Оскільки $\forall\, p \in U$ g_p дод. визначена, м-ці G теж дод. визначені, зокрема невироджені. Позначимо $(g^{ij})_{i,j=1}^{n} := G^{-1}$ – коеф. оберненої м-ці, $g^{ij} \in C^{k-1}(U)$. Показати, що тоді $g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$ коректно задає (симетричне) $(k-1)$-гл. $(0,2)$-тензорне поле на M. Його іноді звуть кометрикою, що відповідає g. Як знайти значення цього поля від 1-форм α, β на M?

Далі (M,g) і (N,h) – ріманові k-гл. многовиди $(k \geq 1)$, $\dim M = \dim N = n$.

<u>def.</u> k-дифеоморфізм $F: M \to N$ зветься ізометрією (M,g) і (N,h), якщо $\forall$ кусково гл. шляху $\gamma: [a,b] \to M$ $l_g(\gamma) = l_h(F \circ \gamma)$.
Якщо $\exists$ ізометрія (M,g) і (N,h), то вони звуться ізометричними.

<u>Rem.</u> γ кусково k-гл., F – k-гл. $\Rightarrow$ $F \circ \gamma$ кусково k-гл. за <u>def.</u>

<u>Впр.</u> Ізометричність – відношення екв-сті k-гл. ріманових многовидів.

Рч. F - ізометрія $\Leftrightarrow$ F - k-дифеоморфізм і $F^*h = g$.

$\triangleright$ $\Leftarrow$. Ан-но властивості ч. довжини (це й частн. випадок, бо дифео-зм F є занурення).

$\Rightarrow$. $\forall p \in M$ $\forall v \in T_pM$ нехай $\gamma \in C^k((-\varepsilon, \varepsilon), M) : \gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. $\forall t \in (0, \varepsilon)$ за умовою $l_g(\gamma|_{[0,t]}) = l_h(F\circ\gamma|_{[0,t]})$, тобто

$$\int_0^t |\gamma'(\tau)|_g \, d\tau = \int_0^t \sqrt{g_{\gamma(\tau)}(\gamma'(\tau), \gamma'(\tau))}\, d\tau = \int_0^t \sqrt{h_{F(\gamma(\tau))}((F\circ\gamma)'(\tau), (F\circ\gamma)'(\tau))}\, d\tau =$$

$$= [(F\circ\gamma)'(\tau) = d_{\gamma(\tau)}F(\gamma'(\tau)), \underline{\text{озн.}}\ F^*] = \int_0^t \sqrt{(F^*h)_{\gamma(\tau)}(\gamma'(\tau), \gamma'(\tau))}\, d\tau =$$

$= \int_0^t |\gamma'(\tau)|_{F^*h}\, d\tau$. Продиференціюємо цю рівність за t у $t=0$: $|v|_g = |v|_{F^*h}$, тобто $g_p(v,v) = (F^*h)_p(v,v)$. Оскільки це так $\forall v \in T_pM$ (а форми симетричні), $g_p = (F^*h)_p$ $\forall p$, тобто $g = F^*h$ $\triangle$

Сл. Нехай g, h - рім. м-ки на M. Тоді $g = h \Leftrightarrow \forall$ кус. гл. шл. $\gamma : [a,b] \to M$ $l_g(\gamma) = l_h(\gamma)$.

$\triangleright$ Застосуємо попер. Рч. до $F = id_M$: тоді умова $l_g(\gamma) = l_h(\gamma)$

$\forall \gamma \Leftrightarrow g = id_M^* h = h$. $\blacktriangle$

<u>Cor.</u> F - ізометрія $\Leftrightarrow$ F - (k-) дифео-зм і $\forall p \in M$ d_pF - ізометрія евклідових просторів (T_pM, g_p) і $(T_{F(p)}N, h_{F(p)})$.

$\triangleright$ $\forall p \in M$ $g_p = (F^*h)_p \Leftrightarrow \forall v, w \in T_pM$ $g_p(v,w) = (F^*h)_p(v,w) = h_{F(p)}(d_pF(v), d_pF(w)) \Leftrightarrow d_pF$ - ізометрія. $\blacktriangle$

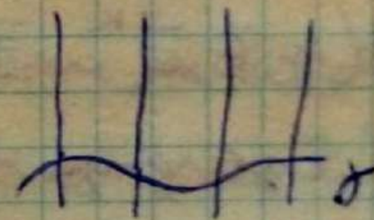
<u>Rem.</u> Якщо F - дифео-зм, то $\forall p \in M$ в околах p і $F(p)$ $\exists$ карти такі, що локальне задання F - тотожне відобр. (у цьому випадку говорять, що F задається локально рівністю координат).

Дійсно, нехай $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ - атлас M. Тоді $\{(F(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ F^{-1})\}_{\alpha \in A}$ - атлас з гл. структури N (<u>Впр.</u>), і у парі відп. карт лок. задання F - це $\varphi_\alpha \circ F^{-1} \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$.

<u>Rem.</u> Якщо дифео-зм F локально задається рівністю коорд., то умова $g = F^*h$ перетворюється на $g_{ij} = h_{ij}$ $\forall i, j = \overline{1,n}$ для коефіцієнтів g і h у відп. лок. координатах.

Ex. 1. Можна розглянути ізометрії (M,g) на себе. Вони утворюють групу з операцією композиції (Впр.) При цьому сама ця група є гладким многовидом (це Th. Маєрса-Стінрода)
Наприклад, для $(M,g) = E^n$ це афінні ізометрії $F(x) = Ax + b$, де $A \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$, а для $(M,g) = S^n$ – обмеження лінійних ізометрій E^{n+1}: $F(x) = Ax$, $A \in O(n+1)$ (Впр.).

