(гладкість на I тут визн. ан-но до правил)

Pr. Нехай $\gamma \in C^{\varkappa}(I, M)$ (де $I \subset \mathbb{R}$ - проміжок), а X - $(\varkappa-1)$-гл. поле уздовж γ: $X \in C^{\varkappa-1}(I, TM)$, $\forall t \in I$ $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Тоді $\exists!$ $(\varkappa-2)$-гл. поле $\nabla_{\gamma'}X$ уздовж γ таке, що $\forall Y \in \mathfrak{X}^{\varkappa-1}(M)$ $\forall t \in I$

$$\nabla_{\gamma'(t)} Y = \nabla_{\gamma'}(Y \circ \gamma)(t) \; (\in T_{\gamma(t)}M).$$

Rem. За def., $Y \circ \gamma$ - $(\varkappa-1)$-гл. поле уздовж γ (обмеження Y на γ). Т.ч., згідно з Pr коректно визначене відобр. полів уздовж γ $\nabla_{\gamma'}: X \mapsto \nabla_{\gamma'}X$.

def. $\nabla_{\gamma'}X$ зветься коваріантною похідною X уздовж γ.

▷ ! Отже, нехай $\nabla_{\gamma'}X$ існує. Розгл. $\forall Y \in \mathfrak{X}^{\varkappa-1}(M)$ і покладемо $X := Y \circ \gamma$. $\forall t_0 \in I$ нехай $(x^1, .., x^n)$ - якісь лок. коорд. на $U \ni \gamma(t_0)$, $(\gamma^1, .., \gamma^n)$ - відп. лок. задання γ, $Y|_U = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Тоді $X|_{\gamma^{-1}(U)} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, де $X^i(t) = Y^i(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ для $t \in \gamma^{-1}(U)$. Нехай $\{\Gamma^k_{ij}\}$ - с.х. ∇ в $(x^1, \dots, x^n)$. Тоді з лок. ф-ли вище (що, очевидно, вірна і для ков. похідної у точці) $\forall t \in \gamma^{-1}(U)$:

$$\nabla_{\gamma'} X(t) = \nabla_{\gamma'(t)} Y = \nabla_{(\gamma^i)'(t)\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = (\gamma^i)'(t)\Big[\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t)) + \Gamma^k_{ij}(\gamma^1(t),\ldots,\gamma^n(t)) \cdot Y^j(\gamma^1(t),\ldots,\gamma^n(t))\Big)\frac{\partial}{\partial x^k} = \begin{bmatrix}\text{похідна}\\ \text{складної}\\ \text{ф-ції}\end{bmatrix} =$$

$$= \left(\frac{dX^k}{dt}(t) + (\Gamma^k_{ij}\circ\gamma)(t)\cdot(\gamma^i)'(t)\cdot X^j(t)\right)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Цей вираз однозначно визначений зв'язністю, γ і X. Звідси !

$\exists$ Тепер визначимо $\nabla_{\gamma'}X$ ф-лою вище:

$$\nabla_{\gamma'}X\Big|_{\gamma^{-1}(U)} := \left((X^k)' + (\Gamma^k_{ij}\circ\gamma)\cdot(\gamma^i)'\cdot X^j\right)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

($\forall$ коорд. околу U з лок. коорд. $(x^1,\ldots,x^n)$, що перетинаються з носієм γ).

Впр. Це коректно визначене поле уздовж γ (тобто треба перевірити, що вираз не змінюється при заміні координат, використавши ф-ли перетворення $\{\Gamma^k_{ij}\}$ вище).

Коефіцієнти тут $(\varkappa-2)$-гл. $\Rightarrow \nabla_{\gamma'}X \in C^{\varkappa-2}(I,TM)$. Воно задовольняє [redacted] (умові Рч.) в силу міркувань у доведенні ! ▲

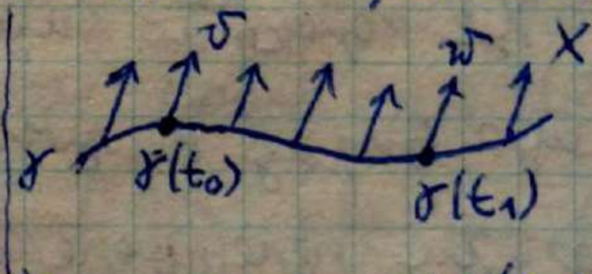
Втр. $\forall\, \gamma \in C^{\varkappa}(I, M)$, X, Y – $(\varkappa-1)$-гл. в.п. уздовж γ і $f \in C^{\varkappa-1}(I)$:

$$\nabla_{\gamma'}(X+Y) = \nabla_{\gamma'}X + \nabla_{\gamma'}Y;$$

$$\nabla_{\gamma'}(fX) = f'X + f\,\nabla_{\gamma'}X.$$

Rem. Якщо I включає межі, у них $\nabla_{\gamma'}X$ визначається однобічно ($\nabla_{\gamma'}X(a+0)$ або $\nabla_{\gamma'}X(b-0)$).

def. $(\varkappa-1)$-гладке поле X уздовж $\gamma \in C^{\varkappa}(I, M)$ зветься паралельним (у многовиді з аф. зв. (M, ∇)), якщо $\nabla_{\gamma'}X = 0$. Якщо при цьому $X(t_0) = v\ (\in T_{\gamma(t_0)}(M))$, а $X(t_1) = w\ (\in T_{\gamma(t_1)}(M))$, то говорять, що w отриманий з v паралельним перенесенням з $\gamma(t_0)$ у $\gamma(t_1)$ уздовж γ.



Рс. $\forall\, \gamma \in C^{\varkappa}(I, M)\ \forall\, t_0 \in I\ \forall\, v \in T_{\gamma(t_0)}M$ $\exists!$ паралельне $(\varkappa-1)$-гл. поле X уздовж γ таке, що $X(t_0) = v$.

