Варіант 1

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:
$$r(u,v) = (\cos u, v, \sin u, v).$$

2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ і $Y = yz\frac{\partial}{\partial x} + xz\frac{\partial}{\partial y} + xy\frac{\partial}{\partial z}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y, інтегровним?

3. Компоненти $(0,4)$-тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $T^{2111} = 2$, $T^{1211} = a$, $T^{1121} = b$, $T^{1112} = c$, інші компоненти дорівнюють нулю. Знайти a, b, c такі, що цей тензор симетричний. Записати його компоненти $\widetilde{T^{2111}}$ і $\widetilde{T^{1112}}$ у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u,v):
$$r(u,v) = (\cos u, v, \sin u, v).$$

5. У многовиді з рімановою метрикою $g = \frac{1}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ знайти довжину шляху $r(t) = (at, bt, ct)$, $t \in [\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$, де $a, b, c > 0$, та об'єм множини $x \in [\alpha, \beta]$, $y \in [\gamma, \delta]$, $z \in [\varepsilon, \zeta] \subset (0, +\infty)$.

Варіант 2

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:
$$r(u,v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u \cos v, u \sin v).$$

2. Знайти запис векторних полів $X = \frac{\partial}{\partial r}$ і $Y = \frac{\partial}{\partial \psi}$ у декартовій системі координат, якщо (r, φ, ψ) – сферичні координати на $\mathbb{R}^3$. Перевірити, що у декартових координатах їхня дужка Лі дорівнює 0.

3. Компоненти $(1,2)$-тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a_1^{11} = 1$, $a_1^{22} = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним (за верхньою парою індексів)? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u,v):
$$r(u,v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u \cos v, u \sin v).$$

5. У многовиді з рімановою метрикою $g = \frac{1}{w^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2)$ знайти довжину шляху $r(t) = (a\cos t, a\sin t, a\cos t, a\sin t)$, $t \in [\alpha, \beta] \subset (0, \pi)$, де $a > 0$, та об'єм множини $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $z \in [\alpha, \beta]$, $w \in [\gamma, \delta] \subset (0, +\infty)$.

Варіант 3

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:
$$r(u,v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \cos u \sin v, \sin u \sin v).$$

2. Знайти інтегральні траєкторії векторного поля $X = x^3 \frac{\partial}{\partial x} - y^3 \frac{\partial}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^2$.

3. Компоненти $(2,1)$-тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $A^2_{11} = a$, $A^1_{12} = -1$, $A^1_{21} = b$, $A^2_{22} = c$, інші компоненти дорівнюють нулю. Знайти a, b, c такі, що цей тензор кососиметричний (за нижньою парою індексів). Записати його компоненти $\widetilde{A^2_{11}}$ і $\widetilde{A^2_{22}}$ у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Записати зовнішню 2-форму $\frac{y}{x}\, dx \wedge dy$ у полярних координатах (r, φ) на $\mathbb{R}^2$.

5. У многовиді з рімановою метрикою $g = dx^2 + \sin^2 x\, dy^2 + \sin^2 x \sin^2 y\, dz^2$ знайти довжину шляху $r(t) = (\pi/2, t, a)$, $t \in [\alpha, \beta] \subset (0, \pi)$ та об'єм множини $x \in [\alpha, \beta] \subset (0, \pi)$, $y \in [\gamma, \delta] \subset (0, \pi)$, $z \in [\varepsilon, \zeta] \subset (0, 2\pi)$.

Варіант 4

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:
$$r(u,v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u, v).$$

2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ і $Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y, інтегровним?

