Ріманова метрика

- Ю.Д. Бураго, В.А. Залгаллер. Введение в риманову геометрию.
- Ш. Кобаяси, К. Номидзу. Основы дифференциальной геометрии.

M – k-гл. многовид, $k \geq 1$, $\dim M = n$.

<u>def.</u> Рімановою метрикою на M зветься $(k-1)$-гладка симетрична 2-форма g на M ($g \in S^2(M)$) така, що $\forall p \in M$ g_p додатньо визначена. Пара (M, g) тоді зветься рімановим многовидом.

<u>Rem.</u> Тобто $\forall p$ $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ – білінійна, $g_p(v, w) = g_p(w, v)$ $\forall v, w \in T_pM$ і $g_p(v, v) > 0$ для $\forall v \neq 0$. Отже, g_p – скалярний добуток на T_pM, а g – гладке поле скалярних добутків на M. Якщо зрозуміло про яку g йдеться, говорять просто про ріманові мн. M.

<u>Rem.</u> У лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U:

$$g|_U = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = g_{ij}\, dx^i dx^j = \sum_{i=1}^{n} g_{ii} (dx^i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_{ij}\, dx^i dx^j,$$

де $g_{ij} \in C^{k-1}(U)$, $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ $\forall\, i, j = \overline{1,n}$.

Ex. 1. $\mathbb{R}^n$ зі стандартною евклідовою структурою: $\forall p \in \mathbb{R}^n$ ототожнюємо $T_p\mathbb{R}^n$ з $\mathbb{R}^n$ і покладемо для $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (у глобальних координатах $(x^1, \dots, x^n)$):

$g_p(v, w) := \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i$ (тобто координати декартові)

Тобто $g_{ij} = \delta_{ij}$ $\forall\, i, j$ глобально, і це ∞-гладка ріман. м-ка.

У подальшому цей рімановий многовид будемо позначати E^n

2. Модель Пуанкаре (у півпросторі) n-вимірного гіперболічного простору (Лобачевського): $H^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}$ з метрикою

$g := \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2$. Це ∞-гладка ріманова м-ка.

def. Нехай M і $\overline{M}$ – k-гл. многовиди, $k \geq 1$. $\varphi \in C^k(M, \overline{M})$ зветься зануренням, якщо $\forall\, p \in M$ ранк $d_p\varphi = \dim M$. Тоді пара (M, φ) зветься підмноговидом у $\overline{M}$ (k-гладким).

Rem: φ – занурення $\Leftrightarrow \forall p \in M$ $d_p\varphi$ – лін. ін'єкція $\Rightarrow \dim M \leq \dim \overline{M}$

def. Якщо $\dim M = \dim \overline{M} - 1$, підмн. (M, φ) зветься гіперповерхнею.

Rem Це узагальнення поняття підмноговиду (M, φ) у $\mathbb{R}^{n+q}$.
регулярність φ якраз і означає, що $\operatorname{rank} d_p \varphi = n = \dim M$.
Також це узагальнення регулярних кривих $\gamma : (a, b) \to M$:
$\operatorname{rank} d_t \gamma = 1 \Leftrightarrow d_t \gamma \neq 0 \Leftrightarrow \gamma'(t) \neq 0$ $(\forall\, t \in (a, b))$.

Pr. Якщо (M, φ) - підмноговид у $\overline{M}$, а $(\overline{M}, \overline{g})$ - рімановий, то
$g := \varphi^* \overline{g}$ - ріманова м-ка на M.

