Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Доля Петро Григорович
Курінний Григорій Чарльзович
Шугайло Олена Олексіївна

ВИЗНАЧНИК КВАДРАТНОЇ МАТРИЦІ

Навчально-методичний посібник з алгебри
для студентів 1-го курсу механіко-математичного факультету

Харків – 2015

Зміст

1 Попередні відомості

1.1 Матриці. Означення та окремі типи

Матрицею називають прямокутну таблицю. Елементи матриці належать певній множині M, на якій визначені дві операції — додавання та множення, що підкоряються тим же аксіомам, що і числа, які вивчались в шкільному курсі математики. Найважливіші випадки множини M – це поле дійсних чисел, поле раціональних чисел, кільце цілих чисел, кільце многочленів. Елементи множини M, уникаючи уточнень, будемо називати числами.

Приклади матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ 0 & 11 & 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ 0 & 11 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 11 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}.$$

Матриці $A, \ F$ мають по одному рядку – це матриці-рядки. Матриці $D, \ G$ мають по одному стовпчику – це матриці-стовпчики. Матриця C має однакову кількість рядків і стовпчиків (їх три) – це квадратна матриця.

Невизначені елементи матриць звичайно позначаються символами з двома індексами: перший індекс показує номер рядка, в якому стоїть елемент, а другий — номер стовпчика, в якому цей елемент стоїть. Так, якщо елемент матриці записаний у вигляді a_{23}, то цей елемент стоїть в 2 рядку і 3 стовпчику. В загальному випадку, якщо матриця A має n рядків і m стовпчиків:

$$A_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots m}} = (a_{ij})_{n\times m}.$$

Дамо декілька **визначень**.

1. Дві матриці $A = (a_{ij})_{n\times m}$ і $B = (b_{ij})_{n\times m}$ називаються *рівними*, якщо елементи на однакових місцях співпадають, тобто $A = B$, якщо $a_{ij} = b_{ij} \ \forall i, j$.

2. Якщо $n = m$, то матриця називається *квадратною порядку* n.

3. Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то таку матрицю називають *нульовою*. $O_{n\times m} = (0)_{n\times m}$. Нульова матриця може бути прямокутною, може бути квадратною.

4. У квадратній матриці елементи матриці, які стоять на перетині рядків і стовпчиків з однаковими номерами, називаються *діагональними*. Усі діагональні елементи утворюють *головну діагональ*. Якщо всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, а недіагональні дорівнюють нулю, то таку матрицю називають *одиничною* (порядку n).

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{n\times n}, \text{ де } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

5. Якщо всі недіагональні елементи квадратної матриці дорівнюють нулю, а діагональні – будь-які, то таку квадратну матрицю називають *діагональною*.

6. Якщо вище головної діагоналі всі елементи квадратної матриці дорівнють нулю, то таку матрицю називають *нижньо-трикутною*.

7. Якщо ж у матриці дорівнюють нулю всі елементи нижче головної діагоналі, то таку матрицю називають *верхньо-трикутною*.

8. Якщо рядки матриці $A_{n\times m}$ записати по стовпчиках, то одержиться нова матриця $B_{m\times n}$, яку називають *транспонованою* до A: $B = A^\top,\ b_{ij} = a_{ji}$.

9. Квадратна матриця називається *симетричною*, якщо $A = A^\top$, тобто $a_{ij} = a_{ji}$. Квадратна матриця називається *кососиметричною*, якщо $A = -A^\top$, тобто $a_{ij} = -a_{ji}$.

Приклади.

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ O_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

E_2 – одинична матриця, $O_{3\times 2}$ – нульова, D – діагональна, B – верхньо-трикутна, C – нижньо-трикутна, S – симетрична, а матриця A – кососиметрична.

1.2 Дії з матрицями

Позначимо $\mathbb{R}_{n\times m}$ – множину усіх матриць над полем $\mathbb{R}$.

1. Множення матриці A на $\lambda \in \mathbb{R}$. Будь-яку матрицю A можна помножити на елемент $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda A = B, \quad b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Після множення матриці на число ми одержуємо матрицю такого ж самого розміру. При множенні матриці на число всі її елементи множаться на це число.

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ \forall A \in \mathbb{R}_{n\times m} \quad (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ \forall A \in \mathbb{R}_{n\times m} \quad (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall A, B \in \mathbb{R}_{n\times m} \quad \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

2. Додавання матриць. Сума двох матриць визначена тільки у випадку, коли розміри доданків збігаються.

$$A + B = C, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Сума двох матриць має той же розмір, що і доданки.

