$\gamma : [a,b] \to M$ зветься

$$l(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(t), \gamma'(t))\,dt .$$

Rem. Тут ми використовуємо позначення $TM = \{(p,v) \mid p \in M, v \in T_pM\}$. Зауважимо, що $l(\gamma)$ $\exists$ і ≥ 0, бо під інтегралом невід'ємна кусково неперервна ф-ція. Для ріманового випадку $F(p,v) = \sqrt{g_p(v,v)}$.

Впр. 1. l - ф-л довжини на кус. к-гл. шляхах Γ, тобто (M,Γ,l) - ПВМ.
2. Метрична топ. його внутрішньої м-ки d_l збігається з вихідною М.

Ex. 7 Субріманова метрика

Def m-вимірним розподілом на k-гл. многовиді M ($k \geq 1$, $m \leq n = \dim M$) зветься відображення $\mathcal{D}$, що кожній $p \in M$ ставить у відповідність m-вимірний векторний підпростір $\mathcal{D}_p \subset T_pM$.

Rem. Це відображення $M \to G_mTM := \bigcup_{p\in M} G_mT_pM$ (грасманове розшарування), де $\forall\, p \in M$ G_mT_pM - множина усіх

m-вимірних вект. підпросторів у T_pM (грассманіан). Можна показати, що $G_m T_pM$ — ∞-гладкий $m(n-m)$-вимірний многовид $\forall p$ (див., наприклад, Рохлін-Фукс). А щодо тензорних розшарувань тоді можна показати, що $G_m TM$ — $(k-1)$-гладкий $(n+m(n-m))$-вимірний многовид, тому можна говорити про гладкість розподілів. Але ми просто введемо її у <u>def.</u>:

<u>def.</u> Будемо говорити, що поля $X_1, \dots, X_m$ на $U \subset M$ утворюють базис m-вим. розподілу $\mathcal{D}$ на $U \subset M$, якщо $\forall q \in U$ $\{(X_1)_q, \dots, (X_m)_q\}$ — базис $\mathcal{D}_q$. m-вим. розподіл $\mathcal{D}$ (на M) зветься ℓ-гладким ($\ell \in \overline{0, k-1}$), якщо $\forall p \in M$ $\exists$ відкр. $U \ni p$ і поля $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}^\ell(U)$, що утворюють базис $\mathcal{D}$ на U.

<u>def.</u> m-вим. ℓ-гл. розподіл $\mathcal{D}$ зветься (цілком) інтегровним, якщо $\forall p \in M$ $\exists$ $(\ell+1)$-гл. підмноговид (N, φ) у M з inj занурення φ такий, що $p \in \varphi(N)$ і $\forall q \in N$

$d_q\psi(T_qN) = \mathcal{D}_{\psi(q)}$

<u>Rem.</u> Зокрема, максимальності та $\dim N = m$. Т.ч. (N,ψ) "дотикається" до $\mathcal{D}$ у $\forall$ точці.

Якщо додати умову зв'язності N, то можна показати, що такий (N,ψ) єдиний з точністю до переходу до еквівалентного: аналогічно до кривих, підмноговиди (N,ψ) і $(\tilde{N},\tilde{\psi})$ еквівалентні, якщо $\exists$ дифеоморфізм $\varphi: N \to \tilde{N}$ такий, що $\psi = \tilde{\psi}\circ\varphi$ (зокрема, $\psi(N) = \tilde{\psi}(\tilde{N})$; це відн. екв-сті – <u>Впр.</u>). Такі підмноговиди називають інтегральними для $\mathcal{D}$, а їхню сукупність: інтегральним шаруванням, що відповідає $\mathcal{D}$. Воно має, зокрема, властивість максимальності: якщо (L,ρ) – зв'язний ізу занурений підмн. такий, що $p \in \rho(L)$ і $\forall q \in L$ $d_q\rho(T_qL) \subset \mathcal{D}_{\psi(q)}$, то $\exists$ занурення $\sigma: L \xrightarrow{\bullet} N$ таке, що $\rho = \psi\circ\sigma$ (зокрема, $\rho(L) \subset \psi(N)$). Інтегрування розподілів можна розуміти як узагальнення інтегрування полів.