2. Тор T^n з прикладу вище або прямий циліндр у E^3 ($r(u,v) = (f(u), g(u), v)$, де $\gamma = (f,g)$ – нат. параметризована крива у E^2: $r_u = (f', g', 0)$, $r_v = (0,0,1) \Rightarrow g_{11} = \langle r_u, r_u \rangle = 1$, $g_{12} = \langle r_u, r_v \rangle = 0$, $g_{22} = \langle r_v, r_v \rangle = 1$, тобто $g = du^2 + dv^2$; взагалі так можна зробити $\forall$ поверхні в E^3, що розгортається). Вони мають м-ки, що локально виглядають як м-ка E^n, але тому, взагалі кажучи, не ізометричні, бо не дифеоморфні (скажімо, T^n або циліндр $S^1 \times \mathbb{R}$).



Def. Будемо говорити, що (M, g) локально ізометричний (N, h), якщо $\forall\, p \in M\ \exists\, q \in N$ і відкриті $U \ni p$, $V \ni q$ такі, що $\exists$ ізометрія $F : (U, g|_U) \to (V, h|_V)$.

Rem. Це def. несиметричне, але його можна зробити симетричним, вимагаючи того ж для точок N.

Якщо (M, g) лок. ізометричний E^n в сенсі цього def. і, скажімо, окіл (відкр.) $U \ni \overset{\in M}{p}$ ізометричний відкр. $V \ni x$ в E^n, то $\forall\, y \in E^n\ \exists$ ізометрія $\Psi : E^n \to E^n$ така, що $x \mapsto y$, тоді V ізометрично переходить у відкр. $\Psi(V) \ni y$, що ізометрична U. Тому для цього випадку def. виконується для усіх точок E^n автоматично (це так $\forall$ однорідного простору N, тобто такого, що $\forall$ точку можна перевести у будь-яку ізометрією $N \to N$, наприклад, для E^n, S^n, H^n — Впр.). Якщо (M, g) лок. ізометричний E^n, його називають пласким.

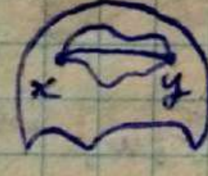
Ex. У Ex.2. вище, якщо (U,φ) - карта M, у якій $g_{ij}=\delta_{ij}$, то $\varphi:(U, g|_U)\to E^n$ - ізометрія.

Впр. Нехай $F: M\to N$ - k-дифео-зм. Показати, що $\exists \lambda\in C^{k-1}(M)$: $F^*h=\lambda g \Leftrightarrow \forall$ k-гл. кривих γ і μ у M, що перетинаються у деякій $p\in M$ і для яких визначений $\angle_p(\gamma,\mu)$ вірно, що $\angle_p(\gamma,\mu)=\angle_{F(p)}(F\circ\gamma, F\circ\mu)$. У цьому випадку F наз. конформною еквівалентністю (M,g) і (N,h). Показати, що конф. екв-сті теж задають відношення екв-сті рімановах многовидів (слабше за ізометричність, бо згідно з критерієм вище, ізометрії є конф. екв-стями). Навести приклад конф. екв-сті, що не є ізометрією.

Простори з внутрішньою метрикою

- Ю.Д. Бураго, Д.Ю. Бураго, С.В. Иванов. Курс метрической геометрии.

Ідея: якщо є правило вимірювання довжин шляхів, що з'єднують дві точки, то можна визначити відстань між цими точками як inf таких довжин.



def. Класом допустимих шляхів у топологічному просторі X зветься якась множина Γ шляхів, тобто відображень вигляду $\gamma \in C([a,b], X)$ така, що:

0. Γ містить усі постійні шляхи $\gamma : [a,a] \to x \in X$.
1. $\gamma \in \Gamma$, $\gamma : [a,b] \to X \Rightarrow \forall\ [c,d] \subset [a,b]$ $\gamma|_{[c,d]} \in \Gamma$.
2. $\forall\ \gamma \in C([a,b], X)$ якщо $\exists\ c \in [a,b]$ таке, що $\gamma|_{[a,c]} \in \Gamma$ і $\gamma|_{[c,b]} \in \Gamma$, то $\gamma \in \Gamma$.
3. $\forall\ \gamma \in \Gamma$, $\gamma : [a,b] \to X$ і $\forall$ лінійної біекції $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ (тобто $\varphi(t) = \alpha t + \beta$, де $\alpha \neq 0$) $\gamma \circ \varphi \in \Gamma$.

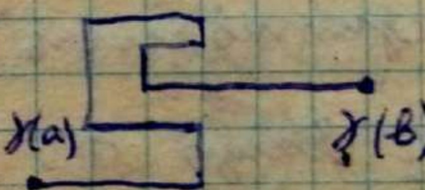
Rem. У випадку 2. будемо називати γ об'єднанням шляхів

$\gamma_1 := \gamma|_{[a,c]}$ і $\gamma_2 := \gamma|_{[c,b]}$ і позначати $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ (як вище).

<u>Ex. 1.</u> $X = \mathbb{R}^n$, Γ – лінійно параметризовані ламані.

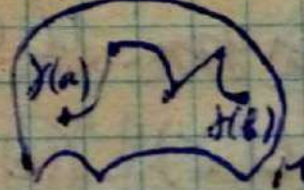
<u>2.</u> $X = \mathbb{R}^n$, Γ – кусково k-гладкі шляхи (містить попередній клас).

<u>Rem.</u> k-гладкі шляхи при $k \geq 1$ не складають клас допустимих шляхів, бо не задовольняють <u>2.</u>



<u>3.</u> $X = \mathbb{R}^n$, Γ – лінійно параметризовані ламані, ланки яких паралельні осям координат (звузили клас з <u>Ex. 1.</u>)

<u>4.</u> $X = M$ – k-гл. многовид, Γ – кусково k-гл. шляхи ($k \geq 1$, при $k = 0$ це просто всі шляхи).



