138. $\forall A, B, C, D \quad (\overline{BC}, \overline{AD}) + (\overline{CA}, \overline{BD}) + (\overline{AB}, \overline{CD}) = 0$.

Використаємо радіуси-вектори r_A, r_B, r_C, r_D т. A, B, C, D відп.:

$$(r_C - r_B, r_D - r_A) + (r_A - r_C, r_D - r_B) + (r_B - r_A, r_D - r_C) = \cancel{(r_C, r_D)} - \cancel{(r_C, r_A)} -$$
$$- \cancel{(r_B, r_D)} + \cancel{(r_B, r_A)} + \cancel{(r_A, r_D)} - \cancel{(r_A, r_B)} - \cancel{(r_C, r_D)} + \cancel{(r_C, r_B)} + \cancel{(r_B, r_D)} - \cancel{(r_B, r_C)} -$$
$$- \cancel{(r_A, r_D)} + \cancel{(r_A, r_C)} = 0.$$

139. Якщо у тетраедрі $ABCD$ два ребра ортогональні протилежних, то й у третій парі ребра ортогональні.

Пари протилежних ребер — це AB і CD, AC і BD, AD і BC.

Якщо, скажімо, дві перші пари ортог., то $(\overline{AB}, \overline{CD}) = (\overline{CA}, \overline{BD}) = 0$, тоді за 138. $(\overline{BC}, \overline{AD})$: BC і AD ортог. Ан-но для інших випадків.

152. Знайти внутрішні кути трикутника ABC.

$$\cos \angle A = \cos \angle BAC = \frac{(\overline{AB}, \overline{AC})}{|\overline{AB}||\overline{AC}|}, \ldots$$

151. $a = (8, 4, 1)$, $b = (2, -2, 1)$. Знайти c: компл. a і b, $c \perp a$,

$|c| = |a|$, кут між b і c тупий. Коорд. дек.

Шукаємо $c = \lambda a + \mu b = (8\lambda + 2\mu, 4\lambda - 2\mu, \lambda + \mu)$.

$c \perp a$: $0 = (a, c) = 64\lambda + 16\mu + 16\lambda - 8\mu + \lambda + \mu = 81\lambda + 9\mu$

$|a|^2 = |c|^2 = (8\lambda + 2\mu)^2 + (4\lambda - 2\mu)^2 + (\lambda + \mu)^2 = 64\lambda + 32\lambda\mu + 4\mu^2 +$

$\sqrt{64 + 16 + 1}^2 = 81$

$+ 16\lambda^2 - 16\lambda\mu + 4\mu^2 + \lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 = 81\lambda^2 + 18\lambda\mu + 9\mu^2.$

$\angle(b,c)$ тупий $\Leftrightarrow \cos\angle(b,c) < 0 \Leftrightarrow 0 > (b,c) = 16\lambda + 4\mu - 8\lambda + 4\mu + \lambda + \mu =$

$= 9\lambda + 9\mu$. Отже, система:

$$\begin{cases} 9\lambda + \mu = 0 \\ 9\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 = 9 \\ \lambda + \mu < 0 \end{cases}$$

$\mu = -9\lambda$:

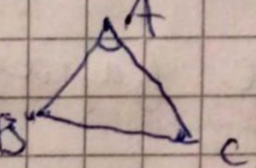
$$9\lambda^2 - 18\lambda^2 + 81\lambda^2 = 9$$

$$72\lambda^2 = 9, \quad \lambda^2 = \frac{1}{8}.$$

$\lambda = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \mu = \mp\frac{9}{2\sqrt{2}}$, $\lambda + \mu = \mp\frac{8}{2\sqrt{2}}$, тобто знак верхній:

$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\mu = -\frac{9}{2\sqrt{2}}$, $c = \left(\frac{8 - 18}{2\sqrt{2}}, \frac{4+18}{2\sqrt{2}}, -\frac{8}{2\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{11}{\sqrt{2}}, -2\sqrt{2}\right).$

223. $\{O, e_1, e_2\}$ – афінна система координат, $|e_1| = 4$, $|e_2| = 2$, кут між ними – $\omega = \frac{\pi}{3}$. У цій с.к. задані координати вершин тр-на $A(1,3)$, $B(1,0)$, $C(2,1)$. Знайти AB, AC, $\angle BAC$.