Th (Фробеніус). m-вим. l-гл. розподіл $\mathcal{D}$ на M ($l \geq 1$) інтегровний $\Leftrightarrow$ $\forall$ полів $X, Y \in \mathfrak{X}^l(M)$ якщо $\forall p \in M$ X_p, $Y_p \in \mathcal{D}_p$, то $\forall p \in M$ $[X,Y]_p \in \mathcal{D}_p$.

▷ Див. Постников. △

Rem. Ці умови записують відп. $X \in \mathcal{D}$, $Y \in \mathcal{D}$, $[X,Y] \in \mathcal{D}$.

def. m-вим. l-гл. розподіл $\mathcal{D}$ на M зветься цілком неінтегровним (цілком неголономним), якщо $\forall p \in M$ $\exists$ відкр. $U \ni p$ і поля $X_1, \dots, X_m \in C^l(U)$, що утворюють базис $\mathcal{D}$ на U і такі, що $\forall q \in U$ значення полів $X_1, \dots, X_m$ і деяких дужок вигляду $[\dots[[X_{i_1}, X_{i_2}], X_{i_3}], \dots, X_{i_s}]$, $i_1, \dots, i_s = \overline{1,m}$ утворюють повну систему в $T_q M$. Тут l таке, щоб усі потрібні дужки існували (або просто $l = k = \infty$).

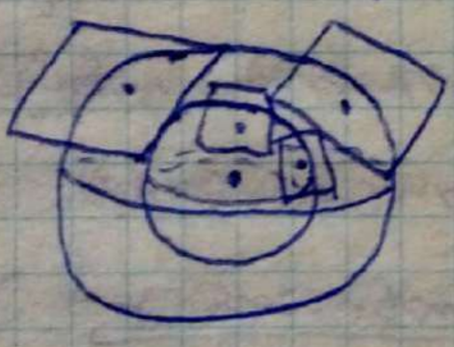
Rem. Тобто ця умова протилежна умові інтегровності з **Th.** Фробеніуса, де усі дужки залишаються $\forall q$ у $\mathcal{D}_q$. Зокрема, $\dim \mathcal{D} \geq 2$ (крім трив. випадку $\dim \mathcal{D} = \dim M = 1$), для $k \geq 1$. Якщо [інакше

$\dim M$ непарна і $m = \dim M - 1$, такий цілком неголономний розподіл це називають контактною структурою.

Ex. 1. Усі гладкі одновимірні розподіли інтегровні (бо $\forall$ два поля $X, Y \in \mathcal{D}$ пропорційні: локально $X = \lambda Y$ або $Y = \lambda X$, $\lambda \in C^\infty(U)$, тому, наприклад $[X, Y] = [\lambda Y, Y] = \lambda[Y, Y] - Y(\lambda)Y = -Y(\lambda)Y \in \mathcal{D}$)

Знову ж, це аналог інтегрування вект. полів.

2. У $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $(n-1)$-вимірний розподіл (гіперрозподіл) $\mathcal{D}_x := x^\perp$ (у $\mathbb{R}^n$, що ми ототожнюємо з $T_x(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$), очевидно, інтегровний: його інтегральні гіперповерхні — це гіперсфери з центром у 0.

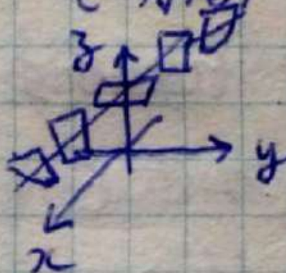


Перевіримо умову Th. Фробеніуса для $n = 3$. Скажімо, на $\{y \neq 0\}$ поля $X := -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ і $Y := -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}$ утворюють базис $\mathcal{D}$ (загалом цей розподіл ∞-гл.). Умову Th. достатньо перевірити локально на базисних полях в околі $\forall$ точки (Впр.).

Тут $[X,Y] = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x} \in \mathcal{D}$ $\left(i = \frac{z}{y}X + \frac{x}{y}Y\right)$, отже дійсно маємо умову інтегровності. Для $\{x \neq 0\}$, $\{z \neq 0\}$ ан-но.