▷ Як і вище, вважаємо $M, \overline{M}, \varphi$ k-гладкими, $\overline{g}$ $(k-1)$-гладкою.
За властивостями кодиференціала, тоді g - $(k-1)$-гл. симетрична 2-форма на M. Згадаємо, що за **def.** $\forall p \in M\ \forall v, w \in T_pM$
$g_p(v, w) = \overline{g}_{\varphi(p)}(d_p\varphi(v), d_p\varphi(w))$ (звідси легко побачити симетричність). $\forall p \in M\ \forall\, 0 \neq v \in T_pM$ $d_p\varphi(v) \neq 0$ (бо φ - занурення $\Rightarrow d_p\varphi$ - inj) $\Rightarrow$ [$\overline{g}_{\varphi(p)} > 0$ визначена] $\Rightarrow g_p(v, v) = \overline{g}_{\varphi(p)}$
$(d_p\varphi(v), d_p\varphi(v)) > 0$, тобто g_p додатно визначена. △

def. $g = \varphi^* \bar{g}$ наз. першою фундаментальною формою (M, φ). Ще говорять, що g індукована м-цею $\bar{g}$ за допомогою φ, (M, g) звуть рімановим підмноговидом $(\bar{M}, \bar{g})$, а φ – ізометричним зануренням.

def. Занурення $\varphi: M \to \bar{M}$ звуть вкладенням, якщо φ – топологічне вкладення, тобто $\varphi: M \to \varphi(M)$ – гомеоморфізм (відн. індукованої топології на $\varphi(M)$). У цьому випадку (M, φ) наз. вкладеним підмн.

Th. (Уітні про вкладення). $\forall$ n-вимірного k-гладкого M $(k \geq 1)$ існують k-гладкі вкладення в $\mathbb{R}^{2n}$ і занурення в $\mathbb{R}^{2n-1}$

▷ Див. Постников або курс "Геометрія підмноговидів". △

Сл. $\forall$ k-гл. многовида M $(k \geq 1)$ $\exists$ ріманова м-ка на M.

▷ Візьмемо занурення $M \to \mathbb{R}^m$ та індукуємо g евкл. м-цею E^m △

Впр. Довести твердження Сл., використавши існування розбиттів одиниці замість існування занурень (див. попередню тему)

Ex.3. $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Стандартна м-ка (у подальшому за замовчуванням розглядаємо S^n з нею) - це перша фунд. форма $(S^n, i$[illegible]$)$ де i[illegible]$: S^n \to E^{n+1}$ - включення $P_{S^n} \mapsto P_{\mathbb{R}^{n+1}}$.

Впр. Перевірити, що i - вкладення.

Rem. Взагалі, якщо $\bar{M}$ - k-м. многовид і $M \subset \bar{M}$ - підмножина така, що M має структуру k-м. многовида і $i : M \to \bar{M}$ (включення) є зануренням, то (M, i) - підмноговид у $\bar{M}$ (вкладений, якщо топологія многовида M - індукована). Детальніше див. курс "Геометрія підмноговидів".

Rem. У лок. коорд. $(u^1, \dots, u^n)$ на $U \subset M$ і $(x^1, \dots, x^{n+q})$ на $V \subset \bar{M}$ $(U \cap \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset)$, якщо $g|_U = g_{ij} du^i du^j$, $\bar{g}|_V = \bar{g}_{ab} dx^a dx^b$, то з загальної ф-ли для подиференціала маємо $\forall i, j = \overline{1,n}$:

$$g_{ij}|_{U \cap \varphi^{-1}(V)} = \bar{g}_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \frac{\partial x^b}{\partial u^j}.$$

де $\frac{\partial x^a}{\partial u^i}$, $a=\overline{1,n+q}$, $i=\overline{1,n}$ — частк. похідні коорд. ф-цій лок. задання φ. Для $\overline{M}=E^{n+q}$:

$$g_{ij}|_u = \delta_{ab}\frac{\partial x^a}{\partial u^i}\frac{\partial x^b}{\partial u^j} = \sum_{a=1}^{n+q}\frac{\partial x^a}{\partial u^i}\frac{\partial x^a}{\partial u^j} = \langle \varphi_i,\varphi_j\rangle,$$

де $\varphi_i = \varphi_{u^i} = \frac{\partial x^a}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial x^a} = \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)$ (останнє позначення означає, що $\varphi_i : p\in U \mapsto d_p\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)$) — ~~введені~~ раніше лок. поля, що утворюють базис $T_p(M,\varphi) = d_p\varphi(T_pM)$ $\forall p\in U$.

