4.F. (X, ρ) - МП. $A \subset X$ обмежена, якщо $\exists\, d > 0 : \rho(x, y) < d$ $\forall\, x, y \in A$. Показати: A обмежена $\Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0, x \in X : A \subset B_\varepsilon(x)$.

$\Rightarrow$ Візьмемо $\forall x \in A$ і $\varepsilon := d$. Тоді $\forall y \in A$ $\rho(x, y) < d \Rightarrow A \subset B_d(x)$.

$\Leftarrow$ $\forall\, y, z \in A$ за нер-стю тр-ка $d(y, z) \le d(y, x) + d(x, z) < [A \subset B_\varepsilon(x)] < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Тобто можна взяти $\forall\ d \geq 2\varepsilon$.

4.6. inf d з 4.F. $(= \sup\{\rho(x, y) \mid x, y \in A\})$ зветься діаметром A, diam A.

З дов. $\Rightarrow$ $\varepsilon \geq \mathrm{diam}\, A$. З дов. $\Leftarrow$, $\mathrm{diam}\, A \le 2\varepsilon$ (для даного ε).
(тобто для $x \in A$ підійде $\forall$ таке ε)

4.32.(1) ρ_1, ρ_2 - м-ки на $X \Rightarrow \rho_1 + \rho_2$, $\max\{\rho_1, \rho_2\}$ - м-ки на X.

Перевіряється за означенням. Наприклад, нер-сть тр-ка для max: $\forall\, x, y, z \in X$ $\rho_1(x, y) \le \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y) \le$
$\le \max\{\rho_1(x, z), \rho_2(x, z)\} + \max\{\rho_1(z, y), \rho_2(z, y)\}$. Ан-но,
$\rho_2(x, y) \le \max\{\rho_1(x, z), \rho_2(x, z)\} + \max\{\rho_1(z, y), \rho_2(z, y)\}$, тому
$\max\{\rho_1(x, y), \rho_2(x, y)\} \le \max\{\rho_1(x, z), \rho_2(x, z)\} + \max\{\rho_1(z, y), \rho_2(z, y)\}$.

4.32. Для $\rho_1+\rho_2$, $\max\{\rho_1,\rho_2\}$ - перевірити аксіоми.
Для інших - навести приклади трійок точок, для яких не виконана нерівність трикутника.

4.32. Як показати, що для метрик ρ_1 і ρ_2 $\rho_1\rho_2$ може бути не м-кою? Нехай $X = \{x, y, z\}$. ρ_1: $\underbrace{x \overset{1}{\text{———}} y \overset{2}{\text{———}} z}_{3}$ ρ_2: $\underbrace{x \overset{2}{\text{———}} y \overset{1}{\text{———}} z}_{3}$, м-ки. Але:

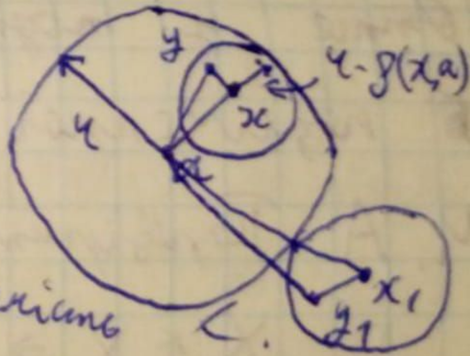
$\rho_1\rho_2$: $\underbrace{x \overset{2}{\text{———}} y \overset{2}{\text{———}} z}_{9}$ $\min\{\rho_1, \rho_2\}$: $\underbrace{x \overset{1}{\text{———}} y \overset{1}{\text{———}} z}_{3}$ – не задовольняють нерівності трикутника

4. Е. $\forall\, x, a \in X$ (де (X, ρ) - МП) $\forall\, r > \rho(x,a)$ (тобто $x \in B_r(a)$)

$$B_{r-\rho(x,a)}(x) \subset B_r(a) \quad \text{і} \quad D_{r-\rho(x,a)}(x) \subset D_r(a).$$

Нехай $y \in B_{r-\rho(x,a)}(x)$. Тоді $\rho(x,y) < r - \rho(x,a)$, отже

$\rho(y,a) \le [\text{нер. } \Delta] \le \rho(y,x) + \rho(x,a) < r - \rho(x,a) + \rho(x,a) = r$,



тобто $y \in B_r(a)$. Ан-но для замкн. куль з $\le$ замість $<$.

