4.23 $\forall$ сфери $S_\varepsilon(x)$ $\forall y \notin S_\varepsilon(x)$ $\rho(x,y) \neq \varepsilon$:

- якщо $\rho(x,y) < \varepsilon$, то $B_{\varepsilon-\rho(x,y)}(y) \subset B_\varepsilon(x) \subset X \setminus S_\varepsilon(x)$ (4.5)
- якщо $\rho(x,y) > \varepsilon$, то $B_{\rho(x,y)-\varepsilon}(y) \subset X \setminus D_\varepsilon(x) \subset X \setminus S_\varepsilon(x)$ (4.6).

Отже, $X \setminus S_\varepsilon(x)$ відкр. $\Rightarrow$ $S_\varepsilon(x)$ замкнена.

5.6. (X,Ω) – ТП, $X \supset A \supset B$. Топології:

Ω_A – індукована на $A \subset X$ топ. Ω

$(\Omega_A)_B$ – інд. на $B \subset A$ топ. Ω_A

Ω_B – інд. на $B \subset X$ топ. Ω

[redacted] $\underbrace{U \in (\Omega_A)_B}_{\text{Для } U \subset B:} \Rightarrow U = B \cap V$, $V \subset A$, $V \in \Omega_A$: $V = A \cap W$,

$W \in \Omega \Rightarrow U = B \cap A \cap W = [B \subset A] = B \cap W$, $W \in \Omega \Rightarrow U \in \Omega_B$.

$U \in \Omega_B \Rightarrow U = \underset{\substack{\| \\ B \cap A \cap W}}{B \cap W}$, $W \in \Omega$, тобто $U = B \cap (A \cap W) \in (\Omega_A)_B$,

бо $A \cap W \in \Omega_A$.

Т.ч., $(\Omega_A)_B = \Omega_B$.

6.16. У $\mathbb{R}$ з $\mathcal{T} = \{(a, +\infty)\}$:

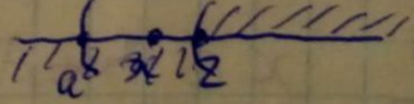
$\overline{\{1\}} = \bigcap\limits_{\substack{V\text{ - замкн., тобто } V = (-\infty, a] \\ V \supset \{1\}\text{, тобто } 1 \in V}} V = (-\infty, 1]$.

$\operatorname{Int} [0,1] = \varnothing$, бо $\nexists$ відкр. $U \neq \varnothing$: $U \subset [0,1]$

$\partial (2, +\infty) = (-\infty, 2]$, бо:

$\forall x \leq 2$ $\forall$ його відкр. окіл – це $(a, +\infty)$, де $a < x \leq 2$. Тому

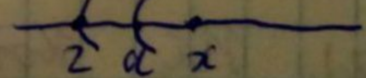
$(a,+\infty) \cap (2,+\infty) \neq \varnothing$ і $(a,+\infty) \cap \underbrace{(\mathbb{R} \setminus (2,+\infty))}_{(-\infty, 2]} \neq \varnothing$.



$\Rightarrow x \in \partial(2,+\infty)$.

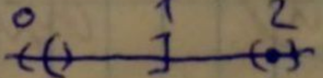
$\forall x > 2$ $\exists$ його відкр. окіл $(a,+\infty)$: $2 < a < x$. Тоді

$(a,+\infty) \cap (\mathbb{R} \setminus (2,+\infty)) = \varnothing \Rightarrow x \notin \partial(2,+\infty)$



6.46. Знайти граничні та ізольовані точки множини:

$A = [0,1] \cup \{2\}$ в $\mathbb{R}$ і $\mathbb{Q}$



в $\mathbb{R}$: граничні – $[0,1]$, ізольована – $\{2\}$

(бо $\forall x \in [0,1]$ $\forall \varepsilon > 0$ $((x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap ([0,1] \cup \{2\}) \neq \varnothing$,

для інших точок це не так. $2 \in \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \cap A = \{2\}$.

в $\mathbb{Q}$: $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ і $\{2\}$.

$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{R}$ і $\mathbb{Q}$

І там, і там усі ізольовані, єдина границя – $\{0\}$.

6.2(i 18) $\operatorname{Int}(0,1)$ у $\mathbb{R}$ з кофінітною топологією?

$\varnothing$, бо $\nexists$ відкритих $U \neq \varnothing : U \subset (0,1)$. У ній $\forall A \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus A$ не- скінченне.