Метричні коефіцієнти базиса:

$g_{11} = |e_1|^2 = 16$

$g_{22} = |e_2|^2 = 4$

$$\boxed{\begin{aligned} &a = a_1e_1 + a_2e_2, \quad b = b_1e_1 + b_2e_2 \\ &\langle a, b\rangle = a_1b_1\langle e_1, e_1\rangle + (a_1b_2 + a_2b_1)\langle e_1, e_2\rangle + a_2b_2\langle e_2, e_2\rangle = a_1b_1 g_{11} + (a_1b_2 + a_2b_1) g_{12} + a_2b_2 g_{22} \\ &|a|^2 = \langle a, a\rangle = a_1^2 g_{11} + 2a_1a_2 g_{12} + a_2^2 g_{22} \end{aligned}}$$

$g_{12} = g_{21} = \langle e_1, e_2\rangle = |e_1|\,|e_2| \cos\omega = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4.$

$\overline{AB} = (0, -3)$, $\overline{AC} = (1, -2)$

$AB^2 = |\overline{AB}|^2 = g_{11} \cdot 0^2 + 2g_{12} \cdot 0 \cdot (-3) + g_{22} \cdot (-3)^2 =$
$= 4 \cdot 9 = 36$. Отже, $AB = 6$.

$AC^2 = |\overline{AC}|^2 = g_{11} \cdot 1^2 + 2g_{12} \cdot 1 \cdot (-2) + g_{22} \cdot (-2)^2 =$
$= 16 + 8 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 = 16$; $AC = 4$.

$\langle \overline{AB}, \overline{AC}\rangle = g_{11} \cdot 0 \cdot 1 + g_{12} \cdot (0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1) +$
$+ g_{22} \cdot (-3)(-2) = 4 \cdot (-3) + 4 \cdot 6 = 12.$

$\cos \angle BAC = \dfrac{\langle \overline{AB}, \overline{AC}\rangle}{|\overline{AB}|\,|\overline{AC}|} = \dfrac{12}{6 \cdot 4} = \dfrac{1}{2}$, т.ч. $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$

225. $\{O, e_1, e_2\}$ – аф. с.к., у якій $A(1,1)$, $B(5,3)$, $C(3,5)$, $AB = \sqrt{52}$, $AC = 4$, $BC = \sqrt{28}$. Знайти

$|e_1|$, $|e_2|$ і кут ω між e_1 і e_2.

$\overline{AB} = (4,2)$, $\overline{AC} = (2,4)$, $\overline{BC} = (-2,2)$.

$52 = AB^2 = |\overline{AB}|^2 = g_{11} \cdot 4^2 + 2g_{12} \cdot 4 \cdot 2 + g_{22} \cdot 2^2$

$16 = AC^2 = |\overline{AC}|^2 = g_{11} \cdot 2^2 + 2g_{12} \cdot 2 \cdot 4 + g_{22} \cdot 4^2$

$28 = BC^2 = |\overline{BC}|^2 = g_{11} \cdot (-2)^2 + 2g_{12} \cdot (-2) \cdot 2 + g_{22} \cdot 2^2$

Отже, маємо систему:

$$\begin{cases} 16 g_{11} + 16 g_{12} + 4 g_{22} = 52 \\ 4 g_{11} + 16 g_{12} + 16 g_{22} = 16 \\ 4 g_{11} - 8 g_{12} + 4 g_{22} = 28 \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} 4g_{11} + 4g_{12} + g_{22} = 13 & (1) \\ g_{11} + 4g_{12} + 4g_{22} = 4 & (2) \\ g_{11} - 2g_{12} + g_{22} = 7 & (3) \end{array}$$

$(1)-(2)$: $\quad 3g_{11} - 3g_{22} = 9 \qquad g_{11} - g_{22} = 3$

$(2)+2\cdot(3)$: $\quad 3g_{11} + 6g_{22} = 18 \qquad g_{11} + 2g_{22} = 6$

$3g_{22} = 3 \Rightarrow g_{22} = 1$, $g_{11} = 3 + g_{22} = 4$,

$g_{12} = \frac{1}{2}(g_{11} + g_{22} - 7) = -1$.