- $\forall A, B \in \mathbb{R}_{n\times m} \quad A + B = B + A$
- $\forall A, B, C \in \mathbb{R}_{n\times m} \quad (A+B)+C = A+(B+C)$
- $\exists O \in \mathbb{R}_{n\times m}\ \forall A \in \mathbb{R}_{n\times m} \quad A + O = O + A = A$

3. Множення матриць. Якщо кількість стовпчиків у матриці A (тобто довжина рядка) дорівнює кількості рядків у матриці B (тобто довжині стовпчика), тоді визначений добуток AB. Якщо $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$, то $AB = C = (c_{ij})_{m\times p}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Приклад. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

добутком AB буде матриця

$$AB = \begin{pmatrix} -2-6-3 & 2+0+15 \\ +2+0-4 & -2+0+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 17 \\ -2 & 18 \end{pmatrix}.$$

Добутком BA цих матриць буде

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2 & -4+0 & -6+8 \\ -3+0 & -6+0 & -9+0 \\ -1-5 & -2+0 & -3+20 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ -3 & -6 & -9 \\ -6 & -2 & 17 \end{pmatrix}$$

- В загальному випадку $AB \neq BA$, навіть якщо обидві матриці квадратні одного розміру (n>1)
- $\forall A \in \mathbb{R}_{m\times n},\ B \in \mathbb{R}_{n\times p},\ C \in \mathbb{R}_{p\times r} \quad (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$
- $\forall A, B, C \in \mathbb{R}_{n\times n} \quad A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall A \in \mathbb{R}_{m\times n},\ B \in \mathbb{R}_{n\times p} \quad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- $\forall A \in \mathbb{R}_{m\times n} \quad A\cdot E_n = A, \quad E_m \cdot A = A$

4. Транспонування матриці. Будь-яку матрицю можна транспонувати:

$$A \mapsto A^\top = B, \quad b_{ij} = a_{ji}.$$

- $\forall A \in \mathbb{R}_{m\times n} \quad (A^\top)^\top = A$
- $\forall A, B \in \mathbb{R}_{m\times n} \quad (A+B)^\top = A^\top + B^\top$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall A \in \mathbb{R}_{m\times n} \quad (\lambda A)^\top = \lambda A^\top$
- $\forall A \in \mathbb{R}_{m\times n},\ B \in \mathbb{R}_{n\times p} \quad (AB)^\top = B^\top A^\top$

1.3 Обернена матриця

Для деяких квадратних матриць існує обернена матриця.

Визначення 1.1 *Матриця B називається оберненою до матриці A, якщо виконуються дві рівності $AB = BA = E$, де E – одинична матриця. Обернена до A матриця позначається через A^{-1}.*

Матриця, яка має обернену, називається оборотною.

Для прикладу візьмемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 7 \end{pmatrix},$$

Оскільки $AB = BA = E$ (перевірте самостійно), то матриця B обернена до A, а матриця A є оберненою до B.

Якщо обернена матриця існує, то вона єдина.

Добуток оборотних матриць є оборотною матрицею.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

1.4 Лінійний простір

Визначення 1.2 *Непорожня множина V називається* дійсним лінійним (або векторним) простором *(а її елементи векторами), якщо на ній задана операція додавання елементів (кожним $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ставиться у відповідність вектор $\vec{a} + \vec{b} \in V$), а також операція множення елементів із V на дійсні числа (кожному вектору $\vec{a} \in V$ і кожному $\lambda \in \mathbb{R}$ ставиться у відповідність вектор $\lambda\vec{a} \in V$). Крім того, виконуються наступні аксіоми:*

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (комутативність);

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (асоціативність);

3) існує вектор $\vec{0} \in V$ такий, що для кожного $\vec{a} \in V$ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$;

4) для кожного $\vec{a} \in V$ існує $-\vec{a} \in V$ такий, що $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;

5) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;

6) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

7) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

для будь-яких дійсних λ, μ та будь-яких $\vec{a}, \vec{b} \in V$.

Приклади.

1. Множина дійсних матриць $\mathbb{R}_{n\times m}$ є дійсним лінійним простором.

2. Геометричні вектори, відкладені від однієї точки, утворюють лінійний (векторний) простір.