$\overline{A} = A$ для скінч. A і $\overline{A} = \mathbb{R}$ — для інших.

6. Ј. У МП (X, ρ) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \rho(x, A) = 0$ (звідси випливає ч. L).

$\underline{\Rightarrow}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $B_{\frac{1}{n}}(x)$ - відкр. окіл x, $x \in \overline{A} \Rightarrow B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \neq \varnothing$,

тобто $\exists x_n \in A : \rho(x, x_n) < \frac{1}{n}$. Тому $\rho(x, A) = \inf \{\rho(x,y) \mid y \in A\} = 0$.

$\Leftarrow$. $\forall$ відкр. $U \ni x$ $\exists\, \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x) \subset U$. $\rho(x, A) = 0 \Rightarrow$
$\exists\, y \in A$: $\rho(x,y) < \varepsilon$, тобто $y \in B_\varepsilon(x) \cap A \subset U \cap A$; $U \cap A \neq \varnothing$.
Т.ч., $x \in \overline{A}$.

6.L. A замкнена $\Leftrightarrow \partial A \subset A$

$\overline{A} = A \cup \partial A$, тому A - замкн. $\Leftrightarrow A = \overline{A} \Leftrightarrow \partial A \subset A$.

6.11. $\operatorname{Int} \operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A$

$B = \operatorname{Int} B \Leftrightarrow B$ - відкр; $\operatorname{Int} A$ - відкр., тому $\operatorname{Int} \operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A$.

6.12÷14. Чи вірно, що

(1) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$

(2) $\operatorname{Int}(A \cup B) = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$

(1). Так. $\subseteq$. $x \in \operatorname{Int} A \cap B \Rightarrow \exists$ відкр. U: $x \in U \subset A \cap B \begin{smallmatrix} \subset A \\ \subset B \end{smallmatrix}$.

$\left.\begin{array}{l} x \in U \subset A \Rightarrow x \in \operatorname{Int} A \\ x \in U \subset B \Rightarrow x \in \operatorname{Int} B \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B.$

$\supseteq$. $x \in \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in \operatorname{Int} A \Rightarrow \exists \text{ відкр. } U: x \in U \subset A \\ x \in \operatorname{Int} B \Rightarrow \exists \text{ відкр. } V: x \in V \subset B \end{array}\right. \Rightarrow$

$U \cap V$ - відкр., $x \in U \cap V \subset A \cap B \Rightarrow x \in \operatorname{Int}(A \cap B)$.

(2). Ні. Контрприклад: $A = (-1, 0]$, $B = [0, 1)$. $A \cup B = (-1, 1) =$

$= \operatorname{Int} A \cup B$, але $\operatorname{Int} A = (-1, 0)$, $\operatorname{Int} B = (0, 1)$, $\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B =$

$= (-1, 0) \cup (0, 1)$:

Але: $\forall\ A, B$

$$\left.\begin{matrix} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{монотонність} \\ \text{внутрішності}\end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} A \cup B \\ \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int} A \cup B \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int} A \cup B$.

6.29. Описати всюди щільні множини:

1) У антидискретному просторі ($\tau = \{\varnothing, X\}$).

$$\forall A \subset X \quad \overline{A} = \bigcap_{\substack{V\text{-замкн.} \\ V \supset A}} V = \begin{cases} X, & A \neq \varnothing \\ \varnothing, & A = \varnothing \end{cases}$$

Тому $\forall A \neq \varnothing$ вс. щільна.

2) $\mathbb{R}$ з $\tau = \{(a, +\infty)\}$.

Замкнені – це $(-\infty, a]$.

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subset (-\infty, a]} (-\infty, a] = (-\infty, \sup A]$$

Тому A – всюди щільна $\Leftrightarrow$

$\overline{A} = \mathbb{R} \Leftrightarrow \sup A = +\infty \Leftrightarrow A$ необмежена справа.

3) $\mathbb{R}$ з кофінітною.

Замкнені – це скінченні та $\mathbb{R}$.

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{V\text{-скінченна або } \mathbb{R} \\ V \supset A}} V = \begin{cases} A, & A \text{ скінченна} \\ \mathbb{R}, & A \text{ нескінченна} \end{cases}$$

Тобто A – всюди щільна $\Leftrightarrow A$ нескінченна.