Отже, $|e_1| = \sqrt{g_{11}} = 2$, $|e_2| = \sqrt{g_{22}} = 1$,

$$\cos\omega = \frac{\langle e_1, e_2 \rangle}{|e_1||e_2|} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}}} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{3}.$$

155. $a = \{x, y\} \neq 0$. Знайти a' : $a' \perp a$, $|a'| = |a|$, пара $\{a, a'\}$ додатно орієнтована. Коорд. дек.

Нехай $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ – дві пари неколінеарних векторів площини (два базиса). Тоді $\exists\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{matrix} c = \alpha a + \beta b \\ d = \gamma a + \delta b \end{matrix}, \quad \text{і при цьому } \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}}_{\text{визначник (детермінант)}} := \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Якщо $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} > 0$, говорять, що $\{a, b\}$ і $\{c, d\}$ однаково орієнтовані, якщо < 0 – протилежно.

Якщо заданий базис $\{e_1, e_2\}$ (скажімо, в рамках системи координат), то $\{a, b\}$ наз. додатно орієнтованою, якщо вона однаково орієнт. з $\{e_1, e_2\}$, і від'ємно орієнтованою – якщо протилежно.

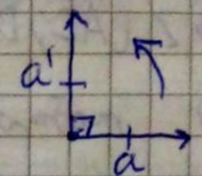
Нехай
$$a = (a_1, a_2) = a_1 e_1 + a_2 e_2$$
$$b = (b_1, b_2) = b_1 e_1 + b_2 e_2$$
Тоді $\{a, b\} > 0$ (відп., < 0) орієнт. $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0$ (< 0).

Для базиса вигляду (e_2, e_1 ↺) дод. орієнт. $\{a, b\}$ – ті, у яких напрям найкоротшого обертання від a до b – той же, що у $\{e_1, e_2\}$ (тут – проти годинникової стрілки: b, a ↺), від'ємно – у яких протилежний (тут – ~~[illegible]~~ за годин. стрілкою: a, b ↻).

Нехай $a' = (x', y')$.

$a' \perp a \iff 0 = (a, a') = xx' + yy'$

$|a'| = |a| \iff x^2 + y^2 = |a|^2 = |a'|^2 = x'^2 + y'^2$



$\{a, a'\} > 0$ орієнт. $\iff 0 < \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$

Отже маємо систему:

$$\begin{cases} xx' + yy' = 0 \\ x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \\ xy' - yx' > 0 \end{cases}$$ з невідомими x', y'

При $y \neq 0$: $y' = -\frac{xx'}{y}$

$$x'^2 + \left(-\frac{xx'}{y}\right)^2 = x^2 + y^2$$

$$x'^2\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) = x^2 + y^2$$

$$x'^2 (x^2 + y^2) = y^2 (x^2 + y^2)$$

$x^2 + y^2 > 0$, бо $a \neq 0$:

$$x'^2 = y^2$$

$$x' = \pm y \Rightarrow y' = -\frac{xx'}{y} = \mp x.$$

Для $x' = y,\ y' = -x$: $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ y & -x \end{vmatrix} = -x^2 - y^2 < 0$

для $x' = -y,\ y' = x$: $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 > 0.$

Отже $(x', y') = (-y, x)$. Якщо $y = 0$, то $x \neq 0$, тоді повторюємо розв'язок починаючи з $x' = -\frac{yy'}{x}$ і отримуємо той же результат. Або просто:

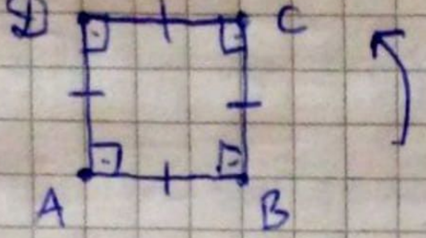
$$\begin{cases} xx' = 0 \\ x'^2 + y'^2 = x^2 \\ xy' > 0 \end{cases}$$

Тобто $x' = 0$, $y'^2 = x^2 \Rightarrow y' = \pm x$, і $xy' > 0 \Rightarrow y' = x$, $a' = (0, x)$.

Отже, в будь-якому разі $a' = (-y, x)$.

Коорд. мет.

165. $A(-3, 2)$, $B(2, 4)$ – вершини квадрата $ABCD$. Знайти C, D



Нехай квадрат такий, як зображено вище (завжди додатний напрям обертання - проти годинникової).

$\overline{AB} = (5,2)$

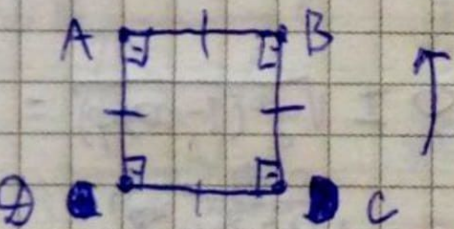
Тоді $a = \overline{AB}$, $a' = \overline{AD}$ задовольняють умовам попер. задачі:

$\overline{AD} = (-2,5) \Rightarrow D = A + \overline{AD} = (-3,2) + (-2,5) = (-5,7)$.

Так само для $a = \overline{AB}$, $a' = \overline{BC}$ (або просто $\overline{BC} = \overline{AD}$).

$\overline{BC} = (-2,5) \Rightarrow C = B + \overline{BC} = (2,4) + (-2,5) = (0,9)$

Але точки можуть бути розташовані і так:



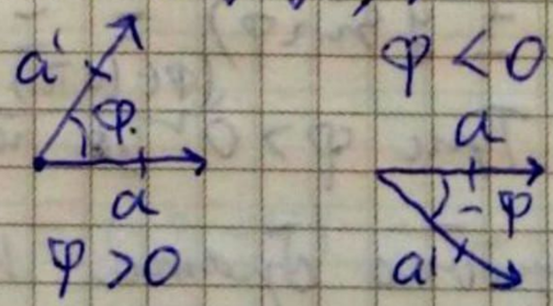
$\overline{AD} = (2,-5) \Rightarrow D = A + \overline{AD} = (-3,2) + (2,-5) = (-1,-3)$

$\overset{\parallel}{\overline{BC}} \Rightarrow C = B + \overline{BC} = (2,4) + (2,-5) = (4,-1)$.

<u>163.</u> $a = (x, y)$ [redacted]. Знайти a', що утворений з a обертанням на кут φ. Коорд. дек.

Це узагальнення <u>155.</u> a' визначений наступним чином: якщо $a = 0$, то $a' = 0$. В іншому випадку, для кута $\varphi \in [-\pi, \pi]$:

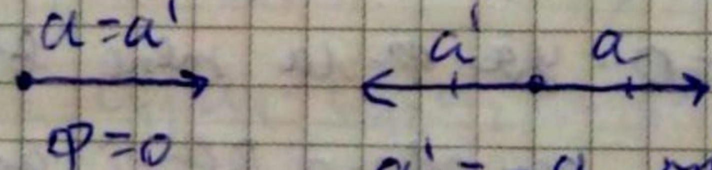
$|a'| = |a|$



Кут між a і a' — це $|\varphi|$

$\{a, a'\} > 0$ орієнт. при $\varphi \in (0, \pi)$

і < 0 орієнт. при $\varphi (-\pi, 0)$ (при $\varphi = -\pi, 0, \pi$ вони колінеарні:



$a' = -a$ при $\varphi = -\pi, \pi$)

У такому випадку говорять, що кут <u>від</u> a до a' дор. φ.