<u>def.</u> Нехай $I\subset\mathbb{R}$ — проміжок. Будемо називати (неперервну) криву $\gamma: I\to M$ k-гладкою ($\gamma\in C^k(I,M)$), якщо

- $\gamma|_{\operatorname{Int} I}\in C^k(\operatorname{Int} I, M)$
- якщо ліва межа a проміжка I належить до I, то $\forall$ лок. коорд. $(x^1,\dots,x^n)$ на околі $\gamma(a)$ для лок. задання $(\gamma^1,\dots,\gamma^n)$ кривої γ у цих коорд. $\forall i=\overline{1,n}$ $\forall l=\overline{0,k}$ визначена однобічна похідна

$$(\gamma^i)^{(l)}(a+0) = \lim_{t\to a+0}(\gamma^i)^{(l)}(t).$$

— аналогічно до правої межової точки.

Впр. Перевірити, що це def. не залежить від вибору лок. коорд.

Зам. Зокрема, будемо вважати, що γ' теж визначене на I, беручи $\gamma'(a) = \gamma'(a+0) = (\gamma^i)'(a+0)\frac{\partial}{\partial x^i}$ для лівої межі і ан-но для правої. Це окремий випадок узагальнення поняття гладкості на многовиди з межею.

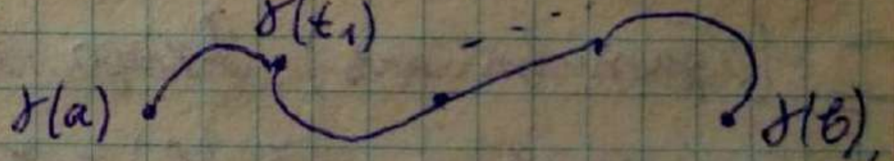
def. k-гладкі криві $\gamma \in C^k(I, M)$ і $\mu \in C^k(J, M)$ звуться еквівалентними ($\gamma \sim \mu$), якщо $\exists$ k-дифеоморфізм $\varphi : I \to J$ (тобто φ - бієкція, $\varphi \in C^k(I, J)$ і $\varphi^{-1} \in C^k(J, I)$ у сенсі, аналогічному до попереднього **def.**) такий, що $\gamma = \mu \circ \varphi$.

Впр. Це дійсно відношення еквівалентності на множині заданих на проміжках k-гладких кривих у M.

Rem. Якщо $\gamma \sim \mu$, ще говорять, що одну з цих кривих отримано з іншої заміною параметра (перепараметризацією, репараметризацією). Зокрема, далі ми будемо говорити про "єдиність кривої з точністю до заміни параметра" саме у цьому сенсі: всі криві, що задовольняють певній умові, [redacted] еквівалентні.

Впр. Якщо γ регулярна і $\gamma \sim \mu$, то μ регулярна.

def. Кусково гладким шляхом у M назвемо $\gamma \in C([a,b], M)$, якщо $\exists$ розбиття $a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = b$ таке, що $\forall i = \overline{1,n}$
$\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \in C^k([t_{i-1}, t_i], M)$



def. Довжиною кусково гладкого шляху $\gamma : [a,b] \to M$ у рімановому мн. (M, g) зветься

$$\ell(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt.$$

Rem. Ф-ція під інтегралом тут кусково $(k-1)$-гладка (її проміжки гладкості збігаються з такими для γ,

див. локальний вигляд нижче), тобто принаймні кусково неперервна, тому інтеграл існує (і дорівнює сумі інтегралів по проміжках гладкості). Якщо треба уточнити
(при цьому $\gamma'(t)$ не всюди коректно визначене, бо може бути $\gamma'(t_i-0) \neq \gamma'(t_i+0)$).
про яку метрику йдеться, писатимемо $l_g(\gamma)$.

<u>Ex.</u> У E^n це $\int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}\, dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$ – евклідова довжина шляху.
$|\cdot|$ – евкл. норма на $\mathbb{R}^n$

<u>Пр.</u> (властивості довжини шляхів).