4.6. Сформулювати аналогічне твердження для $\rho(x,a) > r$, тобто ~~для~~ $x \notin D_r(a)$.

$$B_{\rho(x,a)-r}(x) \cap D_r(a) = \varnothing \quad \left(\text{і } D_{\rho(x,a)-r}(x) \cap B_r(a) = \varnothing\right)$$

Дійсно, $\forall\ y \in B_{\rho(x,a)-r}(x)$ $\rho(x,y) < \rho(x,a) - r$, тому

$\rho(x,a) \le [\text{нер. } \Delta] \le \rho(x,y) + \rho(y,a) < \rho(x,a) - r + \rho(y,a)$, тобто

$\rho(y,a) - r > 0$, $y \notin D_r(a)$. Ан-но другий перетин.

4.8. Знайти кулі і сфери у дискретному МП (з задачі 4.A):

$$D_1(a) = \{x \mid \rho(x,a) \le 1\} = X$$

$$D_{\frac{1}{2}}(a) = \{x \mid \rho(x,a) \le \tfrac{1}{2}\} = \{x \mid \rho(x,a) = 0\} = \{a\}.$$

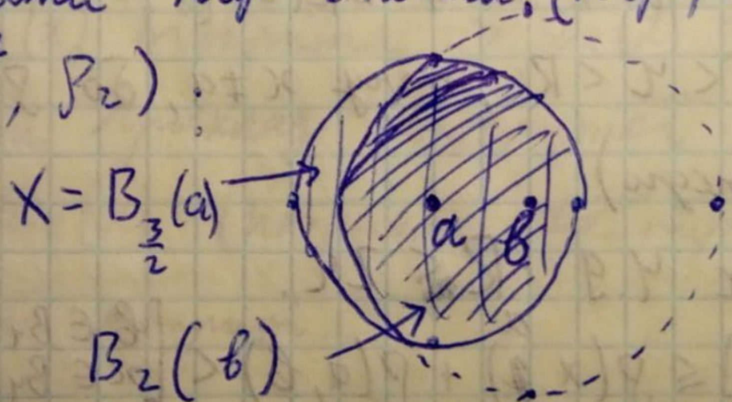
Взагалі, $D_r(a) = \left[\begin{array}{ll} X, & r \ge 1 \\ \{a\}, & 0 \le r < 1 \end{array}\right.$

$S_{\frac{1}{2}}(a) = \{x \mid \rho(x,a) = \frac{1}{2}\} = \varnothing$.

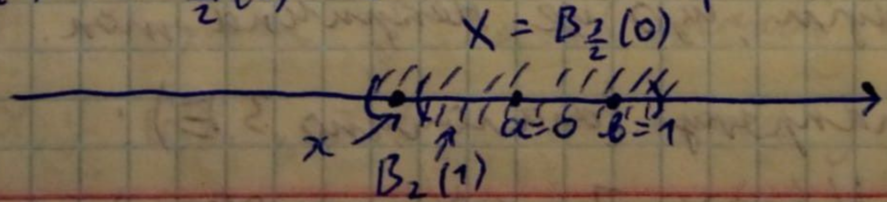
Взагалі $S_r(a) = \begin{cases} \varnothing, & r \ne 1 \\ X\setminus\{a\}, & r = 1 \end{cases}$ (і $\{a\}$ при $r = 0$, але сфери радіуса 0 не розглядаємо).

4. 8. Знайти МП (X, ρ) і кулі $B_r(a)$, $B_R(b)$ такі, що $r < R$, $B_R(b) \subset B_r(a)$, $B_R(b) \ne B_r(a)$.

