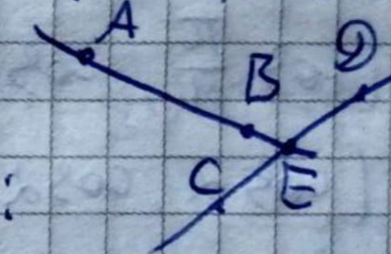
112. З'ясувати, чи перетинаються прямі AB і CD, якщо так, знайти точку перетину. $A(-3,5,15)$, $B(0,0,7)$, $C(2,-1,4)$, $D(4,-3,0)$ Аф.ск.

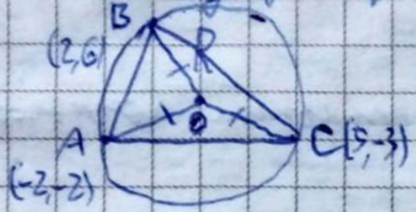


Якщо б існувала точка перетину E, то вона б ділила $\overline{AB}$ у відн. λ і $\overline{CD}$ у відн. μ:

$$\left.\begin{aligned}
x_E &= \frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{x_C+\mu x_D}{1+\mu} &:\quad \frac{-3}{1+\lambda} &= \frac{2+4\mu}{1+\mu}\\
y_E &= \frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{y_C+\mu y_D}{1+\mu} &:\quad \frac{5}{1+\lambda} &= \frac{-1-3\mu}{1+\mu}\\
z_E &= \frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda} = \frac{z_C+\mu z_D}{1+\mu} &:\quad \frac{15+7\lambda}{1+\lambda} &= \frac{4}{1+\mu}
\end{aligned}\right\}$$

З перших двох: $5\cdot\frac{2+4\mu}{1+\mu}+3\cdot\frac{-1-3\mu}{1+\mu}=0$, $10+20\mu-3-9\mu=0$,

$\mu=-\frac{7}{11} \overset{\text{перше}}{\Rightarrow} \frac{-3}{1+\lambda}=\frac{2-\frac{28}{11}}{1-\frac{7}{11}}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2} \Rightarrow 1+\lambda=2$, $\lambda=1$. Підставимо у третє: $\frac{15+7}{2}=\frac{4}{1-\frac{7}{11}}=11$, вірно. Тобто перетинаються у $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 11\right)$.



62. Для $O(a,b)$ рівняння кола (описаного навк. ΔABC)

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Знайти a, b, R.

Точки A, B, C йому належать:

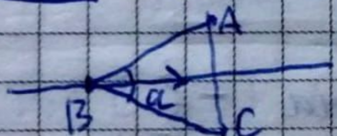
$$\begin{cases}(-2-a)^2+(-2-b)^2=R^2\\(2-a)^2+(6-b)^2=R^2\\(5-a)^2+(-3-b)^2=R^2\end{cases}\qquad\begin{cases}a^2+4a+4+b^2+4b+4=R^2\\a^2-4a+4+b^2-12b+36=R^2\\a^2-10a+25+b^2+6b+9=R^2\end{cases}$$

Віднімаємо:

$$\begin{cases}8a+16b=32\\14a-2b=26\end{cases}\qquad\begin{cases}a+2b=4\\7a-b=13\end{cases}$$

$15a=30\Rightarrow a=2\Rightarrow b=7a-13=1\Rightarrow R^2=(2+a)^2+(2+b)^2=16+9=25\Rightarrow R=5.$

71. $A(2,-1,3)$, $B(4,0,1)$, $C(-10,5,3)$. Знайти напрямні косинуси $\underset{\text{бісектриси}}{\underline{\angle ABC}}$.



Напрямний вектор бісектриси - це, наприклад,

$$a=\frac{\overline{BA}}{|\overline{BA}|}+\frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|}.$$

$\overline{BA}=(-2,-1,2)$, $\overline{BC}=(-14,5,2)$

$|\overline{BA}|=\sqrt{4+1+4}=3$, $|\overline{BC}|=\sqrt{196+25+4}=15$.

$$a=\frac{1}{3}(-2,-1,2)+\frac{1}{15}(-14,5,2)=\left(-\frac{2}{3}-\frac{14}{15},-\frac{1}{3}+\frac{5}{15},\frac{2}{3}+\frac{2}{15}\right)=\left(\overset{-\frac{8}{5}}{-\frac{24}{15}},0,\overset{\frac{4}{5}\cdot 2}{\frac{12}{15}}\right).$$

$$=\frac{4}{5}(-2,0,1)$$

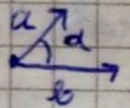
$$\frac{a}{|a|} = \frac{\frac{4}{5}(-2,0,1)}{\frac{4}{5}\cdot\sqrt{4+0+1}} = \left(-\frac{2}{\sqrt5}, 0, \frac{1}{\sqrt5}\right),$$ тобто $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt5}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt5}$.