▷ З лок. запису у попер. доведенні випливає, що $\forall\, t \in I$ і лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на $U \ni \gamma(t)$ для лок. задання

$X|_{\gamma^{-1}(U)} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (де $X^i \in C^{r-1}(\gamma^{-1}(U))$, $i=\overline{1,n}$) умови паралельності мають вигляд:

$$(X^k)' + (\Gamma^k_{ij}\circ\gamma)(\gamma^i)'X^j = 0, \quad k=\overline{1,n}, \qquad (*).$$

де $(\gamma^1,\dots,\gamma^n)$ – лок. задання γ, а $\{\Gamma^k_{ij}\}$ – с.к. ∇ на U. Це система ЗДР першого порядку, лінійна з $(r-2)$-гл. коеф. Для відп. задачі Коші, тобто $(*)$ разом з початковими умовами $X^i(t_0)=v^i$, $i=\overline{1,n}$ (тут $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, тобто $X(t_0)=v$) розв'язок $\exists!$ на всій області визначення коефіцієнтів, тобто $\gamma^{-1}(U)$. якщо $\gamma(t_0)\in U$

Для $\forall\, t \in I$, де $t \geq t_0$ (для $t \leq t_0$ аналогічно), використовуючи лему Лебега, розіб'ємо $[t_0,t]$ на $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_m = t$ так, що $\forall\, i=\overline{1,m}$ $\gamma([t_{i-1},t_i])$ міститься у деякому коорд. околі (наприклад, $t_i = t_0 + \frac{i(t-t_0)}{m}$, де $\frac{t-t_0}{m}$ менше числа Лебега покриття компакта $[t_0,t]$ прообразами коорд. околів). На $[t_0,t_1]$ розв'яжемо з. Коші для $(*)$ з поч. умовами $X^i(t_0)=v^i$

$(v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i})$. З цього отримаємо $\exists!$ поля X на $[t_0, t_1]$ і значення $X(t_1)$. На $[t_1, t_2]$ розв'яжемо з. Коші для $(*)$ з поч. умовою $X(t_1)$ etc. $\Rightarrow$ отримаємо $\exists!$ X на $[t_0, t]$, і так $\forall t$. У нашій побудові X буде $(\varkappa-1)$-гл. на кожному з $[t_{i-1}, t_i]$. Гладкість у t_i можна вивести з єдиності ($(\varkappa-1)$-гл.) розв'язку з. Коші в околі t_i. ▲

Rem. Зокрема, завжди однозначно визначене паралельне перенесення$\overset{w}{}$ $\forall$ вектора $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ у $\forall$ $\gamma(t_1)$ уздовж γ. Воно задає відображення $P_{t_0,t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M : v \mapsto w$.

Впр. Це лінійний ізоморфізм.

Ex. У випадку пласкої (хоча б локально) зв'язності, зокрема, для зв. на $\mathbb{R}^n$ з попер. Ex. $(*)$ набуває вигляду $(X^k)' = 0$, $k = \overline{1,n}$, тобто $X^k = X^k_0 = v^k$ – це "звичайне" парал. перенесення (у відп. лок. або глоб. координатах), що не залежить від γ. У заг. випадку залежність від γ є. 

Rem. Якщо γ − $\varkappa$-гл., то $\gamma' : t \mapsto \gamma'(t)$ − $(\varkappa-1)$-гл. в.п. уздовж неї.

def. $\gamma \in C^{\varkappa}(I, M)$ зветься геодезичною (лінією) многовида з аф. зв'язністю (M, ∇), якщо $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$, тобто γ' − паралельне уздовж γ.

Rem. Ця умова, взагалі кажучи, не зберігається при переході до еквівалентної кривої (заміні параметра).

Впр. При яких замінах параметра вона все ж зберігається?

Rem. У лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U з с.к. $\{\Gamma^k_{ij}\}$ для ф-цій $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ лок. задання γ з $(*)$ отримуємо умови:

$$(\gamma^k)'' + \Gamma^k_{ij}(\gamma^1, \dots, \gamma^n)(\gamma^i)'(\gamma^j)' = 0, \quad k = \overline{1,n} \qquad (**)$$

Це система нелінійних ЗДР II порядку. Взагалі кажучи, її розв'язок $\exists$ тільки локально:

Th. Нехай $\varkappa \geq 3$.

1. $\forall\, p \in M$, $v \in T_pM$ $\exists\, \varepsilon > 0$ та геодезична $\gamma \in C^{\varkappa}((-\varepsilon, \varepsilon), M)$

така, що $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=v$ (тобто γ проходить через p у напрямку v).

<u>2.</u> $\forall$ геодезичних $\gamma, \mu \in C^{\varkappa}(I, M)$ якщо $\exists\, t_0 \in I$ таке, що $\gamma(t_0)=\mu(t_0)$ і $\gamma'(t_0)=\mu'(t_0)$, то $\gamma=\mu$.

$\triangleright$ Це знову випливає з $\exists!$ для кожної лок. системи коорд. розв'язку з. Коші для (**) з початковими умовами $\gamma^i(t_0) = x_0^i$, $(\gamma^i)'(t_0)=v^i$, $i=\overline{1,n}$, де $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ - коорд. p, $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Тут система визначена $(\varkappa-2)$-гл. Γ_{ij}^k, тому для застосовності теореми потрібно $\varkappa \geq 3$ (або ліпшицевість). Для існування достатньо лок. розв'язку, єдиність - знову через лему Лебега (Вуп) $\triangleleft$

<u>Ex.</u> Для пласкої (принаймні локально) ∇, зокрема, для ∇ на $\mathbb{R}^n$ з <u>Ex.</u> вище у відп. коорд. (**) мають вигляд $(\gamma^k)''=0$, $k=\overline{1,n}$, тобто $\gamma^k = x_0^k + v^k(t-t_0)$ (у $\mathbb{R}^n$ це прямолінійна пряма).

<u>Rem.</u> Многовиди з аф. зв'язністю - це ще одне узагальнення рімановых, як ми невдовзі побачимо.

Def. Скрут (кручення) аф. зв. ∇ на M зветься $T: \mathcal{X}^{r-1}(M) \times \mathcal{X}^{r-1}(M) \to$
$\to \mathcal{X}^{r-2}(M)$: $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$. Якщо $T=0$, ∇ називають зв'язністю без скруту.

Pr. T задає $(r-2)$-гл. кососиметричне $(2,1)$-тензорне поле.

$\triangleright$ Кососиметричність: $T(Y,X) = \nabla_Y X - \nabla_X Y - \underset{-[X,Y]}{[Y,X]} = -T(X,Y)$.