Можна брати підмножини (підпростори) евклідової площини $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$:



Або прямої $(\mathbb{R}, \rho_2)$ (де $\rho_2(x,y) = |x-y|$): $r = \frac{3}{2}$, $R = 2$, $a = 0$, $b = 1$, $X = B_{\frac{3}{2}}(0) = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, $B_2(1) = (-1, \frac{3}{2})$ (як куля в X), тому $B_2(1) \subset B_{\frac{3}{2}}(0)$ і $\exists\, x = -\frac{5}{4}$: $x \in B_{\frac{3}{2}}(0)$, але $x \notin B_2(1)$:



Або обмежитися $X = \{-\frac{5}{4}, 0, 1\}$ з ρ_2. Так само $B_2(1) \subset B_{\frac{3}{2}}(0) = X$, і $B_2(1) \ne B_{\frac{3}{2}}(0)$ (бо не містить $-\frac{5}{4}$).

4.10. Яка найменша кількість точок у просторі з 4.9?

3. Ми побудували приклад з 3 точок, з іншого боку, для виконання умови $B_R(b) \subsetneq B_r(a)$ потрібні попарно різні a, b і x: $x \in B_r(a)$, $x \notin B_R(b)$ ($x \neq b$ – очевидно; з $B_R(b) \subset B_r(a) \Rightarrow \rho(a,b) < r < R$, тому $x \neq a$, бо $\rho(x,b) \geq R$; $a \neq b$, бо $B_r(a) \subset B_R(a)$ завжди).

4.11. Показати, що в умовах 4.9 $R \leq 2r$.

Дійсно, $\underset{\substack{\uparrow \\ x \notin B_R(b)}}{R \leq} \rho(x,b) \leq [\text{нер.} \Delta] \leq \rho(x,a) + \rho(a,b) < \left[\begin{matrix} b \in B_r(a) \\ x \in B_r(a) \end{matrix}\right] < 2r$.

4.G. $\forall$ МП (X, ρ) $\{B_r(x)\}_{\substack{x \in X \\ r > 0}}$ – база деякої топології.

Ми вже знаємо з лекцій, що це метрична топ. Але перевіримо критерій напряму (аналогічно 3.E):

$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(x)$, бо $\forall y \in X\ \exists n \in \mathbb{N}: n > \rho(x,y) \Rightarrow y \in B_n(x)$

$\forall x_1, x_2, r_1, r_2,\ \forall y \in B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)$ покладемо

$r := \min\{r_1 - \rho(y,x_1), r_2 - \rho(y,x_2)\}$. Тоді за 4.Е

$B_r(y) \subset B_{r_1-\rho(y,x_1)}(y) \subset B_{r_1}(x_1)$, і аналогічно $B_r(y) \subset B_{r_2}(x_2)$:

$B_r(y) \subset B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)$. Отже, це база. Зокрема, $B_r(x)$ відкриті.

4.20. У метричній топ. $D_r(x)$ – замкнена множина

$\forall y \in X \setminus D_r(x)$ $\rho(x,y) > r$. За 4.6 тоді $B_{-r+\rho(x,y)}(y) \subset X \setminus D_r(x)$.

Т.ч., $X \setminus D_r(x)$ відкрита $\Rightarrow D_r(x)$ замкнена.

4.21. Навести приклад відкритої $D_r(x)$.

Якщо $X = D_r(x)$ (наприклад, як підпростір $\mathbb{R}$).

У дискретній метриці.

4.22. Навести приклад замкненої $B_r(x)$

Ан-но 4.21.

4.J. Антидискретний простір X з $|X| > 1$ неметризовний.

Тобто $\nexists$ метрики ρ на X такої, що ~~дискретна~~ анти дискретна топ. – метрична для ρ.

Нехай $x, y \in X$, $x \neq y$. ↗ така ρ існує. З невиродженості,

$\rho(x,y) > 0$ і $y \notin B_{\rho(x,y)}(x)$. Тобто $B_{\rho(x,y)}(x)$ –

відкрита, $\neq X$ і $\neq \varnothing$ (бо $\exists x$), протиріччя ↯.

4.K. Скінченний простір X метризовний $\Leftrightarrow$ дискретний.

Нехай $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$.

$\Leftarrow$. Очевидно (бералo дискретну м-ку).