<u>5.</u> $X = U$ – підмножина простору [redacted] Y з класом допустимих шляхів Δ (на U – індукована топологія),

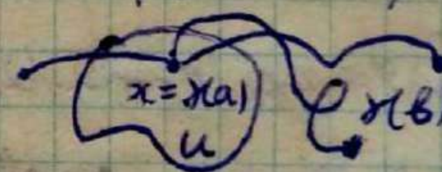
$\Gamma := \{\gamma \in \Delta \mid \gamma : [a,b] \to U\}$ – шляхи з Δ, що не виходять з U.

def. Нехай Γ – клас допустимих шляхів у топ. пр. X.
Функціоналом довжини на Γ наз. $l : \Gamma \to \underset{\{x \geq 0\}}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}_+}} \cup \{+\infty\}$,
що задовольняє умовам:

1. $\forall \gamma \in \Gamma$, $\gamma : [a,b] \to X$ функція $t \mapsto l(\gamma|_{[a,t]})$ неперервна на $[a,b]$ (якщо всі її значення скінченні).

2. Якщо $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$, то $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$ (адитивність)

3. Якщо $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ - лін. бієк. ($\varphi(t) = \alpha t + \beta$, $\alpha \neq 0$), то $\forall \gamma \in \Gamma$,
$\gamma : [a,b] \to X$ $\quad l(\gamma \circ \varphi) = l(\gamma)$ (інваріантність).



4. $\forall$ відкр. $U \subset X$ $\forall x \in U$
$\inf\{ l(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma, \gamma : [a,b] \to X, \gamma(a) = x, \gamma(b) \notin U \} > 0$.

Rem. Коректність у п. 1 - 3 забезпечена відп. пунктами у def. класа допустимих шляхів. У 2. використані очевидні правила поводження з $+\infty$ (як у теорії міри): $c + \infty = +\infty$ і т.д.

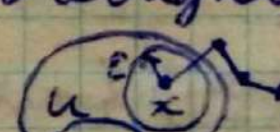
Rem. Для постійних шляхів $\gamma : [a,a] \to X$ маємо $\gamma = \gamma * \gamma$, тому з 2. $l(\gamma) = l(\gamma) + l(\gamma) \Rightarrow l(\gamma) = 0$.

Далі номери прикладів відповідають номерам для класів доп. шляхів:

Ex. 1. (ламані в $\mathbb{R}^n$). Нехай $a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_m = b$ — розбиття на проміжки лінійності ламаної $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

$l(\gamma) := \sum_{i=1}^{m} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$ (де $|\cdot|$ — евкл. норма на $\mathbb{R}^n$)

Це евклідова довжина ламаної. 1. – 3. (майже) очевидні, у 4. $\inf \geq \varepsilon$, де $B_\varepsilon(x) \subset U$ — евкл. куля.



2. (кус. k-гл. у $\mathbb{R}^n$, $k \geq 1$). $l(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$ — теж евклідова довжина.

3. (ламані в $\mathbb{R}^n$ з ланками, що паралельні осям). Ан-но 1.

4. (кус. k-гл. у (M,g), $k \geq 1$). $l(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}\,dt$ — ріман. довжина.

5. ($X = U \subset Y$) $l|_\Gamma$, де l — функц. довжини на Δ.

У Ex.4. (зокрема в Ex.2.) 1. випливає з власт. інтеграла Рімана, 2. і 3. — з відп. властивостей ріманової довжини (3.

очевидно вірне і для кус.-гл. при ліпітлоид P), 4. доведено
повне.

<u>Впр.</u> Перевірити властивості <u>1</u>-<u>4</u>. у <u>Єх.5</u>.

<u>def.</u> Простором з внутрішньою метрикою (ПВМ, length space)
будемо називати трійку (X, Γ, ℓ), де X – T_0 – топ. простір,
Γ – клас допустимих шляхів у X, ℓ – ф-л довжини на Γ.

<u>def.</u> Внутрішньою метрикою ПВМ (X, Γ, ℓ) наз. $d_\ell : X \times X \to$
$\to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$: $\forall x, y \in X$

$$d_\ell(x,y) := \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma, \gamma : [a,b] \to X, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}.$$

<u>Rem.</u> У таких випадках $(\gamma : [a,b] \to X, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y)$ будемо
говорити, що γ з'єднує x і y (з y). $d_\ell(x,y) = +\infty$,
якщо або таких шляхів немає, або всі вони мають
довжину $+\infty$.

(тобто така, що може приймати знач. $+\infty$, з відп. модифікацією пер-ості трикутника)

<u>Rk.</u> d_ℓ – (розширена) метрика на X.

▷ $\forall\, x \in X$ постійний шлях $\gamma : [a,a] \to X : a \mapsto x$ належить до Γ в силу його власт. 0. і $l(\gamma) = 0$ в силу Rem. вище. Оскільки цей γ з'єднує x з собою, за def. $d_l(x,x) = 0$.

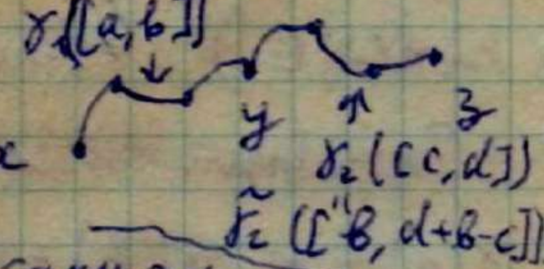
Нехай $x \neq y$. За аксіомою T_0 $\exists$ відкр. $U \ni x : y \notin U$ або $\exists$ відкр. $U \ni y : x \notin U$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати що виконане перше (для другого ан-но). За власт. 4. ф-ла l $C := \inf \{ l(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma$ з'єднує x і точку за межами $U \} > 0$. Оскільки $y \notin U$, за def. тоді $d_l(x,y) \geq C > 0$ (бо d_l – inf меншої множини, ніж C). Отже, d_l невироджена.