Ex. 3 (Стандартна контактна структура $\mathbb{R}^3$). Покладемо

$\mathcal{D}_{(x,y,z)} := \mathrm{span}\{X_{(x,y,z)}, Y_{(x,y,z)}\}$ на $\mathbb{R}^3$, де $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$.



Це ∞-гл. 2-вим. розподіл.

$[X,Y] = \frac{\partial}{\partial z}$, тобто $\mathcal{D}$ не просто неінтегровний за Тм. Фробеніуса (причому навіть локально), а цілком неінтегровний: $\{X, Y, [X,Y]\}$ утворюють базис $\underset{\substack{\shortparallel \\ T_p\mathbb{R}^3}}{\mathbb{R}^3}$ у $\forall$ точці.

def. Кусково k-гл. $\gamma: [a,b] \to M$ дотикається до розподілу $\mathcal{D}$ на M (є горизонтальним для нього), якщо $\forall t$ $\gamma'(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$.
У точках порушення гладкості ця умова повинна виконуватися для обох дотичних векторів: $\gamma'(t-0) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$, $\gamma'(t+0) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$.

Rem. Це можна узагальнити і на криві $\gamma: I \to M$ для дов. I.

Th. (Рашевський – Чжоу (Chow)). $\forall$ ξ-гладкого зв'язного $\overset{k\geq 1}{M}$, і $(k-1)$-гл. цілком неінтегровного $\mathcal{D}$ на ньому $\forall\, p,q \in M$ $\exists$ кусковогладкий шлях, що з'єднує p і q та дотикається до $\mathcal{D}$.

def. Метрикою (субріманового) на $(k-1)$-гл. розподілі $\mathcal{D}$ у (на) k-гл. мн. M зветься відображення g, що ставить у відповідність кожній $p \in M$ скалярний добуток g_p на $\mathcal{D}_p$ і є $(k-1)$-гладким у наступному сенсі: $\forall\, p \in M$ $\exists$ відкр. $U \ni p$ і поля $X_1, \dots, X_m \in \mathcal{X}^{k-1}(U)$ такі, що $\forall\, q \in U$ $\{(X_1)_q, \dots, (X_m)_q\}$ – ортонормований відносно g_q базис $\mathcal{D}_q$.

Rem. Можна просто взяти ріманову м-ку на M і обмежити її у $\forall\, p \in M$ на $\mathcal{D}_p$.

def. Субрімановим многовидом зветься трійка $(M, \mathcal{D}, g)$, де M – k-гл. многовид, $k \geq 1$, $\mathcal{D}$ – цілком неінтегровний $(k-1)$-гл. розподіл на M, а g – ($(k-1)$-гл.) метрика на $\mathcal{D}$.

Субріманововою довжиною кусково k-гл. шляху $\gamma:[a,b]\to M$, що дотикається до $\mathcal{D}$, тоді зветься
$$\ell(\gamma)=\int_a^b\sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t))}\,dt.$$
Rem. Знову ж, $\ell(\gamma)$ завжди $\exists$ і ≥ 0.

Ex. 1. Для тривіального розподілу ($\mathcal{D}_p=T_pM\ \forall\, p\in M$) і ріманової g це просто ріманова стр.

2. $\mathcal{D}$ - стандартна конт. стр. на $M=\mathbb{R}^3$, g - обмеження на неї евкл. метрики.

3. $\mathcal{D}$ - ст. конт. стр. на $M=\mathbb{R}^3$, g визначена умовою: X і Y утворюють $\forall\, p$ ортонорм. базис $\mathcal{D}_p$. Цей субріманів многовид зветься (субрімановою) групою Гейзенберга.

Впр. 1. Показати, що (M,Γ,ℓ), де $(M,\mathcal{D},g)$ - субріманів многовид, Γ - куск. гл. шляхи, що дотикаються до $\mathcal{D}$, а ℓ - субріманів ф-л довжини, є ПВМ.

