] $\Rightarrow f(x) \notin f(X \setminus A) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \notin f^{-1}(f(X \setminus A)) \supset X \setminus A \Rightarrow x \notin X \setminus A \Rightarrow x \in A$.

Зокрема, це вірно $\forall\ A \subset X$, якщо f – ін'єкція: $\forall x \in A, y \in X \setminus A$

$x \neq y \Rightarrow \underbrace{f(x) \neq f(y)}_{\forall x \in A,\, y \notin A} \Rightarrow \underbrace{f(x) \notin f(X \setminus A)}_{\forall x \in A} \Rightarrow f(A) \cap f(X \setminus A) = \varnothing$.

<u>9.1.</u> Чи вірно $\forall\ A, B \subset Y,\ f: X \to Y$:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)\ ?$$

Так. Більш того, це вірно $\forall$ сукупності $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ підмножин Y:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(A_\gamma)$$

Дійсно, $x \in f^{-1}\left(\bigcup_\gamma A_\gamma\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_\gamma A_\gamma \Leftrightarrow \exists\ \gamma \in \Gamma: f(x) \in A_\gamma$

$\Leftrightarrow \exists\ \gamma \in \Gamma: x \in f^{-1}(A_\gamma) \Leftrightarrow x \in \bigcup_\gamma f^{-1}(A_\gamma)$.

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)\ ?$$

Так, і знову для $\forall$ кількості: $f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(A_\gamma)$

Доведення таке саме, як для $\cup$, з заміною $\exists$ на $\forall$.

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)\ ?$$

Так: $x \in f^{-1}(Y \setminus A) \Leftrightarrow f(x) \in Y \setminus A \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A)$

$\Leftrightarrow x \in X \setminus f^{-1}(A)$.

<u>9.2-5</u> Чи вірно $\forall\ A, B \subset X,\ f: X \to Y$?

$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$?

Так, і знову для $\forall$ сукупності: $f(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$.

Дійсно, $y \in f(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \Leftrightarrow y = f(x), x \in \bigcup_\gamma A_\gamma \Leftrightarrow y \in f(x) : \exists \gamma \in \Gamma :$
$x \in A_\gamma \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma : y \in f(A_\gamma) \Leftrightarrow y \in \bigcup_\gamma f(A_\gamma)$.

$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

Ні. Попереднє доведення не проходить: $y = f(x), x \in A \wedge x \in B \not\Leftrightarrow$
$(y = f(x), x \in A) \wedge (y = f(x'), x' \in B)$. Наприклад, знову для $X = Y = \mathbb{R}$,
$f(x) = x^2$, $A = (-\infty, 0)$, $B = (0, +\infty)$: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A \cap B) = \emptyset$,
але $f(A) = f(B) = (0, +\infty) \Rightarrow f(A) \cap f(B) = (0, +\infty)$.

У послідовності вище $\Rightarrow$ все ж вірно, тому $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Це знову ж вірно $\forall$ кількості множин: $f(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$.

(Впр.) Для f - ін'у маємо $=$ (Впр.)

$f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$?

Ні. Приклад той же: для $A = (-\infty, 0)$ $X \setminus A = [0, +\infty)$,
$f(X \setminus A) = [0, +\infty)$, $f(A) = (0, +\infty)$, $Y \setminus f(A) = (-\infty, 0)$. Більш того,
цей приклад демонструє, що $\subset$, $\supset$ обидва невірні. Але для
f - bij тут є $=$ (Впр.)

9.G. Нагадаємо, що для $A \subset X$ відобр. включення $i : A \to X$:
$x \mapsto x$ $\forall x \in A$. Тоді $\forall B \subset X$ $i^{-1}(B) = A \cap B$.
Дійсно, $x \in i^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x = i(x) \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$.

9.I $f : X \to Y$. Тотожні: $id_X : X \to X : x \mapsto x$, $id_Y : Y \to Y : y \mapsto y$.

$f \circ id_X =$

$= f$: $(f \circ id_X)(x) = f(id_X(x)) = f(x)$ $\forall x \in X$

$id_Y \circ f =$

$= f$. Ан-но (Впр.)

9.J. $f: X \to Y,\ g: Y \to Z.\ f, g$ – ін'є $\Rightarrow g \circ f$ – ін'є.

Для $x, y \in X$: $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow$ [g – ін'є] $\Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow$ [f – ін'є] $\Rightarrow$

$$\underset{g(f(x))}{(g\circ f)(x)} = \underset{g(f(y))}{(g\circ f)(y)}$$

$\Rightarrow x = y$, тобто $g \circ f$ – ін'є.

9.K. $f: X \to Y,\ g: Y \to Z$; $g \circ f$ – ін'є $\Rightarrow f$ – ін'є

$f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow$ [$g \circ f$ – ін'є] $\Rightarrow x = y$. Отже, f – ін'є.

9.L. f, g – сюр $\Rightarrow g \circ f$ – сюр. Дійсно, g – сюр $\Rightarrow$

$\forall z \in Z\ \exists y \in Y: z = g(y)$. f – сюр $\Rightarrow \exists x \in X: y = f(x)$.

Тоді $z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Т.ч., $g \circ f$ – сюр.

9.M. $g \circ f$ – сюр $\Rightarrow g$ – сюр. Впр.

9.N: 9.J, 9.L: f, g – біє $\Rightarrow g \circ f$ – біє.

9.K, 9.M: $g \circ f$ – біє $\Rightarrow g$ – сюр, f – ін'є. Впр. (9.7) Навести контрприклад, коли f, g – не біє при $g \circ f$ – біє.

9.O,P. у $f: X \to Y\ \exists$ обернене $\Leftrightarrow f$ – біє.

$\Rightarrow$. Отже, $\exists\, g: Y \to X$: $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$. Оскільки id_X, id_Y – біє, з 9.K, 9.M і першої рівності $\Rightarrow g$ – сюр, f – ін'є;

З другої: f - сюр, g - ін'. Зокрема, f - бі'.

<u>⇐.</u> Нехай f - бі'. Тоді $\forall\, y \in Y\ \exists!\, x \in X: f(x) = y$.

Тоді $g: y \mapsto x$ задає обернене. Воно єдине: якщо g, g' - обернені до f, то $g' = g' \circ id_Y = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = id_X \circ g = g$.

<u>9.Q - S.</u> $f: X \to Y$, $A \subset X$. Тоді $f|_A = f \circ i$, де $i: A \to X$ - включення, бо $\forall\, x \in A$ $f|_A(x) = f(x) = f(i(x))$. Тому:

Оск. i - ін', з <u>9.K.</u>: f - ін' $\Rightarrow$ $f|_A = f \circ i$ - ін' $\forall A$.

<u>9.M.</u> : $f|_A = f \circ i$ - сюр $\Rightarrow$ f - сюр.