3. Компоненти $(0,3)$-тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a^{111} = 1$, $a^{121} = -1$, $a^{211} = 1$, $a^{112} = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним? Записати його компоненти $\widetilde{a^{111}}$ і $\widetilde{a^{121}}$ у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u, v):
$$r(u,v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \cos u \sin v, \sin u \sin v).$$

5. У многовиді з рімановою метрикою $g = dx^2 + \cos^2 x\, dy^2 + \cos^2 x \cos^2 y\, dz^2$ знайти довжину шляху $r(t) = (\pi/4, t, a)$, $t \in [\alpha, \beta] \subset (0, \pi/2)$ та об'єм множини $x \in [\alpha, \beta] \subset (0, \pi/2)$, $y \in [\gamma, \delta] \subset (0, \pi/2)$, $z \in [\varepsilon, \zeta] \subset (0, \pi)$.

Варіант 5

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v).$$

2. Знайти інтегральні траєкторії векторного поля $X = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^2$.

3. Компоненти $(2,1)$-тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a^2_{11} = 1$, $a^1_{12} = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним (за нижньою парою індексів)? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u,v):

$$r(u,v) = (\cos u, e^v, \sin u, e^{-v}).$$

5. У многовиді з рімановою метрикою $g = dx^2 + \operatorname{ch}^2 x\, dy^2 + \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y\, dz^2$ знайти довжину шляху $r(t) = (0,t,a)$, $t \in [\alpha,\beta] \subset (0,+\infty)$ та об'єм множини $x \in [\alpha,\beta] \subset (0,+\infty)$, $y \in [\gamma,\delta] \subset (0,+\infty)$, $z \in [\varepsilon,\zeta] \subset (0,+\infty)$.

Варіант 6

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u,v) = (\cos u, e^v, \sin u, e^{-v}).$$

2. Знайти запис векторного поля $X = -\varphi\frac{\partial}{\partial r} + r\frac{\partial}{\partial \varphi}$ у декартовій системі координат, якщо (r,φ) – полярні координати на $\mathbb{R}^2$. Знайти похідну функції $f(x,y) = x^2 - y^2$ у напрямку цього поля.

3. Компоненти $(3,0)$-тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a_{212} = 1$, $a_{121} = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u,v):

$$r(u,v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v).$$

5. У многовиді з рімановою метрикою $g = \frac{1}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ знайти довжину шляху $r(t) = (a\cos t, a\sin t, b)$, $t \in [\alpha,\beta]$ та об'єм множини $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $z \in [\alpha,\beta] \subset (0,+\infty)$.

Варіант 7

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:
$$r(u,v) = (3u + 3uv^2 - u^3, v^3 - 3v - 3u^2 v, u^2 - v^2).$$
2. Знайти інтегральні траєкторії векторного поля $X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^2$.
3. Компоненти $(0,3)$-тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a^{211} = 1$, $a^{112} = 1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює
$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Записати зовнішню 2-форму $(x^2 - y^2)\, dx \wedge dy$ у полярних координатах (r, φ) на $\mathbb{R}^2$.
5. Знайти символи Кристоффеля метрики $g = du^2 + dv^2 + \operatorname{ch}^2 u\, dw^2$ на тривимірному многовиді та рівняння геодезичних. Знайти геодезичну, що проходить через точку $(0,0,0)$ у напрямку вектора $(1,1,0)$.

Варіант 8

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:
$$r(u,v) = (\cos u, v, \sin u, v).$$
2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ і $Y = yz\frac{\partial}{\partial x} + xz\frac{\partial}{\partial y} + xy\frac{\partial}{\partial z}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y, інтегровним?
3. Компоненти $(0,4)$-тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $T^{2111} = 2$, $T^{1211} = a$, $T^{1121} = b$, $T^{1112} = c$, інші компоненти дорівнюють нулю. Знайти a, b, c такі, що цей тензор симетричний. Записати його компоненти $\widetilde{T^{2111}}$ і $\widetilde{T^{1112}}$ у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u,v):
$$r(u,v) = (\cos u, v, \sin u, v).$$
5. У многовиді з рімановою метрикою $g = \frac{1}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ знайти довжину шляху $r(t) = (at, bt, ct)$, $t \in [\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$, де $a, b, c > 0$, та об'єм множини $x \in [\alpha, \beta]$, $y \in [\gamma, \delta]$, $z \in [\varepsilon, \zeta] \subset (0, +\infty)$.