Щоб перевірити тензорність, переконаємося, що T білінійне над $C^{r-2}(M)$. Лінійність за додаванням - з відп. властивості ∇ і $[\cdot,\cdot]$ (дужки Лі). $\forall f \in C^{r-2}(M)$, $X,Y \in \mathcal{X}^{r-1}(M)$:

$T(fX,Y) = \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX,Y] = f\nabla_X Y - \cancel{Y(f)X} - f\nabla_Y X -$
$- f[X,Y] + \cancel{Y(f)X} = f \cdot T(X,Y)$.

Для другого аргумента - ан-но або використаємо кососиметричність. Гладкість випливає з лок. задання нижче. $\triangle$

Rem. Нехай у лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U $\{T^k_{ij}\}$ - компоненти T, тобто $T|_U = T^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i \otimes dx^j \Leftrightarrow T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = T^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$ $\forall i,j = \overline{1,n}$

(це випливає з альт. опису $(2,1)$ – тенз. поля). Тобто [якщо $\{\Gamma^k_{ij}\}$ – с.к. ∇ на U]

$$T^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}-\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}-\Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k}-0.$$

Т.ч., $\forall\ i,j,k=\overline{1,n}$ $\quad T^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji}$ $\quad (\in C^{\varkappa-2}(U))$.

<u>Cor.</u> ∇ – зв. без скруту $\Leftrightarrow$ $\forall$ лок. коорд. $\forall\ i,j,k=\overline{1,n}$ $\ \Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$.

Ex. Якщо зв. пласка, то $\forall$ деяких лок. коорд. в околі $\forall\, p\in M$ дає $\Gamma^k_{ij}=0$. Тому вона без скруту.

<u>Rem.</u> З лок. задання випливає, що T ставить у відп. $(\varkappa-2)$-гл. полям

X і Y $(\varkappa-2)$-гл.: якщо $X|_U=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y|_U=Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, то

$$T(X,Y)=X^iY^j\left(\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji}\right)\frac{\partial}{\partial x^k},\ \text{і}\ \ X^iY^j\left(\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji}\right)\in C^{\varkappa-2}(U),$$

хоча у <u>def.</u> і присутнє їх диференціювання. Тому це $(\varkappa-2)$-гл. поле.

<u>def.</u> Нехай $1\le\lambda\le\varkappa-1$. Коваріантною похідною λ-гладкого (l,k)-тенз. поля S на M, що задане як відобр. $\underbrace{\mathfrak{X}^\lambda(M)\times\ldots\times\mathfrak{X}^\lambda(M)}_{k}\times$
$\times\underbrace{\mathfrak{X}^\lambda(M)^*\times\ldots\times\mathfrak{X}^\lambda(M)^*}_{l}\to C^\lambda(M)$, за полем $X\in\mathfrak{X}^{\lambda-1}(M)$ відносно аф. зв. ∇ на M, називається

$$\nabla_X S:\underbrace{\mathfrak{X}^\lambda(M)\times\ldots\times\mathfrak{X}^\lambda(M)}_{k}\times\underbrace{\mathfrak{X}^\lambda(M)^*\times\ldots\times\mathfrak{X}^\lambda(M)^*}_{l}\to C^{\lambda-1}(M):$$

$(\nabla_X S)(X_1,\dots,X_k,\alpha_1,\dots,\alpha_l) = X(S(X_1,\dots,X_k,\alpha_1,\dots,\alpha_l)) - S(\nabla_X X_1,\dots,X_k,$
$\alpha_1,\dots,\alpha_l) - \dots - S(X_1,\dots,\nabla_X X_k,\alpha_1,\dots,\alpha_l) - S(X_1,\dots,X_k,\nabla_X\alpha_1,\dots,\alpha_l) - \dots - S(X_1,\dots,X_k,\alpha_1,\dots,\nabla_X\alpha_l).$

Rem. Тут спочатку визначаємо диференціювання 1-форм:

$$(\nabla_X\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y),$$

а потім за його доп. — довільних полів.

Впр. 1. $\nabla_X S$ задає $(r-1)$-гл. (k,l)-тенз. поле.

2. Записати його в лок. коорд. (те ж, що раніше)

3. Для $(0,1)$-тензорів (вект. полів) це коваріантне диф. відн. ∇

4. $\nabla_{fX+gY} S = f\nabla_X S + g\nabla_Y S$, $\nabla_X(S+T) = \nabla_X S + \nabla_X T$ і
$\nabla_X(fS) = X(f)S + f\nabla_X S$ $\forall\, X, Y, f, g, S, T$ з відп. множин.

5. Для альт. означення $(k,1)$-тенз. полів маємо:

$$(\nabla_X S)(X_1,\dots,X_k) = \nabla_X(S(X_1,\dots,X_k)) - S(\nabla_X X_1,\dots,X_k) - \dots - S(X_1,\dots,\nabla_X X_k).$$

векторне поле

Rem. Аф. зв. — частковий випадок зв'язності на вект. розшаруванні.

Випадок рімапового многовида

<u>def.</u> Аф. зв'язність ∇ на M зветься узгодженою з рімановою метрикою g на M, якщо $\underbrace{\forall X \in \mathcal{X}^{\infty-r}(M)}_{}$ $\nabla_X g = 0$.

<u>Rem.</u> Тобто $\forall Y, Z \in \mathcal{X}^{\infty-1}(M)$ ^{ki}

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Запишемо цю умову для $Y = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $X = \frac{\partial}{\partial x^k}$ у лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U $(\forall i, j, k = \overline{1,n})$. Нехай $g|_U = g_{ij}\, dx^i dx^j$, $\{\Gamma^k_{ij}\}$ - с.к. ∇!

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g\left(\Gamma^l_{ki} \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \Gamma^l_{kj} \frac{\partial}{\partial x^l}\right)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il}.$$

<u>Впр.</u> І навпаки, якщо ця умова виконана $\forall i, j, k = \overline{1,n}$ $\overbrace{}^{\forall \text{ лок. координат}}$, то ∇ узгоджена з g.

<u>def.</u> Аф. зв'язність ∇ на M зветься рімановою зв'язністю (зв. Леві-Чівіта) ріманової м-ки g на M (або рім. зв. (M, g)), якщо вона без скруту і узгоджена з g.