3. Рядки $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, що складаються з чисел, можна, як і матриці розміру 1 на n, додавати

$$\bar{a}' + \bar{a}'' = (a_1', a_2', \ldots, a_n') + (a_1'', a_2'', \ldots, a_n'') = (a_1' + a_1'', a_2' + a_2'', \ldots, a_n' + a_n''),$$

множити на число λ:

$$\lambda\bar{a} = \lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n),$$

і, відповідно, створювати лінійні комбінації рядків:

$$\lambda\bar{a}' + \mu\bar{a}'' = \lambda(a_1', a_2', \ldots, a_n') + \mu(a_1'', a_2'', \ldots, a_n'') = (\lambda a_1' + \mu a_1'', \lambda a_2' + \mu a_2'', \ldots, \lambda a_n' + \mu a_n'').$$

Тобто рядки $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $a_i \in \mathbb{R}$ утворюють лінійний простір.

1.5 Функціонали

Визначення 1.3 *Відображення $f : V \to \mathbb{R}$, яке ставить у відповідність кожному вектору $\bar{a} \in V$ число $f(\bar{a})$ із $\mathbb{R}$ називається функціоналом.*

Функціонал $f(\bar{a})$ називається адитивним, якщо для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$

$$f(\bar{a} + \bar{b}) = f(\bar{a}) + f(\bar{b}).$$

Функціонал називається однорідним, якщо для будь-якого вектора $\bar{a}$ і для будь-якого числа λ можна написати

$$f(\lambda\bar{a}) = \lambda f(\bar{a}).$$

Якщо функціонал і адитивний і однорідний, то його називають лінійним. Можна сказати, що фунціонал лінійний, якщо для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ та чисел λ, μ виконується рівність

$$f(\lambda\bar{a} + \mu\bar{b}) = \lambda f(\bar{a}) + \mu f(\bar{b}). \tag{1}$$

Функціонал від n змінних — це відображення $f : \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{n} \to \mathbb{R}$, яке ставить n векторам $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ у відповідність число $f(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n)$.

Якщо цей функціонал є лінійним по кожній із своїх змінних, то він називається *полілінійним.*

Якщо поміняти місцями будь-які дві змінні і значення функціоналу не зміниться, то функціонал називається *симетричним.*

Якщо поміняти місцями будь-які дві змінні і значення функціоналу поміняє знак на протилежний, то функціонал називається *кососиметричним.*

Бувають функціонали симетричні по одному набору змінних, та кососиметричні по іншому набору змінних.

2 Визначення та властивості визначників

Визначник ставить у відповідність кожній квадратній матриці над певним кільцем один елемент із цього кільця. Отже визначник матриці з цілими елементами є ціле число, визначник матриці, елементами якої є многочлени є многочлен. Далі замість *елемент кільця, над яким визначена матриця* говоримо коротше – *число.*

Порожні матриці, тобто матриці, в яких немає ні рядків ні стовпчиків, не розглядаються. А матриці, що мають лише один стовпчик і один рядок, розглядаються. Тому, коли говоримо про квадратні матрицю розміру $n \times n$, то мається на увазі, що $1 \leq n < \infty, \quad n \in \mathbb{N}$.

Якщо маємо матрицю $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ розміру $n \times n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

то визначник d цієї матриці позначається одним із двох способів: або $d = \det A$, або

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Визначник від матриці A з рядками $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ можна розглядати як функціонал від рядків і писати

$$\det A = \det(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n).$$

Визначник матриці $A_{1\times 1} = (a)$, є тим числом, з якого складається матриця:

$$\det(a) = a. \tag{2}$$

Отже, якщо матриця має вигляд $A = (7)$, то $\det(7) = 7$. Відповідно, $\det(0) = 0,\ \det(-3) = -3,\ \det(2x-6) = 2x-6$.

Визначник матриці $A_{2\times 2}$ підраховується за формулою

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc. \tag{3}$$

Приклади. Згідно з цією формулою

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 12 = -12, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

Коли працюють з визначниками, то використовують не коректне, але дуже зручне скорочення — замість словосполучення *елемент матриці, від якої підраховується визначник* кажуть *елемент визначника*, замість *рядок матриці, від якої підраховується визначник* кажуть *рядок визначника* та подібні.

Термін *детермінант* є повним синонімом терміну *визначник*. Мовний смак підкаже, в якому мовному оточенні зручніше вживати *визначник*, а в якому *детермінант*.