Отже, нехай $a' = (x', y')$. Вважаємо $a \neq 0$, інакше просто $a' = 0$.

$$x'^2 + y'^2 = |a'|^2 = |a|^2 = x^2 + y^2$$

Незалежно від знака φ:

$$\cos\varphi = \cos|\varphi| = \frac{(a,a')}{|a||a'|} = \frac{(a,a')}{|a|^2} = \frac{xx'+yy'}{x^2+y^2}.$$

Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x'^2+y'^2 = x^2+y^2 \\ xx'+yy' = (x^2+y^2)\cos\varphi \end{cases}$$

Для $y\neq 0$: $\quad y' = \dfrac{(x^2+y^2)\cos\varphi - xx'}{y}$

$$x'^2 + \frac{1}{y^2}\left((x^2+y^2)\cos\varphi - xx'\right)^2 = x^2+y^2$$

$$y^2x'^2 + (x^2+y^2)^2\cos^2\varphi - 2x'\cdot x(x^2+y^2)\cos\varphi + x^2x'^2 = y^2(x^2+y^2)$$

Скоротимо на $x^2+y^2>0$:

$$x'^2 - 2x'\cdot x\cos\varphi + (x^2+y^2)\cos^2\varphi - y^2 = 0.$$

$$x' = x\cos\varphi \pm \sqrt{x^2\cos^2\varphi - (x^2+y^2)\cos^2\varphi + y^2} = x\cos\varphi \pm \underbrace{\sqrt{y^2(1-\cos^2\varphi)}}_{=\sqrt{y^2\sin^2\varphi} = |y\sin\varphi|} =$$

$$= x\cos\varphi \pm y\sin\varphi.$$

Тоді

$$y' = \frac{1}{y}\left((x^2+y^2)\cos\varphi - x(x\cos\varphi \pm y\sin\varphi)\right) = \frac{1}{y}\left(y^2\cos\varphi \mp xy\sin\varphi\right) =$$

$$= \mp x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

Отже,

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ x\cos\varphi \pm y\sin\varphi & \mp x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{vmatrix} = x(\mp x\sin\varphi + y\cos\varphi) -$$

$$- y(x\cos\varphi \pm y\sin\varphi) = \mp(x^2+y^2)\sin\varphi. \quad \underbrace{(\varphi\in(0,\pi))}\quad \underbrace{(\varphi\in(-\pi,0))}$$

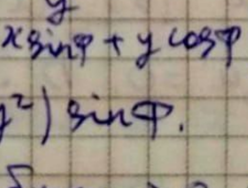
$x^2+y^2>0$. При $\varphi>0$ це повинно бути >0, при $\varphi<0$ — <0.

Тобто потрібно брати нижній знак:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned}$$

(при $y=0$ — ан-но, при $a=0$ ця ф-ла теж вірна).

167. ΔABC — рівнобедрений з основою BC і додатно орієнтований, тобто $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$ дод. орієнт., $A(2,1)$, $B(7,-4)$, $\angle A = \arccos\frac{3}{5}$. Знайти C.



Коорд. мет.

$\overline{AB} = (5, -5)$

$\overline{AC}$ утворений з $\overline{AB}$ обертанням на кут $\angle A$.

$\cos\angle A = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin\angle A = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \ (\angle A \in (0, \pi))$

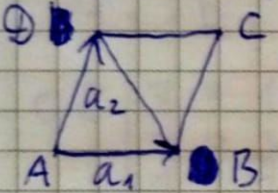
$\overline{AC} = (5\cdot\cos\angle A - (-5)\sin\angle A,\ 5\sin\angle A + (-5)\cos\angle A) =$

$= \left(5\cdot\frac{3}{5} + 5\cdot\frac{4}{5},\ 5\cdot\frac{4}{5} - 5\cdot\frac{3}{5}\right) = (7, 1)$.

$C = A + \overline{AC} = (2,1) + (7,1) = (9,2)$.