$\Rightarrow$. Нехай на X топологію задає метрика ρ. $\forall\, i_0 = \overline{1,n}$

$r := \min\limits_{i \neq i_0} \rho(x_{i_0}, x_i) > 0$ (з невиродженості). Оскільки

$\forall\, i \neq i_0 \quad \rho(x_{i_0}, x_i) \geq r$, $B_r(x_{i_0}) = \{x_{i_0}\}$ - відкр. Отже,

всі одноточкові множини відкриті $\Rightarrow$ топологія дискретна.

4.L. Для МП (X, ρ) відстань від точки $b \in X$ до підмножини $A \subset X$: $\rho(b, A) := \inf\{\rho(b,a) \mid a \in A\}$.

Показати, що для замкненої A $\rho(b, A) = 0 \Leftrightarrow b \in A$.

$\Leftarrow$. Оскільки $\rho(b,b) = 0$, інфімум нульовий.

$\Rightarrow$. $\nearrow$ $b \notin A$, тобто $b \in X \setminus A$. Оскільки A - замкн.,

$X \setminus A$ - відкр., тоді $\exists\, r > 0 : B_r(b) \subset X \setminus A \Rightarrow \forall\, a \in A$

$\rho(a,b) \geq r > 0$. Але тоді й інфімум $\rho(b, A) \geq r > 0$ ↯

5. AB. Розглянемо $\mathbb{R}$ як підмножину $\mathbb{R}^2$:

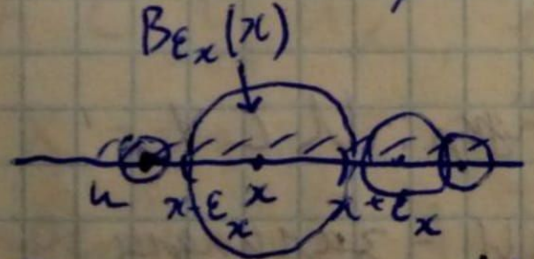
$\mathbb{R} = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.

Показати, що стандартна топ. $\mathbb{R}$ збігається з індукованою на ній стандартною топологією $\mathbb{R}^2$.

Нехай $U \subset \mathbb{R}$ належить до індукованої топології S. Тобто

$U = \mathbb{R} \cap V$, де V - відкр. в $\mathbb{R}^2$. Тоді $\forall x \in U$ $x \in V \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$: відкритий евклідів круг $B_\varepsilon(x) \subset V$. $\Rightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \mathbb{R} \cap B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \cap V = U$, тобто U - відкр. в станд. топ. T на $\mathbb{R}$: $S < T$.

Нехай тепер $U \in T$. $\forall x \in U$ $\exists\, \varepsilon_x > 0$: $(x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x) \subset U$.



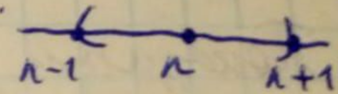
Тобто $U = \bigcup_{x \in U} (x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x)$. Покладемо $V := \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x)$ - об'єднання евкл. кругів, відкрита в $\mathbb{R}^2$,

Тоді $U = \bigcup_{x \in U} (x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x) = \bigcup_{x \in U} \mathbb{R} \cap B_{\varepsilon_x}(x) = \mathbb{R} \cap V \Rightarrow U \in S$.

Отже, $T < S$, $T = S$.

5.2. Описати індуковані топології:

1) на $\mathbb{N}$ стандартної топології $\mathbb{R}$

Дискретна $\left(\forall\ n\in\mathbb{N}\quad \{n\} = \mathbb{N}\cap(n-1, n+1)\right.$ - відкр. 

$\left.\right)$

г) На $\mathbb{N}$ топ. $\{(a,+\infty)\}$ прямої

Складається з $\varnothing$, $\mathbb{N}$ та $\{n, n+1, n+2, \ldots\}$.

3) На $\{1,2\}$ кофінітного топ. $\mathbb{R}_{T_1}$

Дискретна: $\{1\} = \{1,2\}\cap(\mathbb{R}\setminus\{2\})$, $\{2\} = \{1,2\}\cap(\mathbb{R}\setminus\{1\})$ - відкр.