Рч. (формула Кошуля). $\forall$ ріманового мн. (M,g) $\exists!$ ріманова зв'язність ∇. Вона визначена формулою:

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\Big(X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y)\Big) \quad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}^{\infty}(M). \qquad (***)$$

$\triangleright$! Нехай ∇ — якась ріманова зв. g. Доведемо тоді $(***)$. Вона визначатиме ∇ однозначно. Дійсно, нехай для деякого поля X ми знаємо $g(X,Y)$ $\forall Y$. Тоді $\forall p \in M$ нам відоме $g_p(X_p, v)$ $\forall v \in T_pM$ (бо $\forall v \in T_pM$ $\exists Y: Y_p = v$ — Впр.). Оскільки g_p — скал. добуток, це однозначно визначає X_p. Отже, ми знаємо $X: p \mapsto X_p$. В такому випадку $g(\nabla_X Y, Z)$ $\forall Z$ визначає $\nabla_X Y$ $(\forall X, Y)$. Оскільки ∇ узгоджена з g:

$$X(g(Y,Z)) = \underline{g(\nabla_X Y, Z)} + g(Y, \cancel{\nabla_X} Z)$$

$$Y(g(Z,X)) = g(\nabla_Y Z, X) + g(\cancel{Z}, \cancel{\nabla_Y} X)$$

$$-Z(g(X,Y)) = -g(\nabla_Z \cancel{X}, Y) - g(X, \cancel{\nabla_Z} \cancel{Y})$$

Оскільки ∇ без скруту:

$$g([X,Y],Z) = \underline{g(\nabla_X Y, Z)} - g(\nabla_Y X, Z)$$

$$-g([Y,Z],X) = -g(\nabla_Y Z, X) + g(\nabla_Z Y, X)$$

$$g([Z,X],Y) = g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_X Z, Y)$$

Приводячи подібні, отримуємо потрібне.

$\underline{3}$. Тепер для довільного ріманового (M,g) позначимо праву частину (***) через $F(X,Y,Z)$. Отримаємо $F: \mathfrak{X}^{\varkappa-1}(M)\times\mathfrak{X}^{\varkappa-1}(M)\times\mathfrak{X}^{\varkappa-1}(M)\to C^{\varkappa-2}(M)$.

При цьому F 3-лінійне відн. додавання полів, і $\forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}^{\varkappa-1}(M)$, $f\in C^{\varkappa-1}(M)$:

$$F(fX,Y,Z) = f\cdot F(X,Y,Z) + \frac{1}{2}\big(Y(f)g(Z,X) - Z(f)g(X,Y) - Y(f)g(X,Z) + Z(f)g(X,Y)\big) = f\cdot F(X,Y,Z).$$

$$F(X,fY,Z) = f\cdot F(X,Y,Z) + \frac{1}{2}\big(\underline{X(f)g(Y,Z)} - Z(f)g(X,Y) + \underline{X(f)g(Y,Z)} + Z(f)g(Y,X)\big) = f\cdot F(X,Y,Z) + X(f)g(Y,Z).$$

$$F(X,Y,fZ) = f\cdot F(X,Y,Z) + \frac{1}{2}\big(X(f)g(Y,Z) + Y(f)g(Z,X) - Y(f)g(Z,X) - X(f)g(Z,Y)\big) = f\cdot F(X,Y,Z).$$

Нехай $X, Y \in \mathfrak{X}^{x-1}(M)$. З лінійності за додаванням і третьої власт. вище випливає, що $F(X, Y, \cdot)$ – 1-форма на M (x-2)-и.)

<u>Впр.</u> $\forall$ 1-форми α на рімановому (M, g) $\exists!$ в. поле X таке, що $g(X, Y) = \alpha(Y)$ $\forall Y$ (пор. з зауваженням у доведенні $\underline{!}$ про однозначну визначеність)(див. додаткові матеріал про вект. аналіз)

Отже, можна однозначно визначити $\nabla_X Y$ (деяке) умовою $g(\nabla_X Y, Z) = F(X, Y, Z)$ $\forall Z$

<u>Впр.</u> $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}^{x-2}(M)$. Воно визначене і для $X \in \mathfrak{X}^{x-2}(M)$ (а $Y \in \mathfrak{X}^{x-1}(M)$).

При цьому $\forall$ полів X, Y, Z, W, ф-цій f, h потрібних гладкостей:

$$g(\nabla_{fX+hY} Z, W) = F(fX + hY, Z, W) = f F(X, Z, W) + h F(Y, Z, W) =$$
$$= g(f \nabla_X Z + h \nabla_Y Z, W).$$

$$g(\nabla_X (Y+Z), W) = F(X, Y+Z, W) = F(X, Y, W) + F(X, Z, W) = g(\nabla_X Y + \nabla_X Z, W).$$

$$g(\nabla_X (fY), W) = F(X, fY, W) = f F(X, Y, W) + X(f) g(Y, W) = g(f \nabla_X Y + X(f) Y, W).$$

Оскільки це так $\forall W$, згідно з зауваженням про єдиність, ∇ – аф. зв'язність, $\forall X, Y, Z$

$$g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) = F(X,Y,Z) - F(Y,X,Z) = \frac{1}{2}\big(g([X,Y],Z) - g([Y,X],Z)\big) =$$

$= g([X,Y],Z)$, де інші доданки скорочуються. Знову ж, це означає, що $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, тобто ∇ — без скруту.

Нарешті, $g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = F(X,Y,Z) + F(X,Z,Y) = X(g(Y,Z))\ \forall X,Y,Z$ (це знову решта членів скоротилася). Отже, ∇ узгоджена з g і є рімановою зв. g. ▲

(як завжди, $g|_U = g_{ij}\,dx^i dx^j$), Γ^k_{ij} — с.к. ∇ на U)

Rem. У лок. коорд. $(x^1,\dots,x^n)$ на U для $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$, $i,j,k = \overline{1,n}$:

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) + 0\right)$$

$$\Gamma^l_{ij}\underbrace{g\left(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)}_{g_{lk}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)}$$

іноді позначають $\Gamma_{ij,k}$ — с.к. I роду (наші — II роду)

бо $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$ $\forall i,j$

$\forall k$ домножимо на g^{km} (це коефіцієнти G^{-1}, де $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$) і додамо:

$$\Gamma^m_{ij} = \Gamma^l_{ij}\underbrace{g_{lk}g^{km}}_{=\delta^m_l} = \frac{1}{2}g^{km}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Ex. Для E^n $g_{ij} = \delta_{ij}$ постійні, тому $\Gamma^k_{ij} = 0$ — зв'язність пласка. У загалі, якщо (M,g) плаский, тобто лок. ізометріманий E^n, то в околі [redacted] $\forall$ його точки $\exists$ лок. коорд., у яких $g_{ij} = \delta_{ij}$, і так само $\Gamma^k_{ij} = 0$.