<u>1.</u> $l(\gamma) \geq 0$ і $l(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \gamma$ – постійний (тобто $\gamma(t) = p$ $\forall t \in [a,b]$ для якоїсь $p \in M$).

<u>2.</u> (адитивність). Якщо $\gamma_1 : [a,b] \to M$ і $\gamma_2 : [b,c] \to M$ – кус. гладкі шляхи, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, то $\gamma_1 * \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b,c] \end{cases}$
визначає кус. гладкий шлях $\gamma_1 * \gamma_2 : [a,c] \to M$ і
$l(\gamma_1 * \gamma_2) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$.

<u>3.</u> (інваріантність) Нехай шляхи $\gamma \in C^k([a,b], M)$ і $\mu \in C^k([c,d], M)$ еквівалентні.

Тоді $\ell(\gamma) = \ell(\mu)$.

4. Якщо g – перша фунд. форма (M,φ) у $(\bar{M},\bar{g})$, то $\forall$ кусн. гл. шляху γ у M $\varphi\circ\gamma$ – кусн. гл. шлях у $\bar{M}$ і $\ell_g(\gamma)=\ell_{\bar{g}}(\varphi\circ\gamma)$.

1. $l(\gamma)$ — це інтеграл від невід'ємної кусково неперервної ф-ції $t \mapsto \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}$. Тому він ≥ 0 і $= 0 \iff$ ця ф-ція нульова (на кожному проміжку неперервності, отже на $[a, b]$).
З додатної визначеності g, $g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0 \Rightarrow \gamma'(t) = 0$ $\forall t$. Зі зв'язності, тоді на кожному проміжку

(бо $\forall$ лок. коорд. $\forall j=\overline{1,n}$ $(\gamma^j)'=0 \Rightarrow \gamma^j \equiv const$)

гладкості γ постійний: $\forall\, i=\overline{1,m}$ $\gamma\big|_{[t_{i-1},t_i]} = P_i$.
Оскільки γ неперервний, $P_1 = P_2 = \ldots = P_m = P$. Обернене теж, звичайно, вірне.

2. Випливає з означень і адитивності інтеграла Рімана.

3. Отже, $\exists\, \varphi : [a,b] \to [c,d]$ – k-дифео-зм: $\gamma = \mu \circ \varphi$.

Вкр. k-дифеоморфізми проміжків – це в точності k-гладкі строго монотонні зни ф-ції між ними.

Тобто тут $\varphi \in C^k([a,b],[c,d])$ і $\varphi' \neq 0$ ($\varphi'>0$ або $\varphi'<0$ на $[a,b]$). Тоді за ланцюговим правилом

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t))}\,dt = \int_a^b \sqrt{g_{\mu(\varphi(t))}(\varphi'(t)\cdot\mu'(\varphi(t)),\varphi'(t)\mu'(\varphi(t)))}\,dt = \int_a^b \sqrt{g_{\mu(\varphi(t))}(\mu'(\varphi(t)),\mu'(\varphi(t)))}\,|\varphi'(t)|\,dt \;\circleddash$$

Замінимо $\tau = \varphi(t)$, тоді $d\tau = \varphi'(t)dt = \begin{cases} |\varphi'(t)|dt, & \varphi'>0 \\ -|\varphi'(t)|dt, & \varphi'<0 \end{cases}$,

і межі інтегрування зміняться на c, d при $\varphi'>0$ і на d, c при $\varphi' < 0$, тому в будь-якому разі (згадавши також загальну формулу заміни коорд. з теми про інтегрування):

$$\textcircled{=} \int_c^d \sqrt{g_{\mu(\tau)}(\mu'(\tau), \mu'(\tau))}\, d\tau = l(\mu).$$

4. $\psi \circ \gamma \in C([a,b], \overline{M})$ залишиться кусково k-м. з тими ж проміжками гладкості, що у γ, і на кожному з них за def. $d\psi_{\gamma(t)}$:

$(\psi\circ\gamma)'(t) = d_{\gamma(t)}\psi(\gamma'(t))$ $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1,m}$ (у т.ч. на кінці). Тому

$$l_{\bar g}(\psi\circ\gamma) = \int_a^b \sqrt{\bar g_{\psi(\gamma(t))}(d_{\gamma(t)}\psi(\gamma'(t)), d_{\gamma(t)}\psi(\gamma'(t)))}\, dt = [g = \psi^* \bar g] =$$

$$= \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt = l_g(\gamma). \blacktriangle$$

Впр. Чи можна узагальнити поняття еквівалентності на кусково гладкі шляхи так, що 3. залишиться вірним?

