Розглянемо векторні поля на $\mathbb{R}^4$: $X_{(x,y,z,w)} := y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial w}$, $Y_{(x,y,z,w)} := z\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z} - y\frac{\partial}{\partial w}$. Знайти $[X,Y]$.

$$[X,Y] = X(z)\frac{\partial}{\partial x} + X(w)\frac{\partial}{\partial y} - X(x)\frac{\partial}{\partial z} - X(y)\frac{\partial}{\partial w} - \left(Y(y)\frac{\partial}{\partial x} - Y(x)\frac{\partial}{\partial y} + Y(w)\frac{\partial}{\partial z} - Y(z)\frac{\partial}{\partial w}\right) = w\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial w} - w\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} - x\frac{\partial}{\partial w} = 0.$$

Зауважимо, що ці поля дотичні $\forall\ (x,y,z,w)$ до сфери з центром в 0 радіуса $\sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}$ (тому $[X,Y]$ теж повинне бути дотичним до такої сфери, адже дотичний розподіл інтегровний).

Третє таке поле $-Z = w\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} - x\frac{\partial}{\partial w}$,

X, Y, Z утворюють базис дотичного розподілу 3-вимірних сфер з центром в 0.

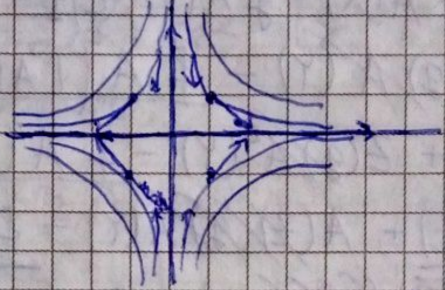
Д/з Знайти $[Y, Z]$, $[Z, X]$.

Знайти інтегральні траєкторії поля $X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^{t} \\ y = C_2 e^{-t} \end{cases}$$

Тобто $xy = C_1 C_2$.



Знайти першу фундаментальну форму S^n у E^{n+1} у стереографічних координатах для $n=3$:

$$r_u = \frac{1}{(u^2+v^2+w^2+1)^2}\left(2(1-u^2+v^2+w^2), -4uv, -4uw, -4u\right)$$

$$r_v = \frac{1}{(u^2+v^2+w^2+1)^2}\left(-4uv, 2(1+u^2-v^2+w^2), -4vw, -4v\right)$$

$$r_w = \frac{1}{(u^2+v^2+w^2+1)^2}\left(-4uw, -4vw, 2(1+u^2+v^2-w^2), -4w\right)$$

Коефіцієнти I форми:

$$g_{11} = \langle r_u, r_u\rangle = \frac{4}{(u^2+v^2+w^2+1)^4}\left((1-u^2+v^2+w^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2w^2 + 4u^2\right) = \frac{4}{(u^2+v^2+w^2+1)^2}$$

$$g_{22} = \langle r_v, r_v\rangle = g_{11}$$

$$g_{33} = \langle r_w, r_w\rangle = g_{11}$$

$$g_{12} = \langle r_u, r_v\rangle = \frac{4}{(u^2+v^2+w^2+1)^4}\left(-2uv + 2u^3v - 2uv^3 - 2uvw^2 - 2uv - 2u^3v + 2uv^3 - 2uvw^2 + 4uvw^2 + 4uv\right) = 0$$

$$g_{13} = \langle r_u, r_w\rangle = 0$$

$$g_{23} = \langle r_v, r_w\rangle = 0$$

Отже, $g = \frac{4}{(u^2+v^2+w^2+1)^2}\left(du^2 + dv^2 + dw^2\right)$

Тобто S^3 лок. конформно еквівалентна E^3 (а стереогр. пр. - лок. конф. екв-сть, бо зберігає кути). Аналогічно для S^n.

Для ортог. проекцій на $x^{n+1}>0$:

$$r_{y^i} = \left(0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0, -\frac{y^i}{\sqrt{1-|y|^2}}\right),$$

$$g_{ii} = 1 + \frac{(y^i)^2}{1-|y|^2}$$

$$g_{ij} = \frac{y^i y^j}{1-|y|^2}, \quad i \neq j.$$

Тобто $g = \sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{(y^i)^2}{1-|y|^2}\right)dy^{i\,2} + \sum_{1\le i < j \le n} \frac{2y^iy^j}{1-|y|^2} dy^i dy^j$

$\left(= dy^{1\,2} + \ldots + dy^{n\,2} + \frac{1}{1-|y|^2}\left(y^1dy^1 + \ldots + y^ndy^n\right)^2\right)$.