<u>Сл.</u> Пласкі ріманові многовиди мають пласку ріманову зв'язність.

<u>Лем.</u> Якщо аф. зв'язність ∇ узгоджена з рім. м-кою g, то $\forall \gamma \in C^{\varkappa}(I, M)$ ($I \subset \mathbb{R}$ - проміжок) $\forall$ $(\varkappa-1)$-гл. в. полів X, Y уздовж γ

$$g(X,Y)' = g(\nabla_{\gamma'}X, Y) + g(X, \nabla_{\gamma'}Y).$$

$\triangleright$ Тут $g(X,Y) : t \mapsto g_{\gamma(t)}(\underset{T_{\gamma(t)}M}{\underbrace{X(t), Y(t)}}) \in \mathbb{R}$ - ф-ція на I, $(\varkappa-1)$-гл., додавки справа - аналогічно ($(\varkappa-2)$-гл.). У лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U нехай $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ - лок. зад. γ, $X|_{\gamma^{-1}(U)} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y|_{\gamma^{-1}(U)} = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $g|_U = g_{ij}\, dx^i dx^j$. Тоді $g(X,Y)|_{\gamma^{-1}(U)} = g_{ij}(\gamma^1, \dots, \gamma^n) X^i Y^j$, тому

Γ^k_{ij} - с. к. ∇

$$g(X,Y)'|_{\gamma^{-1}(U)} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(\gamma^k)' X^i Y^j + g_{ij}(X^i)' Y^j + g_{ij} X^i (Y^j)' =$$

[лок. запис умови узгодженості]

$$= g_{lj}\left(\Gamma^l_{ki}(\gamma^k)' X^i + (X^l)'\right) Y^j + g_{il} X^i \left(\Gamma^l_{kj}(\gamma^k)' Y^j + (Y^l)'\right) = \left(g(\nabla_{\gamma'}X, Y) + g(X, \nabla_{\gamma'}Y)\right)\Big|_{\gamma^{-1}(U)},$$

і це так $\forall$ лок. коорд. $\triangleleft$

<u>Сл.</u> Якщо X і Y паралельні, то $g(X,Y)$ постійна.

Зокрема, $|X|$ постійна для паралельного X.

▷ Для паралельних X і Y $\nabla_{\gamma'} X = \nabla_{\gamma'} Y = 0$, тому з формули $g(X,Y)' = 0 \Rightarrow$ [І зв'язний] $\Rightarrow g(X,Y)$ пост.; $|X| = \sqrt{g(X,X)}$. ◭

Rem. Тобто паралельне перенесення уздовж кривої зберігає довжини векторів і кути між ними: $P_{t_0,t_1}: (T_{\gamma(t_0)}M, g_{\gamma(t_0)}) \to (T_{\gamma(t_1)}M, g_{\gamma(t_1)})$ – лін. ізометрія (лінійність – з Упр. вище або безпосередньо з ізометричності).

Cor. Якщо γ – геодезична аф. зв., що узгоджена з метрикою, то у цій м-ці $|\gamma'|$ пост. ▷ Для геод. γ' – паралельне. ◭

Rem. Зокрема, знаємо, що $\forall p \in M\ \forall v \in T_pM\ \exists!$ геод. $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ така, що $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Тоді $|\gamma'| = |v|$, тобто γ або постійна (при $v = 0$), або регулярна з "майже натуральною" параметризацією (при $v \neq 0$).
тобто $|\gamma'| \equiv const$

Rem. При невиродженій лін. заміні параметра $\tau = \alpha t + \beta$,

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \quad \gamma'_\tau = \gamma'_t \cdot t'_\tau = \frac{1}{\alpha}\gamma'_t$, тому $\nabla_{\gamma'_\tau}\gamma'_\tau = \frac{1}{\alpha^2}\nabla_{\gamma'_t}\gamma'_t$

Т.ч., властивість γ бути геодезичною зберігається. Зокрема, вона зберігається для заміни одного нат. параметра на інший: $\sigma = c \pm s$.

Rem. Далі зв'язність всюди вважаємо рімановою.

def. Крива $\gamma \in C^\infty(I, M)$ зветься геодезичною ріманового многовида (M, g), якщо вона або постійна, або еквівалентна кривій μ, що є натурально параметризованою геодезичною ріманової зв'язності ∇ метрики g: $\gamma \sim \mu$, $\nabla_{\mu'}\mu' = 0$, $|\mu'| = 1$.

Rem. З зауважень вище випливає, що це def. коректне і що власт. γ бути геодезичною зберігається при переході до еквівалентної кривої. Усі непостійні геодезичні регулярні. Геодезичні з Th. про $\exists!$ (для ріманової зв.) задовольняють цьому def.: якщо $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ і $\nabla_{\gamma'_t}\gamma'_t = 0$, то при $v \neq 0$ $s = |v|t$ - нат. параметр $\left(\gamma'_s = \frac{1}{|v|}\gamma'_t \Rightarrow |\gamma'_s| = \frac{|v|}{|v|} = 1\right)$, і $\nabla_{\gamma'_s}\gamma'_s = \frac{1}{|v|^2}\nabla_{\gamma'_t}\gamma'_t = 0$.

Ex.1. У E^n рім. зв. пласка, тому геодезичні – прямолінійні прямих (див. Ex. вище). У пласких (M,g) вони виглядають як прямі у відп. "пласких" лок. координатах.

Z. Дослідимо геодезичні на $S^n \subset E^{n+1}$. Для цього доведемо більш загальну достатню умову!

Пр. Нехай (M,φ) – підмноговид у E^n з I фунд. формою g, φ-ін'єкт. π – його (r-вимірна) площина симетрії, тобто для симетрії σ пр-ру E^n відн. π $\sigma(\varphi(M)) = \varphi(M)$. Нехай $\varphi(M) \cap \pi$ – носій $\varphi\circ\gamma$, і $\forall t \in I$ (обл. визн. γ) $\dim(T_{\gamma(t)}(M,\varphi) \cap \pi) = 1$, де γ – рег. крива в M. Тоді γ – геодезична.