16.4. Чи є сепарабельними $\mathbb{R}$ з топологією $\{(a, +\infty)\}$ та з кофінітною?

Так. З минулої задачі, і там, і там $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{R}$.

6.32. Нехай A, B – всюди щільні. Чи вірно, що

– $A \cup B$ всюди щільна?

Так, принаймні достатньо всюди щільності A <u>або</u> B:

A – вс. щ. $\Rightarrow X = \overline{A} \subset \left[\substack{\text{монотонність} \\ \text{замикання}}\right] \subset \overline{A \cup B} \subset X \Rightarrow \overline{A \cup B} = X$.

– $A \cap B$ всюди щільна?

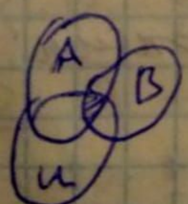
Ні: в $\mathbb{R}$ зі станд. топ. $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ вс. щ., $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \varnothing$.

6.33-34. Нехай A, B – всюди щільні, відкр. Тоді $A \cap B$ всюди щ.

A всюди щільна $\Leftrightarrow \overline{A} = X \Leftrightarrow \forall$ відкр. $U \neq \varnothing$ $U \cap A \neq \varnothing$.

Отже, A вс. щ. і відкрита $\Rightarrow \forall$ відкр. $U \neq \varnothing$ $U \cap A \neq \varnothing$ і $U \cap A$ відкрита

$\Rightarrow$ [B всюди щільна] $\Rightarrow U \cap A \cap B \neq \varnothing$. Тобто $A \cap B$ всюди щ.



Тут достатньо, щоб лише одна з множин A, B була відкритою.

6.40. За нашим <u>def.</u> A ніде не щільна, якщо $\operatorname{Int} \overline{A} = \varnothing$.

За <u>def.</u> з книжки – якщо <u>зовнішність</u> A $\operatorname{Int} X \setminus A$ всюди щільна. <u>Доведемо</u> еквівалентність:

$$\operatorname{Int} \overline{A} = \varnothing \Leftrightarrow \overline{\operatorname{Int} X \setminus A} = X.$$

Згадаємо, що $\forall\, A \subset X \quad X = \operatorname{Int} A \overset{(1)}{\sqcup} \overline{X \setminus A} = \overline{A} \overset{(2)}{\sqcup} \operatorname{Int} X \setminus A$

Тому $X \setminus \operatorname{Int} \overline{A} \underset{(1)\text{ для } \overline{A}}{=} \overline{X \setminus \overline{A}} \underset{(2)}{=} \overline{\operatorname{Int} X \setminus A}$. Отже, $\operatorname{Int} \overline{A} = \varnothing \Leftrightarrow$

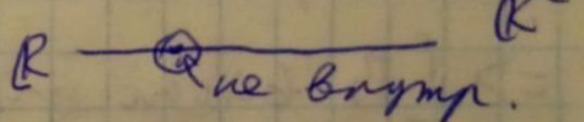
$\Leftrightarrow \overline{\operatorname{Int} X \setminus A} = X \setminus \operatorname{Int} \overline{A} = X$.

6.37. Чи може бути множина одночасно всюди щільною і ніде не щільною? (у $X \neq \varnothing$).

Ні. A вс. щ. $\Rightarrow \overline{A} = X \Rightarrow \operatorname{Int} \overline{A} = X \neq \varnothing$.

6.39. Чи $\in \mathbb{R}$ ніде не щільною у $\mathbb{R}^2$?

Так. $\operatorname{Int} \overline{\mathbb{R}} = \operatorname{Int} \mathbb{R} = \varnothing$.



10.А. $f: X \to Y$ неперервне $\Leftrightarrow$ $\forall$ замкненою $V \subset Y$ $f^{-1}(V)$ замкнене в X

$\Rightarrow$. $V \subset Y$ замкн. $\Rightarrow$ $Y \setminus V$ відкр. $\Rightarrow \left[\begin{matrix} f\text{ – не-} \\ \text{перервне} \end{matrix}\right] \Rightarrow f^{-1}(Y \setminus V)$ відкр.

$\boxed{\text{бо для } x \in X \quad x \in f^{-1}(Y \setminus V) \Leftrightarrow f(x) \notin V \Leftrightarrow \Leftrightarrow x \in X \setminus f^{-1}(V)}$ $\to$ $\parallel$ $X \setminus f^{-1}(V)$

$\Rightarrow f^{-1}(V)$ замкн.