Зам. У лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U: якщо $g|_U = g_{ij}\, dx^i dx^j$, і $\gamma : [a,b] \to U$ має лок. задання $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$, то

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))(\gamma^i)'(t)(\gamma^j)'(t)}\, dt \left(= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dots}\, dt \right).$$

def. Гладка крива $\gamma \in C^k(I, M)$ у рімановому мн. (M, g) зветься натурально параметризованою, якщо $\forall s \in I$ $g_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s)) = 1$.

Rem. Сам параметр при цьому називають натуральним (s — його традиційне позначення). Зокрема, нат. параметризовані криві регулярні. Для нат. парам. шляху $\gamma: [a, b] \to M$ маємо $l(\gamma) = b - a$.

Rem. У подальшому, якщо зрозуміло, про яку рім. м-ку йдеться, будемо позначати відповідні їй (як поле скалярних добутків) норми в точках і поле норм через $|\cdot|$. Тобто $|v| := \sqrt{g_p(v, v)}$ для $v \in T_pM$, $|X| := \sqrt{g(X, X)}$ для $X \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$ і $|X(t)| := \sqrt{g_{\gamma(t)}(X(t), X(t))}$ для поля X уздовж γ (кривої). Тоді умова натуральності параметра набуде вигляду $|\gamma'(s)| = 1$ $\forall s$ або просто $|\gamma'| = 1$.

Рп. $\forall$ регулярної кривої в рімановому многовиді $\exists$ еквівалентна їй натурально параметризована (її т. зв. натуральна (ре)параметризація).

$\triangleright$ Отже, $\gamma \in C^k(I, M)$ і $\gamma' \neq 0$. Оберемо $t_0 \in I$ і покладемо

$$s(t) := \begin{cases} \ell(\gamma|_{[t_0, t]}), & t \geq t_0 \\ -\ell(\gamma|_{[t, t_0]}), & t \leq t_0 \end{cases} = \int_{t_0}^{t} |\gamma'(\tau)|\, d\tau, \quad t \in I.$$

Тоді $s'(t) = |\gamma'(t)| > 0$ $\forall t$, тому $\psi(t) := s(t)$ задає k-дифеоморфізм $\psi : I \to \psi(I)$, $\mu := \gamma \circ \psi^{-1}$ – k-гладка (тобто $\mu \in C^k(\psi(I), M)$), $\mu \sim \gamma$ за def., і $\forall s \in \psi(I)$

$$\mu'(s) = \underset{\psi^{-1}(s)}{\gamma'(t)} \cdot \underset{(\psi^{-1})'(s)}{t'(s)} = \frac{\gamma'(\psi^{-1}(s))}{\psi'(\psi^{-1}(s))} = \frac{\gamma'(\psi^{-1}(s))}{|\gamma'(\psi^{-1}(s))|},$$ тому

$|\mu'(s)| = 1$. $\blacktriangle$

Rem. У навпаки, якщо параметр натуральний, то довжина $\ell(\gamma|_{[s_0, s]}) = s - s_0$, тобто s – довжина дуги кривої від деякої фіксованої точки з точністю до константи (і зі знаком).

Впр. $\forall$ двох нат. параметрів s і σ на γ $\sigma = C \pm s$, $C \in \mathbb{R}$.