Для сферичних коорд. при $n=2$:

$$r_\varphi = (-\sin\varphi\cos\psi, -\sin\varphi\sin\psi, \cos\varphi)$$

$$r_\psi = (-\cos\varphi\sin\psi, \cos\varphi\cos\psi, 0)$$

$g_{11} = \langle r_\varphi, r_\varphi\rangle = 1$, $g_{12} = \langle r_\varphi, r_\psi\rangle = 0$, $g_{22} = \langle r_\psi, r_\psi\rangle = \cos^2\varphi$.

Д/з

1. Записати аналог сфер. коорд. для $n=3$ і I ф.ф. S^3 в них.

2. Перевірити для якоїсь пари лок. с.к. тензорний закон перетв. для g_{ij} (хоча б для одного індекса).

Знайти довжину шляху у H^4 $\left(\mathbb{R}^4_+ \text{ з } g = \frac{1}{(x^4)^2}\sum_{i=1}^{4} dx^{i\,2}\right)$:

$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, b\cos t, b\sin t)$, $t \in [\alpha, \beta] \subset (0, \pi)$, $a, b > 0$.

$\gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t, -b\sin t, b\cos t)$

$$|\gamma'(t)|^2 = \frac{1}{(b\sin t)^2}\left((-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + (-b\sin t)^2 + (b\cos t)^2\right) =$$

$$= \frac{a^2+b^2}{b^2\sin^2 t}.$$

Тоді (оск. $b\sin t > 0$):

$$l(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b\sin t}\,dt = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\Big|_\alpha^\beta =$$

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\ \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

У тому ж просторі знайти кут між кривими

$\gamma(t)=\left(t,t,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ і $\mu(s)=(\cos s,\sin s,s,s)$

Т. перетину: $P\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$, $s=\frac{\pi}{4}$, $t=\frac{\sqrt2}{2}$.

$$\cos\varphi=\frac{g_P\left(\gamma'\left(\frac{\sqrt2}{2}\right),\mu'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sqrt{g_P\left(\gamma'\left(\frac{\sqrt2}{2}\right),\gamma'\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)\right)}\sqrt{g_P\left(\mu'\left(\frac{\pi}{4}\right),\mu'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}}=\begin{bmatrix}\gamma'\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)=(1,1,0,0)\\ \mu'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2},1,1\right)\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\frac{16}{\pi^2}\left(-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}+0+0\right)}{\sqrt{\frac{16}{\pi^2}(1+1+0+0)}\sqrt{\frac{16}{\pi^2}\left(\frac12+\frac12+1+1\right)}}=0,\ \text{тобто } \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

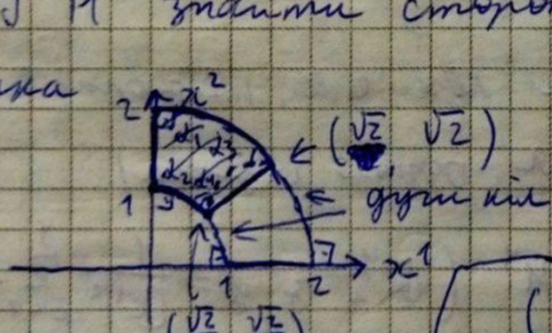
Там же знайти об'єм множини $D=\{(x^1,x^2,x^3,x^4)\mid x^i\in[\alpha_i,\beta_i],\ i=\overline{1,4}\}$:

$$G=\frac{1}{(x^4)^2}\begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&1\end{pmatrix},\ \text{тому } \sqrt{\det G}=\frac{1}{(x^4)^4}.$$

$$\mathrm{Vol}(D)=\int_D\sqrt{\det G}\,dx^1dx^2dx^3dx^4=\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\int_{\alpha_3}^{\beta_3}\int_{\alpha_4}^{\beta_4}\frac{1}{(x^4)^4}\,dx^1dx^2dx^3dx^4=$$

$$=(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)(\beta_3-\alpha_3)\frac{1}{-3}\left(\frac{1}{\beta_4^3}-\frac{1}{\alpha_4^3}\right).$$

Д/з. У H^2 знайти сторони, кути та площу чотирикутника



Перевірити, що

$$S=2\pi-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$$

(де α_i – внутрішні кути), якщо замінити 4-ту сторону теж на геодезичну