$\Leftarrow$. $U \subset Y$ відкр. $\Rightarrow$ $Y \setminus U$ замкн. $\Rightarrow$ [умова] $\Rightarrow$ $\underset{X \setminus f^{-1}(U)}{\overset{f^{-1}(Y \setminus U)}{\parallel}}$ замкн.

$\Rightarrow f^{-1}(U)$ відкр. За def., f неперервне.

10.Б. $f: X \to Y$ неперервне $\Leftrightarrow$ $\forall A \subset Y$ $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$.

$\Rightarrow$. $\overline{A}$ – замкнене $\Rightarrow$ [10.А] $\Rightarrow$ $f^{-1}(\overline{A})$ ~~т~~ замкнене. $A \subset \overline{A}$

$\Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\overline{A}) \Rightarrow$ [монотонність] $\Rightarrow \overline{f^{-1}(A)} \subset \overline{f^{-1}(\overline{A})} =$

$= [f^{-1}(\overline{A}) \text{ замкн.}] = f^{-1}(\overline{A})$.

$\Leftarrow$. Знову використаємо 10.А: достатньо перевірити, що $\forall$ замкненого A $f^{-1}(A)$ замкнене, тобто $\overline{f^{-1}(A)} =$

$= f^{-1}(A)$. $f^{-1}(A) \subset \overline{f^{-1}(A)}$ завжди. За умовою,

$\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A}) = [A \text{ замкнена}] = f^{-1}(A)$. Тому дійсно

$\overline{f^{-1}(A)} = f^{-1}(A)$.

10.8. Нехай B – база топ. Y. $f: X \to Y$ неперервне $\Leftrightarrow$ $\forall U \in B$ $f^{-1}(U)$ відкрите в X.

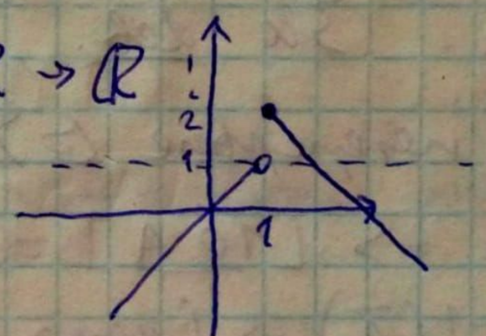
$\Rightarrow$. $U \in B \Rightarrow U$ відкр. $\Rightarrow$ [f непер.] $\Rightarrow f^{-1}(U)$ відкр.

$\Leftarrow$. $\forall$ відкр. $U \subset Y$ $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, де $U_\alpha \in B$ $\forall \alpha$.

Тоді $f^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha)$ – відкр. за умовою. Т.ч. f – непер.

10.9. Чи є неперервним $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Показати за означенням)

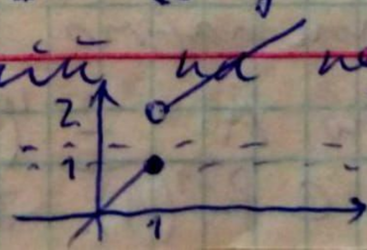
$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 3 - x, & x \geq 1 \end{cases}$$



Ні: для відкритої $U = (1, +\infty)$ $f^{-1}(U) = [1, 2)$ – не відкр.
(воно не неперервне і в топ. $\{(a, +\infty)\}$ на другому $\mathbb{R}$).

10.10. Чи є неперерервним $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ у топ. $\{(a, +\infty)\}$ на другому $\mathbb{R}$ (і стандартній на першому)?

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$$



Так. $\forall a$ $\quad f^{-1}((a,+\infty)) = \begin{cases} (a,+\infty), & a \le 1 \\ (1,+\infty), & 1 < a \le 2 \\ (a-1,+\infty), & 2 < a \end{cases}$ – відкр.

У станд. топ. на другому $\mathbb{R}$ – ні, бо $f^{-1}((0,2)) = [0,1]$ – не відкр.

<u>10.18(1).</u> $f, g \in C(X,\mathbb{R}) \Rightarrow f+g \in C(X,\mathbb{R})$.