Rem. У лок. коорд. $(x^1, \ldots, x^n)$, якщо позначити $(\gamma^i)' = \frac{dx^i}{dt}$, то з доведення вище $\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}$. Це пояснює класичне позначення рім. м-ки (першої форми) $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$.

def. Якщо гладкі криві $\gamma \in C^k(I, M)$ і $\mu \in C^k(J, M)$ у рімановому мн. (M, g) перетинаються у т. $p \in M$ (тобто для деяких $t_0 \in I$, $s_0 \in J$ $\gamma(t_0) = \mu(s_0) = p$) і регулярні у цій точці (тобто $\gamma'(t_0) \neq 0$, $\mu'(s_0) \neq 0$), то кутом між ними у p наз. кут між $\gamma'(t_0)$ і $\mu'(s_0)$ у евклідовому просторі (T_pM, g_p).

Rem. Тобто цей кут $\angle_p(\gamma, \mu) \in [0, \pi]$, і

$$\cos \angle_p(\gamma, \mu) = \frac{g_p(\gamma'(t_0), \mu'(s_0))}{\sqrt{g_p(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))} \sqrt{g_p(\mu'(s_0), \mu'(s_0))}}$$

При переході до еквівалентних кривих регулярність зберігається, модуль дотичного вектора може змінюватися; напрям — зберігається або змінюється на протилежний, тому кут зберігається або змінюється на суміжний (доповнюючий до π).

<u>def.</u> (Рімановою) формою об'єму орієнтованого ріманового мн. (M, g) зветься зовнішня n-форма dV, що $\forall$ карти $\forall$ атласа, що задає орієнтацію (тобто належить сім'ї орієнтації M) на U з лок. коорд. $(x^1, .., x^n)$ має вигляд

$$dV|_U = \sqrt{\det G}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

де $G := (g_{ij})_{i,j=1}^n$ — локальна м-ця Грама $g|_U = g_{ij} dx^i dx^j$.

<u>Rem.</u> Позначатимемо dV_g, якщо треба буде уточнити, про яку метрику g — йдеться.

<u>Pr.</u> dV — коректно визначена $(k-1)$-гл. зовнішня n-форма.

$\triangleright$ При переході до нових лок. координат $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ (що (відповідають карті з атласа тієї ж орієнтації) на $\tilde{U}$, де $g|_{\tilde{U}} = \tilde{g}_{ij}\, d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j$, за тензорним законом перетворення маємо $\underbrace{\tilde{g}_{ij}|_{U\cap\tilde{U}} = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j}}_{\forall i,j=\overline{1,n}}$, тобто для м-ці $\tilde{G} := (\tilde{g}_{ij})_{i,j=1}^n$ і для м-ці Якобі $A := \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right)_{i,j=1}^n$ відобр. переходу $\tilde{G} = A^T G A$.

Тоді $\sqrt{\det \tilde{G}} = \sqrt{\underset{\det A}{\det A^T} \det G \det A} = |\det A| \sqrt{\det G} = \det A \sqrt{\det G}$, бо обидві карти – з атласів одної орієнтації, тому $\det A > 0$.

Це якобіан відобр. переходу, тому $\sqrt{\det G}$ (коеф. біля $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$) змінюється саме так, як потрібно для коректного задання n-форми (зовнішньої). Він $(k-1)$-гладкий, бо ф-ції $g_{ij} \in C^{k-1}(U)$. $\blacktriangle$

<u>Ex.</u> В E^n глобально $G = E$ (одинична м-ця), тому $dV = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$.

<u>def.</u> Рімановим об'ємом кубовної $\mathcal{D}$ у орієнтованому рімановому мн. (M, g) зветься $\mathrm{Vol}(\mathcal{D}) := \int_{\mathcal{D}} dV$, де dV - форма об'єму g (тобто (M, g)).

<u>Rem.</u> Зокрема, $\mathrm{Vol}(\mathcal{D}) \geq 0$ (бо $\sqrt{\det G} > 0$, за побудовою інтеграл).

Для кубовних $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_m$: $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset$ при $i \neq j$ $Vol(\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{D}_i) =$
$= \sum_{i=1}^{m} Vol(\mathcal{D}_i)$ за властивостями інтеграла.

Rem. $\int_{\mathcal{D}} f\, dV$ для $f \in C^{k-1}(M)$ - аналог поверхневого інтеграла I роду з курсу аналіза (і збігається з ним, коли M - підмноговид у E^{n+q} з I фунд. формою).