Симетричність: нехай $\gamma \in \Gamma$ з'єднує x і y: $\gamma : [a,b] \to X$, $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$. Тоді для $\bar{\gamma}(t) := \gamma(a+b-t)$ ($\bar{\gamma} : [a,b] \to X$) $\bar{\gamma} \in \Gamma$ і $l(\bar{\gamma}) = l(\gamma)$ в силу п-тів 3. з def. Γ і l відп. При цьому $\bar{\gamma}(a) = \gamma(b) = y$, $\bar{\gamma}(b) = \gamma(a) = x$ – $\bar{\gamma}$ з'єднує y з x. І навпаки, якщо γ з'єднує y з x, то $\bar{\gamma}$ – x з y. Тобто

$d_\ell(x,y)$ і $d_\ell(y,x)$ – інфімуми однієї й тієї ж числової множини $\Rightarrow$ $d_\ell(x,y) = d_\ell(y,x)$.

Нерівність трикутника: $\forall\, x, y, z \in X$ $\forall$ шляхів $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, де $\gamma_1 : [a,b] \to X$, $\gamma_2 : [c,d] \to X$, $\gamma_1(a) = x$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(c) = y$, $\gamma_2(d) = z$ покладемо $\tilde{\gamma}_2(t) := \gamma_2(t - b + c)$, $\tilde{\gamma}_2 : [b, d+b-c] \to X$. В силу 3. з def. Γ і ℓ, $\tilde{\gamma}_2 \in \Gamma$ і $\ell(\tilde{\gamma}_2) = \ell(\gamma_2)$; $\tilde{\gamma}_2$ з'єднує y і z (як і γ_2) і визначене об'єднання $\gamma := \gamma_1 * \tilde{\gamma}_2$, $\gamma : [a, d+b-c] \to X$, що з'єднує x і z. В силу п. 2. def. Γ і ℓ, $\gamma \in \Gamma$ і

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \ell(\tilde{\gamma}_2) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2).$$



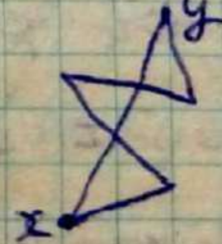
За def. d_ℓ, $d_\ell(x,z) \le \ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$

Перейдемо до inf за усіма γ_1, γ_2 (з Γ, що з'єднують x з y і y з z відп.):

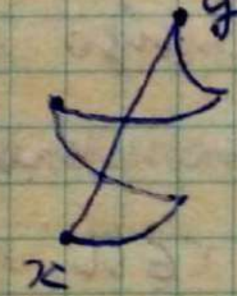
$$d_\ell(x,z) \le d_\ell(x,y) + d_\ell(y,z).$$

Впр. Що буде, якщо одна з [redacted] відстаней дорівнює $+\infty$? $\triangle$

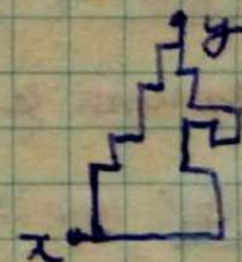
Ex. 1. За нерівністю трикутника евкл. н-ми, інф евклідових довжин ламаних, що з'єднують x і y в $\mathbb{R}^n$ – це довжина відрізка прямої, що їх з'єднує, тобто $d_e(x,y) = |x-y|$ – евкл. метрика.



2. Для довільних кусково k-гладких шляхів, що з'єднують x і y в $\mathbb{R}^n$ і їх евкл. довжин інф. той самий: $d_e(x,y) = |x-y|$ (Впр. або див. нижче про функціонали довжини, що породжені метрикою).



3. Для ламаних з ланками $\parallel$ осям координат, що з'єднують x і y в $\mathbb{R}^n$, і їх евкл. довжин інф – це $d_e(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|$ (довжина "~~[illegible]~~ сходів", де на кожній ланці $\parallel Ox^i$ координата x^i завжди зростає або завжди спадає). d_e – це н-на d_1 (taxicab, вулична, манхетенська), і оцінка вище випливає з нерівності тр-ка для d_1 і того, що довжина ланки



ламаної з Г дорівнює d_1-відстані між її кінцями (що тут = евклідові).

Ч. Рімановий випадок розглянено пакже.

Рк. Якщо U відкрита у топ. просторі X, то вона відкрита і в метричній топології d_ℓ (вихідна топ. не сильніша за метричну).

▷ $\forall x \in U$ нехай $C := \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma$ з'єднує x і $y \notin U\} > 0$ за вл. Ч. ℓ.
$\forall y \in B_C(x)$ $d_\ell(x,y) < C \Rightarrow$ [def. d_ℓ] $\Rightarrow \exists \gamma \in \Gamma : \gamma$ з'єднує x і y, $\ell(\gamma) < C \Rightarrow$ [побудова C] $\Rightarrow y \in U$. Тобто $B_C(x) \subset U$. Т.ч., U відкрита у метричній топ. △

Ex. 1-3.: ці топології збігаються (стандартна топ. $\mathbb{R}^n$ — метрична для евклідової і d_1).

Ч Теж збігаються у рімановому випадку (див. нижче).

Rem. Взагалі кажучи, ці топології різні (Впр., або див. Б.-Б.-1).

Рк. Усі $\gamma \in \Gamma$ неперервні і в метричній топології.