Варіант 9

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u, v).$$

2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}$ і $Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y, інтегровним?

3. Для якого найменшого n існують кососиметричні $(3,0)$-тензори у точці n-вимірного многовида? Навести приклад такого тензора, виписавши його компоненти у деяких локальних координатах $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Знайти компоненти цього тензора у координатах $(x^1 + x^2, x^2, \ldots, x^n)$.

4. Записати зовнішню 2-форму $dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$ у сферичних координатах (r, φ, ψ) на $\mathbb{R}^3$.

5. Знайти символи Кристоффеля метрики $g = du^2 + dv^2 + \operatorname{ch}^2 u \, dw^2$ на тривимірному многовиді та рівняння паралельного перенесення. Перенести паралельно вектор $(1, 1, 1)$ з точки $(1, 0, 0)$ у точку $(2, 0, 0)$ уздовж кривої $(t, 0, 0)$.

Варіант 10

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u \cos v, u \sin v).$$

2. Знайти запис векторних полів $X = \frac{\partial}{\partial r}$ і $Y = \frac{\partial}{\partial \psi}$ у декартовій системі координат, якщо (r, φ, ψ) – сферичні координати на $\mathbb{R}^3$. Перевірити, що у декартових координатах їхня дужка Лі дорівнює 0.

3. Компоненти $(1,2)$-тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a_1^{11} = 1$, $a_1^{22} = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним (за верхньою парою індексів)? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u, v):

$$r(u, v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u \cos v, u \sin v).$$

5. У многовиді з рімановою метрикою $g = \frac{1}{w^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2)$ знайти довжину шляху $r(t) = (a \cos t, a \sin t, a \cos t, a \sin t)$, $t \in [\alpha, \beta] \subset (0, \pi)$, де $a > 0$, та об'єм множини $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $z \in [\alpha, \beta]$, $w \in [\gamma, \delta] \subset (0, +\infty)$.

Варіант 11

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v).$$

2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}$ і $Y = \frac{\partial}{\partial z}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y, інтегровним?

3. Компоненти $(0,3)$-тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a^{221} = 1$, $a^{122} = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Записати зовнішню 3-форму $(x^2+y^2)\, dx\wedge dy\wedge dz$ у циліндричних координатах (r,φ,z) на $\mathbb{R}^3$.

5. Знайти символи Кристоффеля метрики $g = e^{2w}\, du^2 + dv^2 + dw^2$ на тривимірному многовиді та рівняння геодезичних. Знайти геодезичну, що проходить через точку $(0,0,0)$ у напрямку вектора $(0,1,1)$.

Варіант 12

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u,v) = (\cos u, \operatorname{ch} v, \sin u, \operatorname{sh} v).$$

2. Знайти запис векторних полів $X = \frac{\partial}{\partial r}$ і $Y = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ у декартовій системі координат, якщо (r,φ,z) – циліндричні координати в $\mathbb{R}^3$. Перевірити, що у декартових координатах їхня дужка Лі дорівнює 0.

3. Нехай (a_{ijk}) – компоненти симетричного тензора, а (b^{ijk}) – кососиметричного для деяких локальних координат в околі точки. Чому дорівнює сума $a_{ijk}b^{ijk}$? Чи залежить це число від вибору координат?

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u,v):

$$r(u,v) = (\cos u, \operatorname{ch} v, \sin u, \operatorname{sh} v).$$

5. Знайти символи Кристоффеля метрики $g = (1+w^2)du^2 + dv^2 + dw^2$ на тривимірному многовиді та рівняння паралельного перенесення. Перенести паралельно вектор $(1,1,1)$ з точки $(0,1,0)$ у точку $(0,2,0)$ уздовж кривої $(0,t,0)$.