▷ "Обмежимо" σ на M, тобто визначимо $\sigma_M : M \to M$ умовою $\varphi\circ\sigma_M = \sigma\circ\varphi$ (це можна зробити, бо $\sigma(\varphi(M)) = \varphi(M)$ і φ - ін'.).

Зап. Для будь-якої ізометрії σ такої, що $\sigma(\varphi(M)) = \varphi(M)$, σ_M – ізометрія (M,g). Це вірно для підмноговида у $\forall$

рім. многовиді. Чи вірно це для просторів з індукованою внутр. метрикою (і метричних ізометрій)?

Отже, $\sigma_M : M \to M$ – ізометрія. За побудовою, вона залишає точки носія γ на місці, тобто $\sigma_M \circ \gamma = \gamma$.

<u>Твр.</u> $\forall$ рім. мн. (M,g), $\forall$ (N,h) ізометрії $F : M \to N$ і $\forall$ кр. $\gamma : I \to M$:

$$\nabla_{(F\circ\gamma)'}(F\circ\gamma)'(t) = d_{\gamma(t)}F\left(\nabla_{\gamma'}\gamma'(t)\right) \quad \forall t \in I.$$

Тут ∇ зліва і справа – рім. зв. h і g відп.

(Зокрема, при ізометріях геодезичні переходять у геодезичні).

Застосувавши <u>Твр.</u> до $F = \sigma_M$, маємо $d_{\gamma(t)}\sigma_M\left(\nabla_{\gamma'}\gamma'(t)\right) = \nabla_{\gamma'}\gamma'(t)$ $\forall t$. Далі можемо вважати t натуральним (якщо це не так, перейдемо до натурального), тобто $g(\gamma',\gamma') = 1$. Застосуємо <u>Lem</u> вище:

$$0 = g(\gamma',\gamma')' = g(\nabla_{\gamma'}\gamma',\gamma') + g(\gamma',\nabla_{\gamma'}\gamma') = 2g(\nabla_{\gamma'}\gamma',\gamma').$$

Згідно з <u>Def</u> I фунд. форми, $\forall t \in I$

$$0 = g(\nabla_{\gamma'}\gamma'(t),\gamma'(t)) = \langle d_{\gamma(t)}\varphi(\nabla_{\gamma'}\gamma'(t)), d_{\gamma(t)}\varphi(\gamma'(t))\rangle = \left[\begin{array}{c}\text{Def. } d_{\gamma(t)}\varphi \\ \text{і Твр. для} \\ F=\varphi\end{array}\right] =$$

$$= \langle \nabla_{(\varphi\circ\gamma)'}(\varphi\circ\gamma)'(t), (\varphi\circ\gamma)'(t)\rangle$$

Тут у останньому виразі ∇ - рім. зв. евкл. п-ра (з прикладів вище). Втр. строгого кажучи, не застосовується до ізометричного занурення φ, але її можна узагальнити на цей випадок.

Отже, $\nabla_{(\varphi\circ\gamma)'}(\varphi\circ\gamma)'(t) \perp (\varphi\circ\gamma)'(t)$ і лежать у $T_{\gamma(t)}(M,\varphi)$ $\forall t$.

Оскільки перетин $T_{\gamma(t)}(M,\varphi)$ і π натягнутий на $(\varphi\circ\gamma)'(t)$, звідси

$\nabla_{(\varphi\circ\gamma)'}(\varphi\circ\gamma)'(t) \perp \pi$ $\forall t$. Тому

$$d_{(\varphi\circ\gamma)(t)}\sigma\left(\nabla_{(\varphi\circ\gamma)'}(\varphi\circ\gamma)'(t)\right) = \left[\begin{matrix}\sigma\text{ - лінійне (афінне)}\\ \text{ототожн. } T_{(\varphi\circ\gamma)(t)}\mathbb{R}^n\\ \text{з } \mathbb{R}^n\end{matrix}\right] = \sigma\left(\nabla_{(\varphi\circ\gamma)'}(\varphi\circ\gamma)'(t)\right) =$$

$$= -\nabla_{(\varphi\circ\gamma)'}(\varphi\circ\gamma)'(t) \quad (\forall t).$$

Але $d_{(\varphi\circ\gamma)(t)}\sigma\left(\nabla_{(\varphi\circ\gamma)'}(\varphi\circ\gamma)'(t)\right) = \left[\begin{matrix}\text{знову Втр.}\\ \text{для } F=\varphi\end{matrix}\right] = d_{(\varphi\circ\gamma)(t)}\sigma \circ d_{\gamma(t)}\varphi$

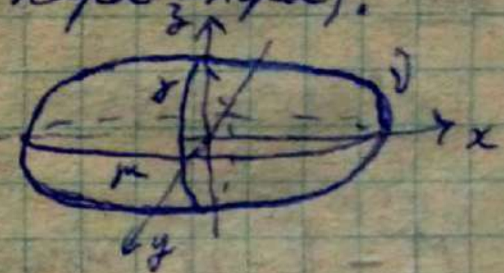
$$\left(\nabla_{\gamma'}\gamma'(t)\right) = \left[\begin{matrix}\text{ланцюгове}\\ \text{правило}\end{matrix}\right] = d_{\gamma(t)}(\sigma\circ\varphi)\left(\nabla_{\gamma'}\gamma'(t)\right) = d_{\gamma(t)}(\varphi\circ\sigma_M)\left(\nabla_{\gamma'}\gamma'(t)\right) =$$

$$= \left[\begin{matrix}\text{знову ланц.}\\ \text{правило,}\\ \sigma_M\circ\gamma=\gamma\end{matrix}\right] = d_{\gamma(t)}\varphi \circ d_{\gamma(t)}\sigma_M\left(\nabla_{\gamma'}\gamma'(t)\right) = d_{\gamma(t)}\varphi\left(\nabla_{\gamma'}\gamma'(t)\right) = \left[\text{Втр. для } \varphi\right] =$$