▷ Отже, нехай $\gamma \in \Gamma$, $\gamma : [a,b] \to X$. Згідно з метричним критерієм неперервності, достатньо довести, що $\forall$ послідовності $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t$ в $[a,b]$ $d_\ell(\gamma(t_n), \gamma(t)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $(\Leftrightarrow \gamma(t_n) \to \gamma(t))$. Будемо тут позначати через $[t_n, t]$ відрізок $[t_n, t]$ при $t_n \leq t$ і $[t, t_n]$ при $t_n \geq t$. За <u>def.</u> d_ℓ (і оскільки $\gamma|_{[t_n,t]} \in \Gamma$ за власт. <u>1.</u> з <u>def.</u> Γ і з'єднує $\gamma(t_n)$ і $\gamma(t)$ або навпаки):

$$d_\ell(\gamma(t_n), \gamma(t)) \leq \ell(\gamma|_{[t_n,t]}) = [\underline{x}.\ \text{з } \underline{\text{def.}}\ \ell] = \left|\ell(\gamma|_{[a,t]}) - \ell(\gamma|_{[a,t_n]})\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

бо $t \mapsto \ell(\gamma|_{[a,t]})$ непер. за <u>1.</u> з <u>def.</u> ℓ, що доводить потрібне. ◭

<u>Rem.</u> У подальшому розглядатимемо на X саме метричну топологію.

<u>def.</u> Компонентою скінченності точки $x \in X$ у ПВМ (X, Γ, ℓ) будемо називати $L_x := \{y \in X \mid d_\ell(x,y) < +\infty\}$, а компонентою досяжності x —

$$K_x := \{y \in X \mid \exists \gamma \in \Gamma : \gamma \text{ з'єднує } x \text{ і } y,\ \ell(\gamma) < +\infty\}.$$

Рч. Компоненти скінченності, досяжності, зв'язності та лінійної зв'язності X збігаються.

▷ За def. d_ℓ, $K_x = L_x$ (див. Rem. вище).

Нехай N_x – компонента лін. зв'язності x. Оскільки за побудовою $K_x \overset{\text{лін.}}{\sim}$ зв'язна, $K_x \subset N_x$.

Нехай M_x – компонента зв'язності x. Тоді $N_x \subset M_x$ (бо N_x зв'язна)

$\forall y \in K_x \ \forall \varepsilon > 0 \ \forall z \in B_\varepsilon(y) \ d_\ell(y, z) < \varepsilon \Rightarrow \exists \gamma \in \Gamma : \gamma$ з'єднує y і z, $\ell(\gamma) < \varepsilon$. Оскільки $y \in K_x$, $\exists \mu \in \Gamma : \mu$ з'єднує x і y, $\ell(\mu) < +\infty$. Лінійно замінюючи за необхідності параметр (як у доведенні нер-сті тр-ка d_ℓ вище), можемо вважати, що визначений $\mu * \gamma \in \Gamma$, що з'єднує x і z, і $\ell(\mu * \gamma) = \ell(\mu) + \ell(\gamma) < +\infty$, тобто $z \in K_x$. Т.ч., $B_\varepsilon(y) \subset K_x$ $(\forall \varepsilon > 0)$.

Ан-но, $\forall y \notin K_x \ \forall \varepsilon > 0$ нехай $\exists z \in B_\varepsilon(y) \cap K_x$. Знову ж, тоді $\exists \gamma, \mu \in \Gamma : \gamma$ з'єднує z і y, $\ell(\gamma) < \varepsilon$, μ з'єднує x і

γ, $\ell(\mu) < +\infty$, і можемо вважати, що визначений $\mu * \gamma$, що з'єднує x і y, $\ell(\mu * \gamma) = \ell(\mu) + \ell(\gamma) < +\infty$, тобто $y \in K_x$ $\Downarrow$. П.ч., $B_\varepsilon(y) \subset X \setminus K_x$ ($\forall \varepsilon > 0$).

Отже, K_x і $X \setminus K_x$ відкриті, тобто K_x відкритозамкнена. Такі множини містять зв. компоненти X повністю, отже $M_x \subset K_x$.

Маємо $N_x \subset M_x \subset \underset{L_x}{\overset{\parallel}{K_x}} \subset N_x \Rightarrow N_x = M_x = K_x = L_x$. ▲

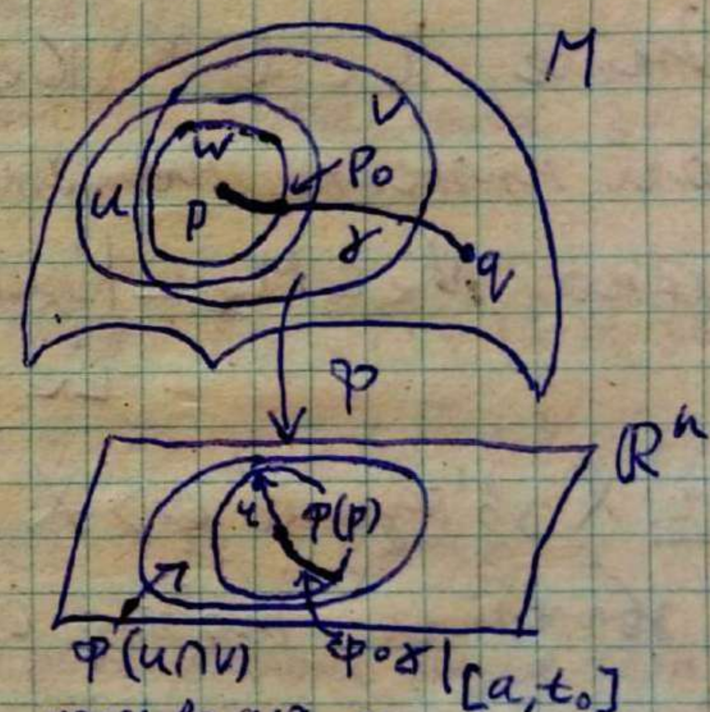
<u>Сл.</u> X зв'язний $\Leftrightarrow$ X лінійно зв'язний $\Leftrightarrow$ d_ℓ - метрика на X ("звичайна", тобто скінченна).