Отже, $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0$:

$\exists$ відкр. $U \ni x$: $f(U) \subset (f(x)-\frac{\varepsilon}{2}, f(x)+\frac{\varepsilon}{2})$. Тобто $\forall y \in U \ |f(y)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists$ відкр. $V \ni x$: $g(V) \subset (g(x)-\frac{\varepsilon}{2}, g(x)+\frac{\varepsilon}{2})$. Тобто $\forall y \in V \ |g(y)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

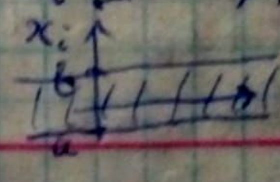
Тоді $\forall y \in U \cap V$ (теж відкр. і $\ni x$)

$|f(y)+g(y)-(f(x)+g(x))| \le |f(y)-f(x)| + |g(y)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Тобто $(f+g)(U \cap V) \subset ((f+g)(x)-\varepsilon, (f+g)(x)+\varepsilon)$.

<u>10.21.</u> $f: X \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, де $f_i: X \to \mathbb{R}$. Тоді $f \in C(X, \mathbb{R}^n) \Leftrightarrow$
$\forall i \ f_i \in C(X,\mathbb{R})$.

<u>$\Rightarrow$.</u> $f_i = p_i \circ f$, де $p_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ – неперервна,
бо $\forall (a,b) \subset \mathbb{R} \quad p_i^{-1}((a,b)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in (a,b)\}$ –



відкр. в $\mathbb{R}^n$, а (a,b) утв. базу $\mathbb{R}$ (задача 10.8).

Тому f_i непер. як композиція непер.

$\Leftarrow$. Знову використаємо 10.8 : кулі $B_\varepsilon(x)$ м-на ρ_∞-база $\mathbb{R}^n$:

$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_i \in (x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon)\ \forall i\} = (x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon)\times\ldots\times(x_n-\varepsilon, x_n+\varepsilon)$.

$z \in f^{-1}(B_\varepsilon(x)) \Leftrightarrow \underset{(f_1(z),\ldots,f_n(z))}{\underset{\parallel}{f(z)}} \in B_\varepsilon(x) \Leftrightarrow \forall i\ f_i(z) \in (x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon)$.

Тобто $f^{-1}(B_\varepsilon(x)) = f_1^{-1}((x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon)) \cap \ldots \cap f_n^{-1}((x_n-\varepsilon, x_n+\varepsilon))$ — відкр. як перетин відкр., бо усі f_i непер. Тому f непер.

10.11 Які відобр. $\mathbb{R}_{T_1} \to \mathbb{R}$ неперервні? ($\mathbb{R}_{T_1}$ — $\mathbb{R}$ з кофінітною топ.)

Лише постійні. $\neg$ $\exists$ непер. непостійне $f: \mathbb{R}_{T_1} \to \mathbb{R}$. Тоді $\exists\, x<y$ з його образа. Для $z \in (x,y)$ тоді $\underset{\overset{\vee}{x}}{f^{-1}((-\infty, z))}$, $\underset{\overset{\vee}{y}}{f^{-1}((z, +\infty))}$ — відкр., непорожні, не перетинаються. В $\mathbb{R}_{T_1}$ таких немає. ↯.

10.S.V. Нехай $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — відкр. покриття X, $f: X \to Y$. f — непер. $\Leftrightarrow$ $f|_{U_\alpha}: U_\alpha \to Y$ непер. $\forall \alpha$ (відн. індукованої топ. на U_α).

$\Rightarrow$. Доводили в лекціях: обм. непер. — непер.

$\Leftarrow$. $\forall$ відкр. $V \subset Y$ $f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap \overset{X}{\overset{\parallel}{\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right)}} = \bigcup_\alpha (U_\alpha \cap f^{-1}(V)) =$
$= \bigcup_\alpha (f|_{U_\alpha}^{-1}(V))$ — відкр. як об'єднання відкр., бо

$\forall \alpha \quad f|_{U_\alpha}^{-1}(V)$ - відкр. в U_α і U_α відкр. в $X \Rightarrow$

$\Rightarrow f|_{U_\alpha}^{-1}(V)$ - відкр. в X.