(можна було взяти просто $a = (-2,0,1)$).

131. $\triangle ABC$ – рівносторонній: $AB = BC = CA = 1$. Знайти

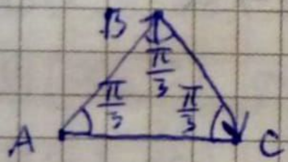
$$(\overline{AB},\overline{BC}) + (\overline{BC},\overline{CA}) + (\overline{CA},\overline{AB})$$

—

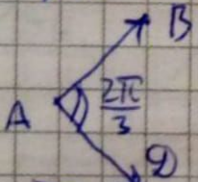


$(a,b) = |a||b|\cos\alpha$. Вектори мають спільний початок!

—



Кут між $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$ – це $\frac{2\pi}{3}$: можна перенести $\overline{BC}$ у A:



$\overline{AD} = \overline{BC}$

Тому $(\overline{AB},\overline{BC}) = |\overline{AB}|\cdot|\overline{BC}|\cos\frac{2\pi}{3} = AB\cdot BC\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$,

Або $(\overline{AB},\overline{BC}) = (-\overline{BA},\overline{BC}) = -(\overline{BA},\overline{BC}) = -BA\cdot BC\cdot\cos\angle B = -\frac{1}{2}$, бо $\angle B = \frac{\pi}{3}$.

Ан-но, $(\overline{BC},\overline{CA}) = -(\overline{CB},\overline{CA}) = -CB\cdot CA\cdot\cos\angle C = -\frac{1}{2}$,

$(\overline{CA},\overline{AB}) = -(\overline{AC},\overline{AB}) = -AC\cdot AB\cdot\cos\angle A = -\frac{1}{2}$. Тому сума $-\frac{3}{2}$.

—

$(a+b,c) = (a,c)+(b,c)$, $(a,b+c) = (a,b)+(a,c)$.

$(\lambda a,b) = \lambda(a,b) = (a,\lambda b)$

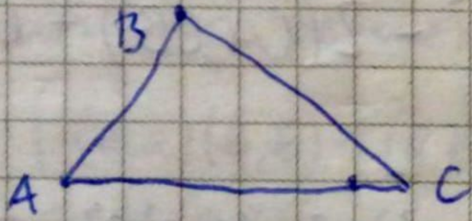
$(a,b) = (b,a)$

$(a,a) \geq 0$ і $(a,a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

$|a| = \sqrt{(a,a)}$.

$(a,b) = \langle a,b\rangle = a\cdot b$

132.



$BC = 5,\ CA = 6,\ AB = 7.$ Знайти $(\overline{AB}, \overline{BC})$.

$$(\overline{AB}, \overline{BC}) = -(\overline{BA}, \overline{BC}) = -BA \cdot BC \cdot \cos\angle B$$

Залишилося знайти $\cos\angle B$. Це можна зробити за теоремою косинусів. Але саму цю теорему можна вивести з властивостей скалярного добутку!

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$$

$$|\overline{AC}|^2 = (\overline{AC}, \overline{AC}) = (\overline{AB} + \overline{BC}, \overline{AB} + \overline{BC}) =$$

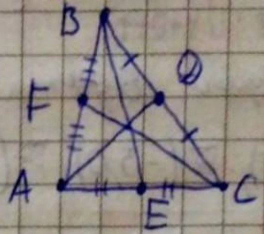
$$= (\overline{AB}, \overline{AB}) + (\overline{AB}, \overline{BC}) + (\overline{BC}, \overline{AB}) + (\overline{BC}, \overline{BC}) =$$

$$= |\overline{AB}|^2 + 2(\overline{AB}, \overline{BC}) + |\overline{BC}|^2.$$

Тобто $(\overline{AB}, \overline{BC}) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(36 - 49 - 25) = -19.$

(зокрема, $\cos\angle B = -\frac{1}{2}\,\frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{AB \cdot BC} = \frac{19}{35}$).