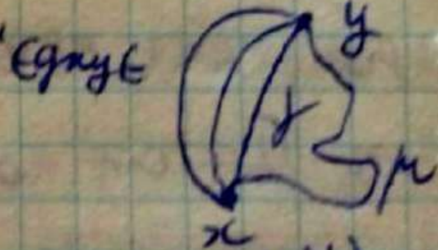
<u>Rem.</u> З <u>Th.</u> Ф.-Ч. вище випливає, що для зв'язного M відп. внутрішня м-ка d_ℓ скінченна.

<u>2.</u> Чи збігається метрична топологія d_ℓ з вихідною топ. M?

<u>3.</u> Що таке субфінслерова структура?

<u>def.</u> У ПВМ (X, Γ, ℓ) шлях $\gamma \in \Gamma$, що з'єднує x і y, зветься найкоротшою, якщо $\ell(\gamma) = d_\ell(x,y)$. Якщо $\forall x, y \in X \ \exists$ найкоротша, що з'єднує x і y, м-ка d_ℓ зветься строго внутрішньою.

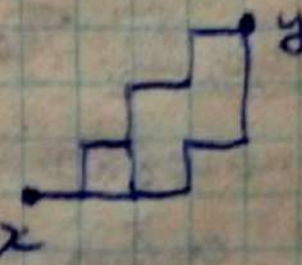
<u>Rem.</u> З <u>def.</u> d_ℓ, γ - найкоротша $\Leftrightarrow \forall \mu \in \Gamma$, що з'єднує x і y $\ell(\gamma) \leq \ell(\mu)$ (inf досягається).



<u>Ex. 1.</u> Ламані у евкл. $\mathbb{R}^n$: найкоротша $\exists!$ (відрізок прямої).

<u>2.</u> Кусково гладкі у евкл. $\mathbb{R}^n$: так само.

<u>3.</u> Ламані у евкл. $\mathbb{R}^n$ з ланками, що $\parallel$ осям: найкоротші $\exists$ ("~~[illegible]~~ сходи"), але не ! при $n > 1$.



Тут єдиність розуміємо всюди з точністю до заміни параметра. Отже, м-ки з Ex.1 - 3. строго внутрішні.

4. Рімановий випадок детально розглянемо нижче.

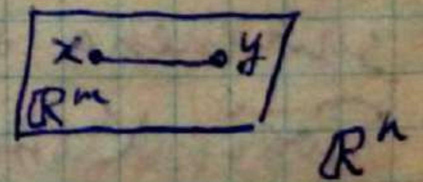
5. Індукована м-ка може не бути строго внутр., навіть якщо індукована стр. внутр. Наприклад, нехай $X = U \subset \mathbb{R}^n$ - відкрита неопукла, стр. на $\mathbb{R}^n$ евклідова

(з Ex.1. або Ex.2.), на U - обмеження евкл. ℓ (тобто внутр. м-ка, що індукована включенням $i: U \to \mathbb{R}^n$). Тоді для деяких точок найкоротшої не існує. Але:

Pr. Якщо $d_{\tilde{\ell}}$ індукована d_ℓ за допомогою φ і $\varphi \circ \gamma$ для $\gamma \in \tilde{\Gamma}$ - найкоротша відн. d_ℓ, то γ - найкоротша відн. $d_{\tilde{\ell}}$.

тобто маємо ПВМ $(X, \tilde{\Gamma}, \tilde{\ell})$ і (Y, Γ, ℓ) як вище (Ex.5.)

▷ Нехай $\gamma : [a,b] \to X$, $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$. Тоді



$d_{\tilde{\ell}}(x,y) \geq$ [Pr. вище] $\geq d_\ell(\varphi(x), \varphi(y)) =$ [умова] $=$

$= \ell(\varphi \circ \gamma) =$ [def. $\tilde{\ell}$] $= \tilde{\ell}(\gamma) \geq$ [def. $d_{\tilde{\ell}}$] $\geq d_{\tilde{\ell}}(x,y)$, тому $\tilde{\ell}(\gamma) = d_{\ell}(x,y)$, γ - найкоротша. ▲

Rem. Обернене, взагалі кажучи, невірне.

def. ПВМ (X, Γ, ℓ) зветься повною, якщо метричний простір (X, d_ℓ) повний.