156. $a_1 = (4,5)$, $a_2 = (2,0)$, $b_1 = (2,-1)$, $b_2 \perp b_1$, орієнтовані паралелограми, що побудовані на a_1, a_2 і b_1, b_2 мають рівні площі. С.к. декартова. Знайти b_2.

Паралелограм, що побудований на a_1, a_2 — це $ABCD$:



$\overline{AB} = a_1$, $\overline{AD} = a_2$. Його орієнтована площа — це S_{ABCD}, якщо $\{a_1, a_2\} > 0$ орієнт., і $-S_{ABCD}$ — якщо < 0. Якщо у декартових коорд. $a_1 = (x_1, y_1)$, $a_2 = (x_2, y_2)$, то вона дорівнює $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

(а $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ — це орієнтована площа ΔABD).

Отже, для $b_2 = (x, y)$:

$$0 = (b_1, b_2) = 2x - y.$$

$$-10 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{vmatrix} = 2y + x$$

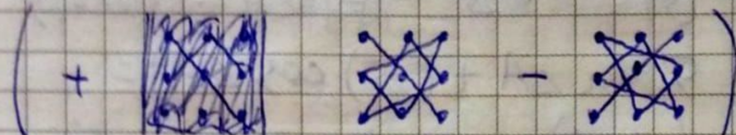
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 2y = -10 \end{cases}$$

$5x = -10$, $x = -2$, $y = -4$. $b_2 = (-2, -4)$.

У тривимірному просторі орієнтованість визн. аналогічно: для базисів (некомпланарних трійок) $\{a_1, a_2, a_3\}$ і $\{b_1, b_2, b_3\}$ нехай $b_1 = c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + c_{13}a_3 = \sum_{i=1}^{3} c_{1i}a_i$, $b_2 = \sum_{i=1}^{3} c_{2i}a_i$, $b_3 = \sum_{i=1}^{3} c_{3i}a_i$. Тоді ці базиси однаково (відп., протилежно) орієнтовані, якщо $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0 \ (< 0)$, де

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = c_{11}\begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} - c_{12}\begin{vmatrix} c_{21} & c_{23} \\ c_{31} & c_{33} \end{vmatrix} + c_{13}\begin{vmatrix} c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= c_{11}c_{22}c_{33} - c_{11}c_{23}c_{32} - c_{12}c_{21}c_{33} + c_{12}c_{23}c_{31} + c_{13}c_{21}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31}.$$



Якщо у обраних коорд. $a_1=(a_{11},a_{12},a_{13})$, $a_2=(a_{21},a_{22},a_{23})$, $a_3=(a_{31},a_{32},a_{33})$, то $\{a_1,a_2,a_3\}$ додатно (відн. від'ємно) орієнтований $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0 \ (<0)$.
(це $=0 \Leftrightarrow a_1, a_2, a_3$ компланарні)

175. $a=(0,1,1)$, $b=(1,1,0)$. Знайти c: $|c|=1$, $c\perp a$, кут між b і c дор. $\frac{\pi}{4}$, $\{a,b,c\}$ дод. орієнт. Коорд. дек.

$c=(x,y,z)$.

$1=|c|^2 = x^2+y^2+z^2$

$0=(a,c)= y+z$

$\frac{\sqrt2}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{(b,c)}{|b||c|} = \frac{x+y}{\sqrt2\cdot 1}$

$$0 < \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y & z \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & z \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = 0 - z + y - x.$$

Отже, маємо систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y+z=0 \\ x+y=1 \\ -x+y-z>0 \end{cases}$$

$z=-y$, $x=1-y$:

$(1-y)^2+y^2+(-y)^2=1$

$\cancel{1}-2y+3y^2=\cancel{1}$

$3y\left(y-\frac{2}{3}\right)=0$

$y=0$: $x=1$, $z=0$, $-x+y-z=-1<0$.

$y=\frac{2}{3}$: $x=\frac{1}{3}$, $z=-\frac{2}{3}$, $-x+y-z=1>0$.

Отже, $c=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$.