133. AD, BE, CF – медіани ΔABC. Знайти



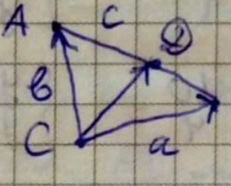
$(\overline{BC}, \overline{AD}) + (\overline{CA}, \overline{BE}) + (\overline{AB}, \overline{CF}) =$

$= (\overline{BC}, \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})) + (\overline{CA}, \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{BC})) + (\overline{AB}, \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})) =$

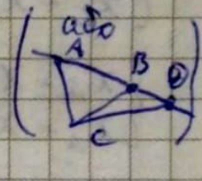
$= \frac{1}{2}(\overline{BC}, \overline{AB}) + \frac{1}{2}(\overline{BC}, \overline{AC}) + \frac{1}{2}(\overline{CA}, \overline{BA}) + \frac{1}{2}(\overline{CA}, \overline{BC}) + \frac{1}{2}(\overline{AB}, \overline{CA}) + \frac{1}{2}(\overline{AB}, \overline{CB}) =$

$= \frac{1}{2}(\overline{AB}, \overline{BC}) - \frac{1}{2}(\overline{BC}, \overline{CA}) - \frac{1}{2}(\overline{CA}, \overline{AB}) + \frac{1}{2}(\overline{BC}, \overline{CA}) + \frac{1}{2}(\overline{CA}, \overline{AB}) - \frac{1}{2}(\overline{AB}, \overline{BC}) = 0.$

135. D ділить $\overline{AB}$ у відн. λ, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Знайти CD



(або



)

$\overline{CD} = \frac{\overline{CA} + \lambda \overline{CB}}{1+\lambda}$

$CD^2 = (\overline{CD}, \overline{CD}) = \left(\frac{\overline{CA}}{1+\lambda}, \frac{\overline{CA}}{1+\lambda}\right) + 2\left(\frac{\overline{CA}}{1+\lambda}, \frac{\lambda \overline{CB}}{1+\lambda}\right) + \left(\frac{\lambda \overline{CB}}{1+\lambda}, \frac{\lambda \overline{CB}}{1+\lambda}\right) =$

$= \frac{1}{(1+\lambda)^2} CA^2 + \frac{2\lambda}{(1+\lambda)^2}(\overline{CA}, \overline{CB}) + \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} CB^2 \ominus$

Ан-но 132:

$c^2 = AB^2 = (\overline{AB}, \overline{AB}) = (-\overline{CA} + \overline{CB}, -\overline{CA} + \overline{CB}) =$

$= (\overline{CA}, \overline{CA}) - 2(\overline{CA}, \overline{CB}) + (\overline{CB}, \overline{CB}) = CA^2 - 2(\overline{CA}, \overline{CB}) + CB^2,$

отже $(\overline{CA}, \overline{CB}) = \frac{1}{2}(b^2 + a^2 - c^2)$, і

$\ominus \frac{1}{(1+\lambda)^2}(b^2 + \lambda(a^2 + b^2 - c^2) + \lambda^2 a^2) = \frac{1}{(1+\lambda)^2}((\lambda + \lambda^2)a^2 + (1+\lambda)b^2 - \lambda c^2) =$

$= \frac{\lambda}{1+\lambda} a^2 + \frac{1}{1+\lambda} b^2 - \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} c^2$

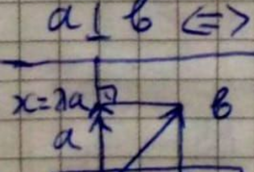
Для медіани: $\lambda = 1$: $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$

Для бісектриси: $\lambda = \frac{b}{a}$: $\frac{ba^2}{a+b} + \frac{ab^2}{a+b} - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)$

141. Дані $a \overset{*}{\ne} 0$ і b. Представити $b = x + y$: $x = \lambda a$, $y \perp a$.

x колінеарний a

$\boxed{a \perp b \Leftrightarrow (a, b) = 0}$



Уточнити словами!

x – проекція (ортогональна) b на пряму з напрямним вектором a.

y – орт. проекція b на площину, ортогональну до a.

Отже, $b = x + y = \lambda a + y$.

Домножимо на a:

$(a,b) = (a, \lambda a + y) = \lambda(a,a) + (a,y) = [y \perp a] = \lambda(a,a)$

Отже, $\lambda = \dfrac{(a,b)}{(a,a)}$,

$x = \dfrac{(a,b)}{(a,a)} a, \quad y = b - \dfrac{(a,b)}{(a,a)} a$.

149. $b = (8,4,1)$, $a = (2,-2,1)$, знайти y. Координати декартові.

$(a,b) = 8\cdot 2 + 4\cdot(-2) + 1\cdot 1 = 16 - 8 + 1 = 9$.

$(a,a) = 2^2 + (-2)^2 + 1^2 = 4+4+1 = 9 \quad (= |a|^2)$

$y = (8,4,1) - \frac{9}{9}(2,-2,1) = (6,6,0)$.