$$= \nabla_{(\varphi\circ\gamma)'}(\varphi\circ\gamma')(t) \quad (\forall t).$$

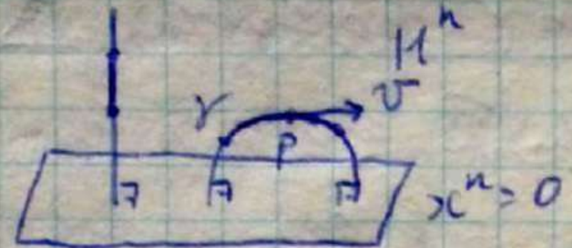
Отже, $0 = \nabla_{(\varphi\circ\gamma)'}(\varphi\circ\gamma)'(t) = d_{\gamma(t)}\varphi\left(\nabla_{\gamma'}\gamma'(t)\right)$ $\forall t$. Оскільки ч запрета (=> $d_{\gamma(t)}\gamma$ – ізо), $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$, тобто γ – геодезична. ▲

Для S^n у E^{n+1}, перетинаючи її з площинами π, що містять O (і є її площинами симетрії), отримаємо, що всі великі кола S^n (а також всі їх проміжки) – геодезичні. Оскільки через $\forall p \in S^n$ у напрямі $\forall v \in T_pS^n$ можна провести велике коло (це $S^n \cap \pi$, де π натягнута на p і v), з $\exists!$ геодезичних маємо, що інших геодезичних немає (з точністю до заміни параметра).



Так само можна знаходити геод. і на інших підмноговидах E^n, наприклад, 3 еліпси на еліпсоїді $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ у E^3 (при попарно різних a, b, c) – його перетини з Oxy, Oyz, Oxz. Відомо, що інших простих (без самоперетинів) замкнених геодезичних на ньому немає.

3. H^n ($\mathbb{R}^n_+$ з $g = \frac{1}{(x^n)^2}\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$). Тут геодезичні – це півкола (та півпрямі), що ортогональні $\{x^n=0\}$, а також їх проміжки (регулярно перепар.)



Дійсно, достатньо перевірити, що вони є геод. (Впр.), тоді з єдиності геод. і того, що через $\forall$ точку у напрямку $\forall$ вектора можна провести таку криву (Впр.) випливає, що інших немає.

def. Для натурально параметризованої γ у рімановому (M, g) $|\nabla_{\gamma'}\gamma'(s)|$ зветься геодезичною кривиною γ у s.

Rem. Тобто γ - геод. $\Leftrightarrow$ її геод. кривина нульова.

Варіаційна задача на многовиді

M – k-гл. многовид, $k \geqslant 1$, $\dim M = n$.

def. Лагранжіаном на M зветься ф-ція $\mathcal{L} \in C(TM)$.

Ex. 1. Лагранжіан довжини рімановоі або субріманової структури: $\mathcal{L}(p, v) = \sqrt{g_p(v, v)}$ (тут, як і раніше, позначаємо ел-ти TM як пари (p, v) : $p \in M$, $v \in T_pM$).

2. Лагр. дії ріманової або субрім. стр.: $\mathcal{L}(p,v) = g_p(v,v)$.

3. Фінслерова структура ($\forall p \in M$ $\mathcal{L}(p,\cdot)$ - норма на T_pM).

4. $M = \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ (відкр.), тоді TM можна ототожнити з $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$ з глоб. коорд. $(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$. Нехай $U \in C^1(\mathcal{U})$.

$$\mathcal{L}(p,v) := \frac{m}{2}|v|^2 - U(p) = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n} (\dot{x}^i)^2 - U(x^1, \dots, x^n)$$

– лагранжіан руху частинки маси $m>0$ в дієї сили
полі сили $F = -\nabla U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x^1}, \dots, -\frac{\partial U}{\partial x^n}\right)$ (U наз. потенціалом або потенціальною енергією, $\frac{m}{2}|v|^2$ - кінетичною енергією).
Наприклад, для сили тяжіння $\mathcal{U} = \{x^n > 0\}$, $U = mgx^n$ (де g - прискорення вільного падіння).

Оз. Функціоналом варіаційної задачі на M з лагранжіаном $\mathcal{L}$ зветься відобр. L, що кожному кусково k-гл. шляху $\gamma : [a,b] \to M$ ставить у відповідність число

$$L(\gamma) := \int_a^b \mathcal{L}(\gamma(t), \gamma'(t))\, dt \in \mathbb{R}.$$

Зат. $L(\gamma)$ визначене, бо інтегрується кусн. неперервна ф-ція. Ф-л L, зокрема, адитивний: $L(\gamma_1 * \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$.

Ex 1. Ріманова довжина шляху, субріманова довжина (якщо обмежити на горизонтальні шляхи)

2. Ан-но, ріманова та субріманова дії.

3. Фінслерова довжина.

4. Дія.

Оз. Кусн. к-гл. шлях $\gamma : [a,b] \to M$ зветься екстремаллю варіаційної задачі на M з лагр. L, якщо $\forall$ кусн. к-гл. шляху $\mu : [\alpha, \beta] \to M$ такого, що $\mu(\alpha) = \gamma(a)$, $\mu(\beta) = \gamma(b)$, $L(\gamma) \leq L(\mu)$ (де L – з попер. Оз.)

Ex 1, 3 Ріманові, субрім., фінслерові найкоротші.

2. Теж найкоротші ! (Впр.) для натуральної параметризації (цей L неінваріантний відн. заміни парам.)

4. Принцип найменшої дії: частка рухається траєкторією, що є екстремаллю вар. задачі.

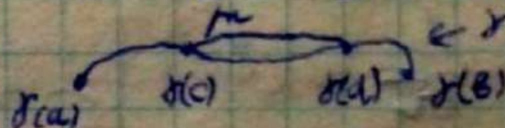
Rem. Звичайно, можна розглядати й умову $L(\gamma) \geq L(\mu)$ $\forall \mu$:
можна просто поміняти $\mathcal{L}$ на $-\mathcal{L}$.

Rem. Нехай $(x^1,\dots,x^n)$ – лок. коорд. на $U \subset M$. Тоді відп. координати на $\pi^{-1}(U) = \{(p,v) \in TM \mid p \in U\}$ у цьому розділі, керуючись традицією, позначатимемо $(x^1,\dots,x^n,\dot{x}^1,\dots,\dot{x}^n)$ (як у Ex.4 – це координати та швидкість частинки).