11.B Побудувати $f: [0,1) \to S^1$ - непер., біє, не гомеоморфізм

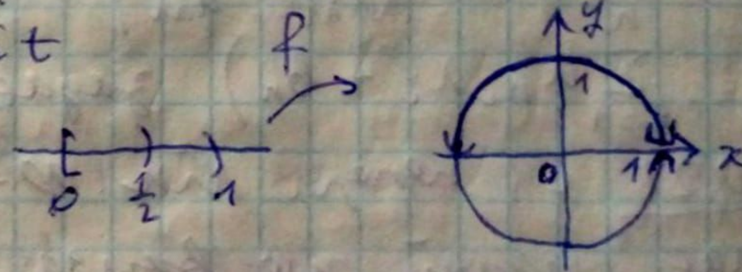
Тобто f^{-1} не неперервне $\Leftrightarrow$ f не відкрите $\Leftrightarrow$ $\exists$ відкр.

$U \subset [0,1)$: $f(U)$ не відкр. в S^1.

$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = e^{2\pi i t}$

$U = [0, \frac{1}{2})$: $f(U)$ - "напіввідкрита"

дуга - не відкр. в S^1.



11.I(3) $f: X \to Y$ - гомео-зм $\Rightarrow \forall A \subset X \quad f(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} f(A)$ (гомеоморфізми зберігають внутрішності). Ан-но $\bar{A}$, ∂A, ...

$\Rightarrow$. $x \in f(\operatorname{Int} A) \Rightarrow x = f(y),\ y \in \operatorname{Int} A \Rightarrow x = f(y)$, $\exists$ відкр.

$U \ni y : U \subset A \Rightarrow x \in f(U)$ - відкр., $f(U) \subset f(A) \Rightarrow x \in \operatorname{Int} f(A)$.

$\Leftarrow$. $x \in \operatorname{Int} f(A) \Rightarrow \exists$ відкр. $V \ni x : V \subset f(A) \Rightarrow f^{-1}(x) \in f^{-1}(V) \subset A$,

$f^{-1}(V)$ відкр. $\Rightarrow f^{-1}(x) \in \operatorname{Int} A \Rightarrow x \in f(\operatorname{Int} A)$.

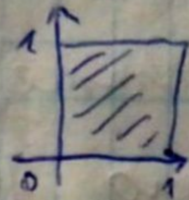
11.L. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - афінне перетворення, тобто $f(x) = Ax + b$, $\det A \neq 0$. Показати, що f - гомеоморфізм.

$y = f(x) = Ax + b \Rightarrow x = A^{-1}(y - b) = A^{-1}y - A^{-1}b$, тобто визначене $f^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Тому f – біє. Крім того, f^{-1} – теж аф.

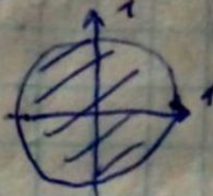
Якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, то $f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i + b_1, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i + b_n\right)$ задається лін. ф-ціями $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. В силу <u>10.21</u> і неперер. лін. ф-цій, воно неперервне. f^{-1} також, бо має такий же вигляд.

11.10 (1,2,6) Показати, що наступні множини гомеоморфні:

- $\mathbb{R}^2$
- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y\in(0,1)\} = (0,1)^2$

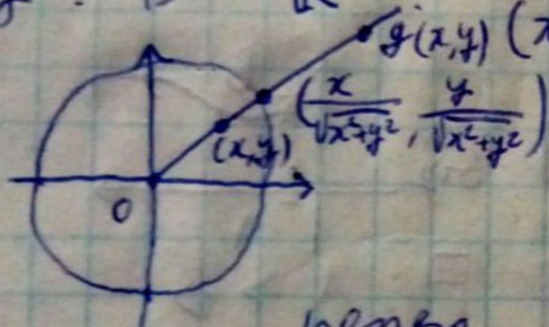


- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\} =: B^2$



$f:(0,1)^2\to\mathbb{R}^2 : (x,y)\mapsto \left(\operatorname{tg}\pi\left(x-\frac{1}{2}\right), \operatorname{tg}\pi\left(y-\frac{1}{2}\right)\right)$ - бієк, непер (бо задається непер. ф-ціями), $f^{-1}:(x,y)\mapsto\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x, \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\operatorname{arctg} y\right)$ - теж непер.

$g: B^2\to\mathbb{R}^2 :$



$$(x,y)\mapsto\begin{cases}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0), & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

бієк, неперервне, бо на $B^2\setminus\{(0,0)\}$ задається непер. ф-ціями і для $(x_n,y_n)\to(0,0)$ $g(x_n,y_n)\to(0,0)=g(0,0)$. Обернене:

$$g^{-1}(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^2}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0), & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ан-но неперервне