142. a, b – неколінеарні, x компланарний a, b, і

$\begin{cases} (a,x) = 1 \\ (b,x) = 0 \end{cases}$

$x = \lambda a + \mu b$.

Домножимо: $1 = (a,x) = (a, \lambda a + \mu b) = \lambda(a,a) + \mu(a,b)$

$0 = (b,x) = (b, \lambda a + \mu b) = \lambda(b,a) + \mu(b,b)$

Розв'яжемо лін. систему $\begin{cases} \lambda(a,a) + \mu(a,b) = 1 \\ \lambda(a,b) + \mu(b,b) = 0 \end{cases}$ відн. λ, μ:

Домножимо перше на (b,b), друге – на (a,b) і віднімемо:

$\lambda\left((a,a)(b,b) - (a,b)^2\right) = (b,b) \Rightarrow \lambda = \dfrac{(b,b)}{(a,a)(b,b) - (a,b)^2}$.

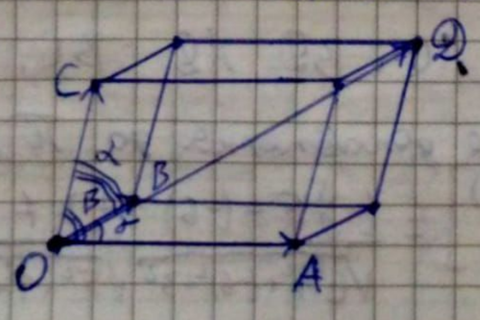
$\mu = -\dfrac{\lambda(a,b)}{(b,b)} = -\dfrac{(a,b)}{(a,a)(b,b) - (a,b)^2}$

Отже, $x = \dfrac{(b,b)a - (a,b)b}{(a,a)(b,b) - (a,b)^2}$.

146. $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ – ребра паралелепіпеда, $\overline{OD}$ – його діагональ,

$OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $\angle AOB = \gamma$, $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$.

Знайти: $d = OD$, $\angle AOD$, $\angle BOD$, $\angle COD$.



$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$

$d^2 = (\overline{OD}, \overline{OD}) = (\overline{OA}, \overline{OA}) + (\overline{OB}, \overline{OB}) + (\overline{OC}, \overline{OC}) + 2(\overline{OA}, \overline{OB}) + 2(\overline{OB}, \overline{OC}) + 2(\overline{OC}, \overline{OA})$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\gamma + 2bc\cos\alpha + 2ca\cos\beta.$

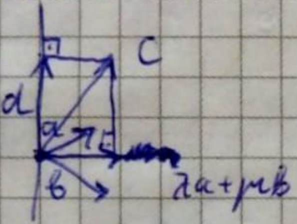
$(\overline{OA}, \overline{OD}) = (\overline{OA}, \overline{OA}) + (\overline{OA}, \overline{OB}) + (\overline{OA}, \overline{OC}) = a^2 + ab\cos\gamma + ac\cos\beta$

$\overset{\shortparallel}{ad\cos\angle AOD}.$

Trang $\cos\angle AOD = \dfrac{a^2 + ab\cos\gamma + ac\cos\beta}{ad}$.

An-no $\cos\angle BOD$, $\cos\angle COD$.

150. $a=(8,4,1)$, $b=(2,-2,1)$, $c=(1,1,9)$. Знайти ортогональну проекцію c на площину, що визначена a і b (коорд. дек.).



Тобто $c = \lambda a + \mu b + d$, де $d \perp a$, $d \perp b$.

Домножаємо на a, b:

$$(a,c) = \lambda(a,a) + \mu(a,b) + (a,d) = \lambda(8^2+4^2+1^2) + \mu(8\cdot 2+4\cdot(-2)+1\cdot 1)+0 = 81\lambda + 9\mu$$

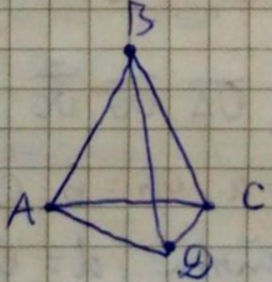
$$(b,c) = \lambda(b,a) + \mu(b,b) + (b,d) = 9\lambda + \mu(2^2+(-2)^2+1^2)+0 = 9\lambda+9\mu.$$

$$\begin{cases} 81\lambda + 9\mu = 8\cdot 1+4\cdot 1+1\cdot 9 = 21 \\ 9\lambda+9\mu = 2\cdot 1+(-2)\cdot 1+1\cdot 9 = 9 \end{cases} \qquad -\begin{cases} 27\lambda+3\mu = 7 \\ \lambda+\mu = 1 \quad |\cdot 3 \end{cases}$$

$$24\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}, \ \mu = \frac{5}{6}.$$

Проекція: $\lambda a + \mu b = \frac{1}{6}(8,4,1) + \frac{5}{6}(2,-2,1) = \left(\frac{18}{6}, \frac{-6}{6}, \frac{6}{6}\right) = (3,-1,1).$

154. Знайти кути, що утворені протилежними ребрами тетраедра з вершинами у точках $A(3,-1,0)$, $B(0,-7,3)$, $C(-2,1,-1)$, $D(3,2,6)$. Коорд. дек.