Rem. Зокрема, саме це ми будемо розуміти під повнотою ріманових (фінслерових, субріманових) многовидів.

Ex 1. E^n повний.

2. Якщо X компактний (як завжди, відносно топології d_ℓ), то він повний (зокрема, компактні ріманові мн.)

3. Pr. Нехай (Y, Γ, ℓ) повний, $\varphi \in C(X, Y)$ - топологічне вкладення (тобто $\varphi: X \to \varphi(X)$ - гомеоморфізм), $\varphi(X)$ - замкнена в Y і визначена індукована стр. $(X, \tilde{\Gamma}, \tilde{\ell})$. Тоді X повний.

▷ Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ - фундаментальна відн. $d_{\tilde{\ell}}$:

$d_{\tilde{e}}(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Тоді $d_e(\varphi(x_n), \varphi(x_m)) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ в силу Рч. вище ($d_e(\varphi(x_n), \varphi(x_m)) \leq d_{\tilde{e}}(x_n, x_m)$), тобто $\{\varphi(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ – фунд. відносно d_e. В силу повноти Y, вона збігається: $\varphi(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} y \in Y$. В силу замкненості $\varphi(X)$, $y \in \varphi(X)$, тобто $y = \varphi(x)$, $x \in X$. В силу вкладеності φ, тоді $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, т.ч. X повний. $\triangle$

Зокрема, вкладені підмноговиди повного рім. многовида з замкненим образом повні.

Ч. Нехай Y повний та зв'язний, $X = U \subset Y$ – відкрита і внутр. індукована м-ка X – обмеження внутр. м-ки Y (це так, коли, наприклад, $Y = \mathbb{R}^n$ з евкл. стр., а U опукла – Впр.). Тоді X повний $\Leftrightarrow$ $X = Y$ (Впр. або див. курс аналізу).

Рч. $F: M \to N$ – ріманова ізометрія (M, g) і (N, h) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ F – метрична ізометрія (M, d_{e_g}) і (N, d_{e_h}).

▷ $\Rightarrow$. F - ізу, і $\forall\, p,q \in M$ $\forall$ куск. гл. шляху γ, що з'єднує p і q, $F\circ\gamma$ - куск. гл. шлях, що з'єднує $F(p)$ і $F(q)$. При цьому $l_h(F\circ\gamma) = l_g(\gamma)$, бо F - ізометрія. Так само куск. гл. шляхам у N, що з'єднують $F(p)$ і $F(q)$, відп. куск. гл. шляхи у M тієї ж довжини. Тому $d_{l_g}(p,q) = d_{l_h}(F(p),F(q))$ (інфімуми одної й тієї ж числової множини). Отже, F - метрична ізометрія.

$\Leftarrow$. Це (ще одна) теорема Майєрса-Стінрода. Її найскладніша частина - доведення, що F - диффеоморфізм. Те, що він зберігає довжини шляхів, тоді випливає з опису l, який ми дамо нижче. ▲

Впр. Довести $\Leftarrow$ для $(M,g) = (N,h) = E^n$.

Для розв'язку задачі опису найкоротших внутрішньої м-ки ріманового многовида потрібний додатковий апарат.

Афінні та ріманові зв'язності. Геодезичні

M - k-м. многовид, $k \geq 2$, $\dim M = n$.

<u>def.</u> Афінною зв'язністю на M зветься відображення $\nabla : \mathfrak{X}^{k-2}(M) \times \mathfrak{X}^{k-1}(M) \to \mathfrak{X}^{k-2}(M) : X, Y \mapsto \nabla_X Y$ таке, що

<u>1.</u> $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}^{k-2}(M), f, g \in C^{k-2}(M), Z \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$;

<u>2.</u> $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \quad \forall X \in \mathfrak{X}^{k-2}(M), Y, Z \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$;

<u>3.</u> $\nabla_X (fY) = X(f) Y + f \nabla_X Y \quad \forall X \in \mathfrak{X}^{k-2}(M), Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M), f \in C^{k-1}(M)$.

$\nabla_X Y$ при цьому зветься коваріантною похідною Y за X. Пара (M, ∇) зветься многовидом з афінною зв'язністю.

