Домашнє завдання до заняття 30.09.24

(4.23) Довести, що будь-яка сфера $S_\varepsilon(x)$ метричного простору (X, ρ) є його замкненою підмножиною (у метричній топології).

(5.F) Нехай X – топологічний простір і $A \subset X$ – його замкнена підмножина. Довести, що підмножина $V \subset A$ замкнена в індукованій топології A тоді й тільки тоді, коли вона замкнена у X.

(5.G) Нехай (X, Ω) – топологічний простір і $X \supset A \supset B$. Позначимо топологію, що індукована на підмножині $A \subset X$ топологією Ω, через Ω_A, топологію що індукована на підмножині $B \subset A$ топологією Ω_A, через $(\Omega_A)_B$, і топологію що індукована на підмножині $B \subset X$ топологією Ω, через Ω_B. Довести, що $(\Omega_A)_B = \Omega_B$.

Додаткові задачі (не оцінюються)

(4.Mx) *Відстанню Хаусдорфа* між обмеженими підмножинами A і B метричного простору (X, ρ) зветься

$$d_\rho(A, B) := \max\left\{\sup_{a \in A} \rho(a, B),\ \sup_{b \in B} \rho(b, A)\right\},$$

де відстані від точок до множин $\rho(a, B)$ і $\rho(b, A)$ визначені як у задачі **4.L**. Довести, що ця відстань задовольняє властивостям симетричності та нерівності трикутника з означення метрики.

(4.Nx) Довести що відстань Хаусдорфа є метрикою на множині обмежених замкнених підмножин метричного простору (тут може знадобитися результат задачі **4.L**).

(5.7) Нехай (X, ρ) – метричний простір і $A \subset X$. Довести, що метрична топологія $(A, \rho|_{A \times A})$ збігається з топологією, що індукована на A метричною топологією (X, ρ).