<u>Випадок ріманової метрики (Ex.ч.).</u>

<u>Пр.</u> Нехай (M, g) - k-гладкий рімановий многовид ($k \geq 1$), Γ - кусково k-гладкі шляхи у M, а ℓ - рімановий функціонал довжини. Тоді (M, Γ, ℓ) - ПВМ.

▷ Як зазначалося вище, <u>def.</u> маса допустимих шляхів для Γ і власт. 1.–3. дов. ф-ла довжини для ℓ виконані (тільки треба розширити власт. інваріантності 3. на кус.-гл. шляхи і лінійні заміни параметра – Впр.).

Отже, залишилося показати 4.



Нехай $U \subset M$ – відкр., $p \in U$.

$\exists$ карта (V,φ): $p \in V$ з лок. коорд. $(x^1,\dots,x^n)$ $(n=\dim M)$. Тоді $\exists\, r>0$: $B_r(\varphi(p)) \subset \varphi(U\cap V)$ (бо $\varphi(U\cap V)$ – відкр. окіл $\varphi(p)$ у $\mathbb{R}^n$, тут норма евклідова). Тоді $W := \varphi^{-1}(B_r(\varphi(p)))$ – можливо, для меншого $r>0$ – відкр. окіл p, і $\overline{W} = \varphi^{-1}(D_r(\varphi(p))) \subset U\cap V$ (Впр. або див. Постников). Зокрема, $\overline{W}$ – компакт як непр. образ компакта $D_r(\varphi(p)) \subset \mathbb{R}^n$.

Нехай $g|_V = g_{ij}\,dx^i dx^j$. $\forall q \in V$ позначимо через

$\lambda(q)$ найменше власне значення м-ці $G(q) = (g_{ij}(q))_{i,j=1}^{n}$.
Оскільки ця м-ця Грама дод. визначена, $\lambda(q) > 0$. Т.ч., визначена ф-ція $\lambda : V \to \mathbb{R}$. Вона неперервна (і навіть $(k-1)$-гладка - Впр.). Оскільки $\overline{W}$ - компакт, $\lambda|_{\overline{W}}$ приймає найменше значення $\lambda_0 > 0$.

Нехай тепер $\gamma : [a,b] \to M$ - кус. k-гл., $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q \notin U$. Зокрема, $q \notin \overline{W}$. Покладемо $t_0 := \sup\{t \in [a,b] \mid \gamma([a,t]) \subset W\}$. Тоді $p_0 := \gamma(t_0) \in \partial W$ і $\gamma([a,t_0]) \subset \overline{W} \subset V$, тому

$$l(\gamma) \geq l(\gamma|_{[a,t_0]}) = \int_a^{t_0} \sqrt{g_{ij}(\gamma(t))(\gamma^i)'(t)(\gamma^j)'(t)}\,dt \geq \text{[redacted]} \int_a^{t_0} \sqrt{\lambda(\gamma(t)) \sum_{i=1}^{n} (\gamma^i)'(t)^2}\,dt \geq$$
$$\geq \sqrt{\lambda_0} \int_a^{t_0} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\gamma^i)'(t)^2}\,dt = \sqrt{\lambda_0}\, l_E(\varphi \circ \gamma|_{[a,t_0]}) \geq \sqrt{\lambda_0}\, r.$$

Тут $(\gamma^1, \dots, \gamma^n) = \varphi \circ \gamma|_{\gamma^{-1}(V)}$ - лок. задання γ, l_E - евклідова довжина шляху в $\mathbb{R}^n$ (з Ex.2), остання нер-сть - з того, що $\varphi \circ \gamma|_{[a,t_0]}$ з'єднує центр евклідової кулі радіуса r з точкою на межі.
Оцінка не залежить від γ (зокрема від q), тільки від U

і p. Отримали $\underline{4}$: інф довжин таких шляхів $\geq \sqrt{\lambda_0}\, r > 0$. ▲

$\underline{\text{Тв}}$. Метрична топологія (M, d_g) збігається з топологією M.

▷ Вже знаємо, що метрична не слабша.

Нехай $p \in M$, (U, φ) – карта M з лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$, $p \in U$, $g|_U = g_{ij}\, dx^i dx^j$.

Оберемо якесь $r > 0$ і покладемо $V := \varphi^{-1}(B^E_{3r}(\varphi(p)))$, $W := \varphi^{-1}(B^E_r(\varphi(p)))$ – прообрази евклідових куль $\mathbb{R}^n$. Вони відкриті (отже в метричній топології теж), $p \in W$, $\overline{W} \subset V$, $\overline{V} \subset U$, $\overline{V}$ і $\overline{W}$ компактні (ан-но до минулого доведення; це все – в топології M).

Перенесемо на U евклідову м-ку $\mathbb{R}^n$: $d_E(q_1, q_2) = |\varphi(q_1) - \varphi(q_2)|$. Оскільки φ – гомеоморфізм, а топ. $\mathbb{R}^n$ породжується евкл. м-кою, d_E породжує топологію U (індуковану топологією M). Ми покажемо, що на W метрики d_E і d_g білпшицево еквівалентні, а отже відповідні топології

(вихідна M і метрична (M, d_e)) співпадають на W.
Цього достатньо для співпадіння топологій і глобально:
$\forall p \in M$ будуємо W як вище, оскільки вона відкр. у метр. топ., $\exists\ r(p) > 0$: куля м-ки d_e $B_{r(p)}(p) \subset W$. Тоді за припущенням вона і всі кулі $B_r(p)$, $r \leq r(p)$ відкриті в топ. W, а отже M. Оскільки $\{B_r(p)\}_{\substack{p \in M \\ r \leq r(p)}}$ утворюють базу метричної топ., $\forall$ множина, відкрита у метричній топ., відкрита і в вихідній, тобто метрична не сильніша $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ збігається з вихідною.