Пари протилежних ребер - це AB і CD, AC і BD, AD і BC.

Кути тут визначені з точністю до доповнення до π.

$$\cos\angle(\overline{AB}, \overline{CD}) = \frac{(\overline{AB}, \overline{CD})}{|\overline{AB}|\,|\overline{CD}|} = \left[\begin{matrix} \overline{AB} = (-3,-6,3) \\ \overline{CD} = (5,1,7) \end{matrix}\right] = \frac{(-3)\cdot 5 + (-6)\cdot 1 + 3\cdot 7}{\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+3^2}\sqrt{5^2+1^2+7^2}} =$$

$= 0$, тобто $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

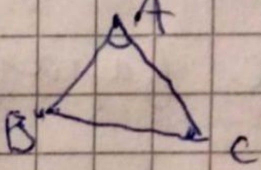
$$\cos\angle(\overline{AC}, \overline{BD}) = \frac{(\overline{AC}, \overline{BD})}{|\overline{AC}|\,|\overline{BD}|} = \left[\begin{array}{l} \overline{AC} = (-5, 2, -1) \\ \overline{BD} = (3, 9, 3) \end{array}\right] = \frac{(-5)\cdot 3 + 2\cdot 9 + (-1)\cdot 3}{\ldots} =$$

$= 0$, тобто $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

$$\cos\angle(\overline{AD}, \overline{BC}) = \frac{(\overline{AD}, \overline{BC})}{|\overline{AD}|\cdot|\overline{BC}|} = \left[\begin{array}{l} \overline{AD} = (0, 3, 6) \\ \overline{BC} = (-2, 8, -4) \end{array}\right] = \frac{0\cdot(-2) + 3\cdot 8 + 6(-4)}{\ldots} = 0,$$

тобто $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

223. $\{O, e_1, e_2\}$ – афінна система координат, $|e_1| = 4$, $|e_2| = 2$, кут між ними – $\omega = \frac{\pi}{3}$. У цій с.к. задані координати вершин тр-ка $A(1,3)$, $B(1,0)$, $C(2,1)$. Знайти AB, AC, $\angle BAC$.



Метричні коефіцієнти базиса:

$$g_{11} = |e_1|^2 = 16$$

$$g_{22} = |e_2|^2 = 4$$

$$\boxed{\begin{aligned} & a = a_1e_1 + a_2e_2, \quad b = b_1e_1 + b_2e_2 \\ & \langle a, b\rangle = a_1b_1\langle e_1, e_1\rangle + (a_1b_2 + a_2b_1) \\ & \langle e_1, e_2\rangle + a_2b_2\langle e_2, e_2\rangle = a_1b_1g_{11} + (a_1b_2 + \\ & + a_2b_1)g_{12} + a_2b_2g_{22} \\ & |a|^2 = \langle a, a\rangle = a_1^2g_{11} + 2a_1a_2g_{12} + a_2^2g_{22} \end{aligned}}$$

$$g_{12} = g_{21} = \langle e_1, e_2\rangle = |e_1||e_2|\cos\omega = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

$\overline{AB} = (0, -3)$, $\overline{AC} = (1, -2)$

$$AB^2 = |\overline{AB}|^2 = g_{11} \cdot 0^2 + 2g_{12} \cdot 0 \cdot (-3) + g_{22} \cdot (-3)^2 =$$

$= 4 \cdot 9 = 36$. Отже, $AB = 6$.

$$AC^2 = |\overline{AC}|^2 = g_{11} \cdot 1^2 + 2g_{12} \cdot 1 \cdot (-2) + g_{22} \cdot (-2)^2 =$$

$= 16 + 8 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 = 16$; $AC = 4$.

$$\langle \overline{AB}, \overline{AC}\rangle = g_{11} \cdot 0 \cdot 1 + g_{12}\left(0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1\right) +$$

$$+ g_{22} \cdot (-3)(-2) = 4 \cdot (-3) + 4 \cdot 6 = 12.$$

$$\cos\angle BAC = \frac{\langle \overline{AB}, \overline{AC}\rangle}{|\overline{AB}||\overline{AC}|} = \frac{12}{6 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$, т.ч. $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$