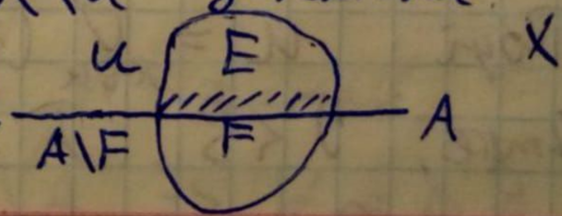
4) На $\{1,2\}$ топ. $\{(a,+\infty)\}$

$\{\varnothing, \{1,2\}, \{2\}\}$: $\{2\} = \{1,2\}\cap(1,+\infty)$ відкр., $\{1\}$ не відкр.

5.C. F замкнена у підпросторі $A\subset X \Leftrightarrow F = A\cap E$, де E - замкнена в X.

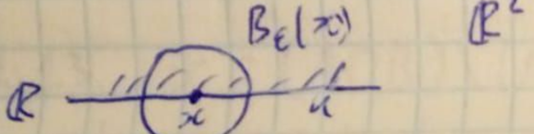
$\Rightarrow$ F - замкнена $\Rightarrow A\setminus F$ відкрита $\Rightarrow \exists$ відкр. $U\subset X$: $A\setminus F = A\cap U \Rightarrow F = A\cap(X\setminus U)$, де $E := X\setminus U$ - замкнена

$\Leftarrow$ $F = A\cap E$, де E - замкнена $\Rightarrow A\setminus F = A\cap(X\setminus E)$, де $X\setminus E$ - відкр. $\Rightarrow A\setminus F$ відкр. $\Rightarrow F$ замкн.



5.D. $U\subset\mathbb{R}^1\subset\mathbb{R}^2$ відкрита і в $\mathbb{R}^1$, і в $\mathbb{R}^2 \Rightarrow U = \varnothing$.

↯ $\exists\, x\in U$. Тоді $\exists\, \varepsilon>0$: круг $B_\varepsilon(x)\subset U\subset\mathbb{R}$ ↯.



5.E. $A \subset X$ відкр. і $U \subset A$ відкр. в A $\Rightarrow$ U відкр. в X.

$U = A \cap V$, де V відкр. в X $\Rightarrow$ U відкр. як переріз відкр.

16.10. X задовольняє II акс. зліченності $\Rightarrow$ $\forall$ бази B топології X $\exists$ $\leq$ зліченна база $\tilde{B} \subset B$.

Згадаємо теорему Ліндельофа:

X задов. II акс. зл. $\Rightarrow$ з будь-якого відкритого покриття X можна виділити $\leq$ зліченне підпокриття.

Скажемо, що $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset X$ – покриття $A \subset X$, якщо $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, відкрите, якщо всі U_α відкр. Узагальнимо Th.:

X задов. II акс. зл. $\Rightarrow$ $\forall A \subset X$ з будь-якого відкритого покриття A можна виділити $\leq$ зліченне підпокриття.

Дійсно, розглянемо на A індуковану топ. Тоді A задов. теж II акс. зл. (див. лекції). Якщо $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – відкр. покриття A, то $\{A \cap U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – його відкрите покриття як ТП. За Th, Ліндельофа, існує $\leq$ злічене підпокриття $\{A \cap U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}$.

Тоді $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}$ – $\leq$ зл. підпокриття A за підмножиною.

Отже, нехай B – деяка база X, а $C = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ – $\leq$ злічена база X. $\forall i$ U_i є об'єднанням ел-тів B: $U_i = \bigcup\limits_{\alpha \in A_i} U_{i\alpha}$. Тобто $\{U_{i\alpha}\}_{\alpha \in A_i} \subset B$ – відкр. покриття U_i. За узагальненого Th. Л., $\exists$ підпокриття $\leq$ злічене: $\{U_{i\alpha_j}\}_{j=1}^{\infty}$. Тобто $U_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} U_{i\alpha_j}$. Але тоді $\tilde{B} := \{U_{i\alpha_j}\}_{i,j} \subset B$ – теж база топології X (бо C – база, і всі ел-ти C – об'єднання ел-тів $\tilde{B}$).