Ан-но попередньому дов. $\forall q \in U$ позначимо через $\lambda(q)$ і $\mu(q)$ найменше і найбільше власні значення м-ці Грама $G(q) := (g_{ij}(q))_{i,j=1}^{k}$ відп. Отримаємо ф-ції $\lambda, \mu : U \to \mathbb{R}$, неперервні (Впр.), $0 < \lambda \leq \mu$. Тоді на компактній $\overline{V}$ вони приймають найменше і найбільше значення λ_0 і μ_0 відп.: $0 < \lambda_0 \leq \mu_0 < +\infty$

Нехай $q_1, q_2 \in W$, $\gamma: [a,b] \to M$ — куск. k-гл. шлях, $\gamma(a)=q_1$, $\gamma(b)=q_2$.

Якщо $\gamma([a,b]) \subset \overline{V}$, то ан-но до попер. доведення маємо:

$$\sqrt{\lambda_0}\, l_E(\varphi\circ\gamma) = \sqrt{\lambda_0}\int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left((\gamma^i)'(t)\right)^2}\,dt \le \underbrace{\int_a^b \sqrt{g_{ij}(\gamma(t))(\gamma^i)'(t)(\gamma^j)'(t)}\,dt}_{=\, l(\gamma)} \le \sqrt{\mu_0}\int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left((\gamma^i)'(t)\right)^2}\,dt = \sqrt{\mu_0}\, l_E(\varphi\circ\gamma),$$

де $\varphi\circ\gamma = (\gamma^1,\dots,\gamma^n)$, l_E — евкл. ф-л довжини на $\mathbb{R}^n$, як вище. Отже, для таких γ

$$l(\gamma) \ge \sqrt{\lambda_0}\, l_E(\varphi\circ\gamma) \ge \sqrt{\lambda_0}\,|\varphi(\gamma(a)) - \varphi(\gamma(b))| = \sqrt{\lambda_0}\,|\varphi(q_1)-\varphi(q_2)| = \sqrt{\lambda_0}\, d_E(q_1,q_2).$$

Якщо ж γ виходить за межі $\overline{V}$, то нехай $\hat\gamma$ — його відрізок від q_1 до виходу за межі $\overline{V}$ ($\gamma|_{[a,t_0]}$ у позначеннях попер. доведення, з заміною W на V). Тоді

$$l(\gamma) \ge l(\hat\gamma) \ge \sqrt{\lambda_0}\, l_E(\varphi\circ\hat\gamma) \ge \sqrt{\lambda_0}\cdot 2r \ge \sqrt{\lambda_0}\, d_E(q_1,q_2).$$

Тут передостання нерівність — з того, що $\varphi\circ\hat\gamma$ з'єднує у $\mathbb{R}^n$ точку всередині евкл. кулі радіуса

r з межею концентричної кулі радіуса $3r$, а останнє — з того, що $\varphi(q_1)$ і $\varphi(q_2)$ лежать у евкл. кулі радіуса r.
Отже, $\forall\, \gamma \in \Gamma$, що з'єднує q_1 і q_2, $\ell(\gamma) \geq \sqrt{\lambda_0}\, d_E(q_1, q_2)$.
Перейдемо до inf: за def. d_ℓ,

$$d_\ell(q_1, q_2) \geq \sqrt{\lambda_0}\, d_E(q_1, q_2).$$

Тепер покладемо $\gamma(t) := \varphi^{-1}((1-t)\varphi(q_1) + t\varphi(q_2))$ — прообраз відрізка: $\gamma \in C^k([0,1], W)$, $\gamma(0) = q_1$, $\gamma(1) = q_2$. За def. d_ℓ і доведення,

$$d_\ell(q_1, q_2) \leq \ell(\gamma) \leq \sqrt{\mu_0}\, \ell_E(\varphi \circ \gamma) = \sqrt{\mu_0}\, |\varphi(q_1) - \varphi(q_2)| = \sqrt{\mu_0}\, d_E(q_1, q_2).$$

Т.ч., отримали потрібну біліпшицеву екв-сть метрик:

$$\sqrt{\lambda_0}\, d_E|_W \leq d_\ell|_W \leq \sqrt{\mu_0}\, d_E|_W. \qquad \triangle$$

<u>Індукована метрика (узагальнення Ex. 5.)</u>

Нехай (Y, Γ, ℓ) — ПВМ, X — T_0-топ. простір, $\varphi : X \to Y$ неперервне.
(У Ex. 5 вище $X = U \subset Y$ з індук. топ., $\varphi = i : U \to Y$ — включення: $x \mapsto x$).
Покладемо $\tilde{\Gamma} := \{\gamma \in C([a,b], X) \mid \varphi \circ \gamma \in \Gamma\}$ і $\tilde{\ell}(\gamma) := \ell(\varphi \circ \gamma)$ для $\gamma \in \tilde{\Gamma}$.