Th. (Рівняння Ейлера-Лагранжа). Нехай варіаційна задача на k-гл. M $(k \geq 2)$ задана лагр. $\mathcal{L} \in C^{k-1}(TM)$ і $\gamma : [a,b] \to M$ – її кусн. k-гл. екстремаль. Тоді $\forall\, t_0 \in [a,b]$ $\forall$ лок. коорд. $(x^1,\dots,x^n)$ на $U \ni \gamma(t_0)$ і для відп. координат $(x^1,\dots,x^n,\dot{x}^1,\dots,\dot{x}^n)$ на $\pi^{-1}(U)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}(\gamma,\gamma')\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i}(\gamma,\gamma') \text{ на } \gamma^{-1}(U), \quad i = \overline{1,n}.$$

Lem. Якщо $\gamma : [a,b] \to M$ – екстремаль в.з., то $\forall\, [c,d] \subset [a,b]$ $\gamma|_{[c,d]}$ – теж екстремаль цієї в.з.



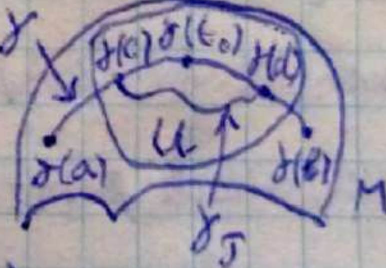
▷ $\gamma|_{[c,d]}$ – кусн. k-гл. і це не екстремаль, тобто $\exists\, \mu : [c,d] \to$

$\to M$ — кусн. k-гл., і $\underbrace{\mu(c)=\gamma(c),\ \mu(d)=\gamma(d),}$ $L(\mu) < L(\gamma|_{[c,d]})$. Тоді $\tilde{\gamma} := \overbrace{\gamma|_{[a,c]} * \mu * \gamma|_{[d,b]}}^{:[a,b]\to M}$ —

кусн. k-гл., і $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\mu) + L(\gamma|_{[d,b]}) < L(\gamma|_{[a,c]})$

$+ L(\gamma|_{[c,d]}) + L(\gamma|_{[d,b]}) = L(\gamma)$; тобто γ — не екстремаль. ↯ ◭

▷ (Тh.) Нехай $[c,d] \subset [a,b]$ — такий, що $t_0 \in [c,d]$ і $\gamma([c,d]) \subset U$. Розглянемо довільний кусн. k-гл. $\mu : [c,d] \to U$ з лок. зад. $(\mu^1, \dots, \mu^n)$ в коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ такий, що $\mu^i(c) = \mu^i(d) = 0$, $i = \overline{1,n}$ (збурення). Нехай $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ — лок. зад. γ. $\forall\, \sigma \in \mathbb{R}$ визначимо $\gamma_\sigma : [c,d] \to U$ лок. заданням



$t \mapsto (\gamma^1(t) + \sigma\mu^1(t), \dots, \gamma^n(t) + \sigma\mu^n(t))$

(варіація). За побудовою, γ_σ — кусн. k-гл., $\gamma_\sigma(c) = \gamma(c)$, $\gamma_\sigma(d) = \gamma(d)$, $\gamma_0 = \gamma|_{[c,d]}$. За Lem, тоді $L(\gamma_0) \leq L(\gamma_\sigma)$ $\forall\, \sigma$, тобто $\sigma = 0$ — т. мінімума $\sigma \mapsto L(\gamma_\sigma)$, зокрема критична:

$$0 = \frac{d}{d\sigma} L(\gamma_\sigma)\Big|_{\sigma=0} = \frac{d}{d\sigma}\left(\int_c^d \mathcal{L}\left(\gamma^1(t) + \sigma\mu^1(t), \dots, \gamma^n(t) + \sigma\mu^n(t),\right.\right.$$
$$\left.\left.\dot{\gamma}^1(t) + \sigma\dot{\mu}^1(t), \dots, \dot{\gamma}^n(t) + \sigma\dot{\mu}^n(t)\right) dt\right)\Big|_{\sigma=0} =$$ тут $\dot{}$ означає просто похідну

$$= \int_c^d \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t), \dot\gamma^1(t), \ldots, \dot\gamma^n(t)) \mu^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot x^i} (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t), \dot\gamma^1(t), \ldots, \dot\gamma^n(t)) \dot\mu^i(t) \right) dt = \left[\begin{array}{l}\text{інтегруємо} \\ \text{другу суму} \\ \text{частинами}\end{array}\right] = \int_c^d \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} (\gamma(t), \gamma'(t)) \mu^i(t) - \right.$$

$$\left. - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot x^i} (\gamma(t), \gamma'(t)) \right) \mu^i(t) \right) dt + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot x^i} (\gamma(t), \gamma'(t)) \mu^i(t) \Big|_c^d}_{\overset{\shortparallel}{0}, \text{ бо } \mu^i(c) = \mu^i(d) = 0 \ \forall i} .$$

Отже $\forall \mu$ як вище

$$\int_c^d \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} (\gamma(t), \gamma'(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot x^i} (\gamma(t), \gamma'(t)) \right) \right) \mu^i(t) \, dt = 0 .$$

Обираючи різні μ, отримаємо звідси рівняння Е.-Л. ▲

<u>Впр.</u> Визначимо $E : TM \to \mathbb{R}$ локально як $E := \frac{\partial L}{\partial \dot x^i} \dot x^i - L$.

Показати, що вона коректно визначена і що $E(\gamma, \gamma')$ постійна $\forall$ екстремалі γ. E зветься енергією вар. задачі (зокрема, у <u>Ex. 4</u> $E(p, v) = \frac{m}{2} |v|^2 + U(p)$ - повна енергія частинки).

Що таке енергія у задачі про пошук найкоротших?

<u>Ex. 1.</u> Отже, у лок. коорд. $(x^1, \ldots, x^n, \dot x^1, \ldots, \dot x^n)$ на $\pi^{-1}(U)$, якщо $g|_U = g_{ij} dx^i dx^j$, маємо $L = \sqrt{g_{ij}(x^1, \ldots, x^n) \dot x^i \dot x^j}$, тому