Варіант 13

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u,v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \cos u \sin v, \sin u \sin v).$$

2. Знайти інтегральні траєкторії векторного поля $X = x^3 \frac{\partial}{\partial x} - y^3 \frac{\partial}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^2$.

3. Компоненти $(2,1)$-тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $A_{11}^2 = a$, $A_{12}^1 = -1$, $A_{21}^1 = b$, $A_{22}^2 = c$, інші компоненти дорівнюють нулю. Знайти a, b, c такі, що цей тензор кососиметричний (за нижньою парою індексів). Записати його компоненти $\widetilde{A_{11}^2}$ і $\widetilde{A_{22}^2}$ у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Записати зовнішню 2-форму $\frac{y}{x}\, dx \wedge dy$ у полярних координатах (r, φ) на $\mathbb{R}^2$.

5. У многовиді з рімановою метрикою $g = dx^2 + \sin^2 x\, dy^2 + \sin^2 x \sin^2 y\, dz^2$ знайти довжину шляху $r(t) = (\pi/2, t, a)$, $t \in [\alpha, \beta] \subset (0, \pi)$ та об'єм множини $x \in [\alpha, \beta] \subset (0, \pi)$, $y \in [\gamma, \delta] \subset (0, \pi)$, $z \in [\varepsilon, \zeta] \subset (0, 2\pi)$.

Варіант 14

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u,v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u, v).$$

2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ і $Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y, інтегровним?

3. Компоненти $(0,3)$-тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a^{111} = 1$, $a^{121} = -1$, $a^{211} = 1$, $a^{112} = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним? Записати його компоненти $\widetilde{a^{111}}$ і $\widetilde{a^{121}}$ у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u, v):

$$r(u,v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \cos u \sin v, \sin u \sin v).$$

5. У многовиді з рімановою метрикою $g = dx^2 + \cos^2 x\, dy^2 + \cos^2 x \cos^2 y\, dz^2$ знайти довжину шляху $r(t) = (\pi/4, t, a)$, $t \in [\alpha, \beta] \subset (0, \pi/2)$ та об'єм множини $x \in [\alpha, \beta] \subset (0, \pi/2)$, $y \in [\gamma, \delta] \subset (0, \pi/2)$, $z \in [\varepsilon, \zeta] \subset (0, \pi)$.

Варіант 15

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v).$$

2. Знайти інтегральні траєкторії векторного поля $X = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^2$.

3. Компоненти $(2, 1)$-тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a_{11}^2 = 1$, $a_{12}^1 = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним (за нижньою парою індексів)? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u, v):

$$r(u, v) = (\cos u, e^v, \sin u, e^{-v}).$$

5. У многовиді з рімановою метрикою $g = dx^2 + \operatorname{ch}^2 x\, dy^2 + \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y\, dz^2$ знайти довжину шляху $r(t) = (0, t, a)$, $t \in [\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$ та об'єм множини $x \in [\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$, $y \in [\gamma, \delta] \subset (0, +\infty)$, $z \in [\varepsilon, \zeta] \subset (0, +\infty)$.

Варіант 16

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (\cos u, e^v, \sin u, e^{-v}).$$

2. Знайти запис векторного поля $X = -\varphi\frac{\partial}{\partial r} + r\frac{\partial}{\partial \varphi}$ у декартовій системі координат, якщо (r, φ) – полярні координати на $\mathbb{R}^2$. Знайти похідну функції $f(x, y) = x^2 - y^2$ у напрямку цього поля.

3. Компоненти $(3, 0)$-тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a_{212} = 1$, $a_{121} = -1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти першу фундаментальну форму поверхні в E^4 на координатному околі, що відповідає локальним координатам (u, v):

$$r(u, v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v).$$

5. У многовиді з рімановою метрикою $g = \frac{1}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ знайти довжину шляху $r(t) = (a \cos t, a \sin t, b)$, $t \in [\alpha, \beta]$ та об'єм множини $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $z \in [\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$.

Варіант 17

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u,v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \cos u, \cos v).$$

2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ і $Y = y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y, інтегровним?