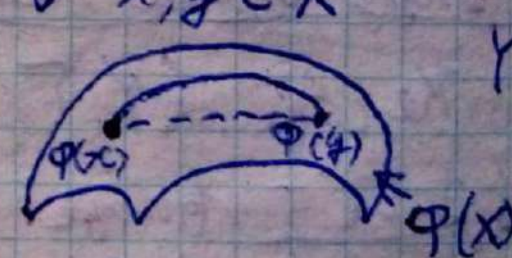
Втр. $\tilde{\Gamma}$ - клас допустимих шляхів на X, а $\tilde{\ell}$ задовольняє 1.-3. з **def.** ф-ла довжини, але не обов'язково задов. 4. (навести приклад).

def. Якщо $\tilde{\ell}$ задов. і 4., то ПВМ $(X, \tilde{\Gamma}, \tilde{\ell})$ будемо називати простором з внутрішньою метрикою $(d_{\tilde{\ell}})$, що індукована внутр. м-кою Y (d_{ℓ}) за допомогою φ.

Ex. $Y = (\bar{M}, \bar{g})$ з рімановою внутр. м-кою $d_{\ell_{\bar{g}}}$, $X = (M, g)$, де (M, φ) - підмноговид у $\bar{M}$, $g = \varphi^* \bar{g}$ - його перша фунд. ф-ла. Тоді згадаємо, що $\forall$ куск. гл. γ у M $\varphi \circ \gamma$ - куск. гл. у $\bar{M}$ (тут все - одної гладкості), і $\ell_g(\gamma) = \ell_{\bar{g}}(\varphi \circ \gamma)$. Тобто внутр. м-ка d_{ℓ_g} на M індукована за допомогою φ.

Pr. Для $d_{\tilde{\ell}}$, що індукована d_ℓ за допомогою φ $\forall x, y \in X$

$$d_{\tilde{\ell}}(x, y) \geq d_\ell(\varphi(x), \varphi(y))$$



▷ $\forall \gamma \in \tilde{\Gamma}$, що з'єднує x і y, $\varphi \circ \gamma \in \Gamma$ з'єднує $\varphi(x)$ і $\varphi(y)$, і $\ell(\varphi \circ \gamma) = \tilde{\ell}(\gamma)$. Тому $d_\ell(\varphi(x), \varphi(y))$

за def. – inf більшої (принаймні не меншої) числової множини, ніж $d_{\tilde{\ell}}(x,y)$. ▲

<u>Cor.</u> φ є ліпшицева (точніше, нерозтягуюча) відображення метр. просторів $(X, d_{\tilde{\ell}})$ і (Y, d_ℓ), а тому неперервна.

<u>Впр.</u> Чи є метрична топологія $d_{\tilde{\ell}}$ індукованою метр. топ. d_ℓ за допомогою φ (тобто чи мають <u>всі</u> відкр. множини вигляд $\varphi^{-1}(U)$, де U – відкр. відн. d_ℓ)?

Тепер узагальнимо ріманові многовиди і їхню внутрішню м-ку двома різними способами.

Ex. 6. Фінслерова метрика

<u>Def.</u> Фінслеровою структурою на k-гл. многовиді M ($k \geq 1$) зветься ф-ція $F \in C(TM, \mathbb{R})$ (лагранжіан) така, що $\forall p \in M$ $F(p, \cdot) : T_pM \to \mathbb{R}$ – норма на T_pM. (M, F) тоді зветься фінслеровим многовидом. Фінслеровою довжиною куск. k-гл. шляху

$\gamma: [a,b] \to M$ зветься
$$l(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(t), \gamma'(t))\, dt.$$

Rem. Тут ми використовуємо позначення $TM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\}$. Зауважимо, що $l(\gamma)$ $\exists$ і $\geqslant 0$, бо під інтегралом невід'ємна кусково неперервна ф-ція. Для рімановового випадку $F(p, v) = \sqrt{g_p(v, v)}$.

Впр. 1. l - ф-л довжини на кус. к-гл. шляхах Γ, тобто (M, Γ, l) - ПВМ.
2. Метрична топ. його внутрішньої м-ки d_l збігається з вихідною M.

Ex. 7 Субріманова метрика

Def m-вимірним розподілом на k-гл. многовиді M ($k \geqslant 1$, $m \leq n = \dim M$) зветься відображення $\mathcal{D}$, що кожній $p \in M$ ставить у відповідність m-вимірний векторний підпростір $\mathcal{D}_p \subset T_pM$.

Rem. Це відображення $M \to G_mTM := \bigcup_{p \in M} G_mT_pM$ (грасманове розшарування), де $\forall p \in M$ G_mT_pM - множина усіх

m-вимірних вект. підпросторів у T_pM (грассманіан). Можна показати, що G_mT_pM – ∞-гладкий $m(n-m)$-вимірний многовид $\forall p$ (див., наприклад, Рохлін-Фукс). Ан-по до тензорних розшарувань тоді можна показати, що G_mTM – $(k-1)$-гладкий $(n+m(n-m))$-вимірний многовид, тому можна говорити про гладкість розподілів. Але ми просто введемо її у def.:

def. Будемо говорити, що вполя $X_1, \ldots, X_m$ на $U \subset M$ утворюють базис m-вим. розподілу $\mathcal{D}$ на $U \subset M$, якщо $\forall q \in U$ $\{(X_1)_q, \ldots, (X_m)_q\}$ – базис $\mathcal{D}_q$. m-вим. розподіл $\mathcal{D}$ (на M) зветься ℓ-гладким ($\ell \in \overline{0, k-1}$), якщо $\forall p \in M$ $\exists$ відкр. $U \ni p$ і поля $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{X}^\ell(U)$, що утворюють базис $\mathcal{D}$ на U.

def. m-вим. ℓ-гл. розподіл $\mathcal{D}$ зветься (цілком) інтегровним, якщо $\forall p \in M$ $\exists$ $(\ell+1)$-гл. підмноговид (N, φ) у M з його занурення φ таким, що $p \in \varphi(N)$ і $\forall q \in N$