<u>Rem.</u> Тобто зв'язність - це правило диференціювання в. полів у напрямку інших полів. <u>3.</u> є аналогом правила Лейбниця. З нього для $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ маємо $\nabla_X (\lambda Y) = \lambda \nabla_X Y$, тобто $\nabla_X \cdot : \mathfrak{X}^{k-1}(M) \to \mathfrak{X}^{k-2}(M)$ лінійне над $\mathbb{R}$.

<u>Ex.</u> Пласка зв'язність на $\mathbb{R}^n$ (з глоб. коорд. $(x^1, \ldots, x^n)$): для

$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ $\nabla_X Y := X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = X(Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j}$ – задов. <u>def.</u>

<u>Rem.</u> Нехай $(x^1, \dots, x^n)$ – лок. коорд. на $U \subset M$. $\forall\, i, j = \overline{1,n}$ розкладемо визначене на U поле $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$ за $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}, \text{ де } \Gamma^k_{ij} \in C^{r-2}(U),\ i, j, k = \overline{1,n}.$$

Звичайно, для цього треба визначити ∇ на U. Це можна коректно зробити, продовжуючи поля з U на M (<u>Впр.</u> або згадати геом. підпосл.)

<u>def.</u> $\{\Gamma^k_{ij}\}^n_{i,j,k=1}$ наз. символами Крістоффеля зв. ∇ у $(x^1, \dots, x^n)$.

<u>Впр.</u> При заміні $(x^1, \dots, x^n)$ на $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ нові с. К. мають вигляд

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^o_{lm} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^o} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l}$$

(Зокрема, це <u>не</u> компоненти $(2,1)$ – тенз. поля).

<u>Rem.</u> Нехай $X \in \mathfrak{X}^{r-2}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}^{r-1}(M)$, $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y|_U = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$:

$$\nabla_X Y|_U = \nabla_{\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = [\underline{1.}] = X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = [\underline{2.}\ і\ \underline{3.}] =$$

$$= X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = [\underline{\text{def.}}\ \Gamma^k_{ij}] = X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}\right).$$

Отже,

$$\nabla_X Y|_U = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij} Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

<u>def.</u> ∇ зветься пласкою, якщо в околі $\forall p \in M$ $\exists$ лок. коорд.: в них $\Gamma^k_{ij} = 0 \ \forall i,j,k$.

<u>Rem.</u> Тобто у цих коорд. ∇ локально виглядає як у <u>Ex.</u> вище.

<u>Rem.</u> Фіксуємо $Y \in \mathfrak{X}^{r-1}(M)$. Тоді $X \mapsto \nabla_X Y : \mathfrak{X}^{r-2}(M) \to \mathfrak{X}^{r-2}(M)$ є в силу <u>1.</u> лінійним над $C^{r-2}(M)$, тобто задає $(r-2)$-гл. $(1,1)$-тенз. поле (поле операторів). Отже, $\forall p \in M$ визначене значення цього поля у p [redacted] $T_pM \to T_pM : v \mapsto \nabla_v Y$. Відображення $\nabla : T_pM \times \mathfrak{X}^{r-1}(M) \to T_pM : v, Y \mapsto \nabla_v Y$ будемо називати зв'язністю у p, що відп. ∇, а $\nabla_v Y$ - ков. похідною Y за v [redacted]. При цьому $\forall X \in \mathfrak{X}^{r-2}(M)$ $(\nabla_X Y)_p = \nabla_{X_p} Y$. Іншими словами, <u>1.</u> гарантує, що $(\nabla_X Y)_p$ визначене лише X_p і Y. Також це легко вивести з ф-ли у лок. коорд.

<u>Впр.</u>

$$\nabla_{\lambda v + \mu w} X = \lambda \nabla_v X + \mu \nabla_w X;$$

$$\nabla_v (X+Y) = \nabla_v X + \nabla_v Y;$$

[redacted] $$\nabla_v (fX) = v(f) X_p + f(p) \nabla_v X.$$

$(\forall v, w \in T_pM$, $X, Y \in \mathfrak{X}^{r-1}(M)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f \in C^{r-1}(M))$