Rem. $f \mapsto \int_M f\, dV$ задає невід'ємний (тобто такий, що переводить невід'ємні ф-ції у невід'ємні числа) лінійний функціонал на просторі фінітних неперервних ф-цій на хаусдорфовому лок. компактному ($\forall p \in M$ $\exists$ відкр. $U \ni p$: $\overline{U}$ компакт) M.
це так $\forall$ многовида

В силу Th. про представлення Ріса-Маркова, тоді на M $\exists!$ регулярна борелівська міра μ така, що $\int_{\mathcal{D}} f\, dV = \int_{\mathcal{D}} f\, d\mu$ $\forall f, \mathcal{D}$ (і зокрема $Vol(\mathcal{D}) = \mu(\mathcal{D})$).

Ex. Для E^n це міра Лебега.

Rem. Якщо U - відкр. підмножина ріманового мн. (M, g), то $(U, g|_U)$ – очевидно, теж рімановий мн. (також це I ф.ф. включення $i: U \hookrightarrow M$)

<u>Впр.</u> Якщо M і N – к-ні многовиди, то $\forall (p,q) \in M\times N$

$$T_{(p,q)} M\times N \simeq T_pM \oplus T_qN.$$

<u>def.</u> Нехай (M,g) і (N,h) – рімановi мн. Сумою g і h зветься рім. м-ка $g+h$ на $M\times N$: $(g+h)_{(p,q)} := g_p + h_q \ \forall (p,q)\in M\times N$.

Тобто $\forall\ v_1+w_1,\ v_2+w_2 \in T_{(p,q)}M\times N$ (який ми ототожнюємо з $T_pM\oplus T_qN$ в силу попер. <u>Впр.</u>; $v_i\in T_pM$, $w_i \in T_qN$, $i=\overline{1,2}$)

$$(g+h)_{(p,q)}(v_1+w_1,\ v_2+w_2) = g_p(v_1,v_2)+h_q(w_1,w_2).$$

<u>Впр.</u> Це дійсно рім. м-ка на $M\times N$.

<u>Ex.</u> $T^n = \underbrace{S^1\times\ldots\times S^1}_{n} = \{(e^{ix^1},\ldots,e^{ix^n})\}$ Якщо на компоненту S^1 задати $g_i := (dx^i)^2$, то їхня сума – це $(dx^1)^2+\ldots+(dx^n)^2$ – локально виглядає, як м-ка E^n!

<u>Впр.</u> Нехай (M,g) – рім. мн., у лок. коорд. $(x^1,\ldots,x^n)$ на U $g|_U = g_{ij}\,dx^i dx^j$. Як і раніше, позначимо $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$.

Оскільки $\forall\, p \in U$ g_p дод. визначена, м-ці G теж дод. визначені, зокрема невироджені. Позначимо $(g^{ij})_{i,j=1}^{n} := G^{-1}$ – коеф. оберненої м-ці, $g^{ij} \in C^{k-1}(U)$. Показати, що тоді $g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$ коректно задає (симетричне) $(k-1)$-гл. $(0,2)$-тензорне поле на M. Його іноді звуть кометрикою, що відповідає g. Як знайти значення цього поля від 1-форм α, β на M?

Далі (M,g) і (N,h) – рімановi k-гл. многовиди $(k \geq 1)$, $\dim M = \dim N = n$.

<u>def.</u> k-дифеоморфізм $F: M \to N$ зветься ізометрією (M,g) і (N,h), якщо $\forall$ кусково гл. шляху $\gamma: [a,b] \to M$ $l_g(\gamma) = l_h(F \circ \gamma)$. Якщо $\exists$ ізометрія (M,g) і (N,h), то вони звуться ізометричними.

<u>Rem.</u> γ кусково k-гл., F – k-гл. $\Rightarrow$ $F \circ \gamma$ куск. k-гл. за <u>def.</u>

<u>Впр.</u> Ізометричність – відношення екв-сті k-гл. ріманових многовидів.