3. Нехай a_1, a_2, a_3 – дотичні вектори у деякій точці тривимірного многовида. Визначимо для якихось локальних координат в околі цієї точки тензор B компонентами $B_{ijk} = (a_i, a_j, a_k)$, де (a_i, a_j, a_k) позначає детермінант з координат цих векторів у відповідному базисі. Показати, що B є кососиметричним. Чи зберігається формула для його компонент в інших координатах?

4. Записати зовнішню 3-форму $dx \wedge dy \wedge dz$ у сферичних координатах (r, φ, ψ) на $\mathbb{R}^3$.

5. Знайти символи Кристоффеля метрики $g = du^2 + \cos^2 u\, dv^2 + dw^2$ на тривимірному многовиді та рівняння геодезичних. Знайти геодезичну, що проходить через точку $(0,0,0)$ у напрямку вектора $(1,0,1)$.

Варіант 18

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u,v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v).$$

2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = z\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$ і $Y = z\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y, інтегровним?

3. Визначимо для якихось локальних координат в околі точки многовида тензор A компонентами $A_{ijk} = \delta_{ij} + \delta_{jk} + \delta_{ki}$. Показати, що A є симетричним. Чи зберігається формула для його компонент в інших координатах?

4. Записати зовнішню 2-форму $dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$ у циліндричних координатах (r, φ, z) на $\mathbb{R}^3$.

5. Знайти символи Кристоффеля метрики $g = e^{2w}du^2 + dv^2 + dw^2$ на тривимірному многовиді та рівняння паралельного перенесення. Перенести паралельно вектор $(1,1,1)$ з точки $(0,0,1)$ у точку $(0,0,2)$ уздовж кривої $(0,0,t)$.

Варіант 19

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (3u + 3uv^2 - u^3, v^3 - 3v - 3u^2v, u^2 - v^2).$$

2. Знайти інтегральні траєкторії векторного поля $X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^2$.

3. Компоненти $(0, 3)$-тензора у точці двовимірного многовида у деякій локальній системі координат мають вигляд $a^{211} = 1$, $a^{112} = 1$, інші компоненти дорівнюють нулю. Чи є цей тензор симетричним або кососиметричним? Записати його компоненти у нових координатах таких, що матриця Якобі відображення переходу від старих координат до нових дорівнює

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Записати зовнішню 2-форму $(x^2 - y^2)\, dx \wedge dy$ у полярних координатах (r, φ) на $\mathbb{R}^2$.

5. Знайти символи Кристоффеля метрики $g = du^2 + dv^2 + \operatorname{ch}^2 u\, dw^2$ на тривимірному многовиді та рівняння геодезичних. Знайти геодезичну, що проходить через точку $(0, 0, 0)$ у напрямку вектора $(1, 1, 0)$.

Варіант 20

1. Обчислити диференціал відображення, що задане локальним представленням, і визначити, у яких точках області визначення воно є зануренням:

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u, v).$$

2. Знайти дужку Лі векторних полів $X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}$ і $Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}$. Чи є розподіл, що породжений X та Y, інтегровним?

3. Для якого найменшого n існують кососиметричні $(3, 0)$-тензори у точці n-вимірного многовида? Навести приклад такого тензора, виписавши його компоненти у деяких локальних координатах $(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Знайти компоненти цього тензора у координатах $(x^1 + x^2, x^2, \dots, x^n)$.

4. Записати зовнішню 2-форму $dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$ у сферичних координатах (r, φ, ψ) на $\mathbb{R}^3$.

5. Знайти символи Кристоффеля метрики $g = du^2 + dv^2 + \operatorname{ch}^2 u\, dw^2$ на тривимірному многовиді та рівняння паралельного перенесення. Перенести паралельно вектор $(1, 1, 1)$ з точки $(1, 0, 0)$ у точку $(2, 0, 0)$ уздовж кривої $(t, 0, 0)$.