2.1 Мінори

Визначення 2.1 *У матриці $A_{n\times m}$ вибрали r рядків $i_1,\ i_2, \dots, i_r$ та r стовпчиків $j_1,\ j_2, \dots, j_r$. На перетині цих r рядків та r стовпчиків одержиться квадратна матриця r-го порядку. Визначник цієї матриці називають мінором r-го порядку і позначають $M^{i_1,i_2,\dots,i_r}_{j_1,j_2,\dots,j_r}$.*

Якщо матриця A квадратна порядку n, тоді

Визначення 2.2 *Доповнювальним мінором до мінору r-го порядку називається визначник матриці, отриманої при викреслюванні вибраних r рядків і r стовпчиків, тобто визначник $(n-r)$-го порядку, позначається він $\bar{M}^{i_1,i_2,\ldots,i_r}_{j_1,j_2,\ldots,j_r}$.*

Визначення 2.3 $A^{i_1,i_2,\ldots,i_r}_{j_1,j_2,\ldots,j_r} = (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{r} i_k + \sum\limits_{k=1}^{r} j_k} \bar{M}^{i_1,i_2,\ldots,i_r}_{j_1,j_2,\ldots,j_r}$ *називають алгебричним доповненням мінору $M^{i_1,i_2,\ldots,i_r}_{j_1,j_2,\ldots,j_r}$.*

Отже, коли йдеться про мінор M^{13}_{35}, то мова йде про визначник матриці, що стоїть на перетині двох рядків — першого та третього, і двох стовпчиків — третього та п'ятого. Для матриці

$$A_{5\times 5} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

можна записати

$$M^{13}_{35} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{15} \\ a_{33} & a_{35} \end{vmatrix}, \ \bar{M}^{13}_{35} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}, \ A^{13}_{35} = (-1)^{1+3+3+5} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}.$$

Якщо вибрали тільки один рядок (i-й) та один стовпчик (j-й), тоді мінор співпадає з елементом a_{ij}.

$$M^i_j = a_{ij} = M_{ij}$$

В цьому випадку індекси ставимо внизу, віддаючи данину традиції.

2.2 Означення розкладанням за елементами першого рядка

Це означення вимагає лише знання повної математичної індукції. Вважаємо, що повна математична індукція певним чином відома. А ті, хто з нею не зустрічався, повинні самостійно з нею ознайомитися (див. [1]). Повна математична індукція зустрічається чи прямо чи опосередковано на кожному кроці роботи математика.

Визначення 2.4 *Визначник матриці порядку 3 і вище є сумою добутків елементів першого стовпчика на їх алгебричні доповнення, тобто*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} A_{1i} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} \bar{M}_{1i}. \tag{4}$$

Визначник матриці 1-го і 2-го порядку визначається формулами (2), (3).

Обчислимо, користуючись лише визначенням, визначник матриці 3-го порядку.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{23} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Визначення 2.5 *Правило обчислення визначника третього порядку за формулою (5)*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (5)$$

називають правилом Саррюса або правилом трикутничків.

Остання назва пов'язана із геометричним способом запам'ятовування всіх дев'яти доданків в цій формулі (див рис.1, 2)

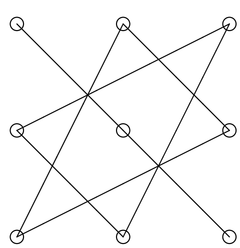

Рис. 1: Добуток елементів головної діагоналі береться із знаком +, також із знаком + беруться добутки елементів, що стоять у вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі

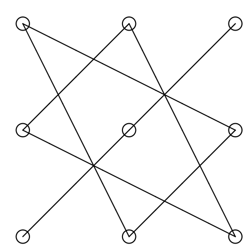

Рис. 2: Добуток елементів бічної діагоналі береться із знаком -, також із знаком - беруться добутки елементів, що стоять у вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна бічній діагоналі

Приклад. Обчислимо, використовуючи означення, визначник 5-го порядку

$$d = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

За формулою (4) маємо (нульові доданки не виписуємо)

$$d = -3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 30\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 210.$$

Обчислюючи за означенням визначник одиничної матриці для одиничних матриць розміру 1,2,3. ... бачимо, що він дорівнює одиниці. Для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ це твердження:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

доводиться методом індукції.

Використовуючи лише означення, методом індукції доводиться, що *визначник матриці, яка має нульовий рядок або нульовий стовпчик, дорівнює нулю.* Зокрема, визначник нульової матриці дорівнює нулю. Також методом індукції перевіряється, що визначник верхньо-трикутньої матриці (під головною діагоналлю стоять нулі) та нижньо-трикутної матриці (над головною діагоналлю стоять нулі) дорівнює добутку діагональних елементів.

2.3 Антисиметричність визначника

Спочатку пояснимо, що таке антисиметричність визначника.

Нехай є матриця A, в цій матриці поміняли місцями два рядки і одержали матрицю B. Тоді

$$\det A = -\det B. \tag{6}$$

Визначення 2.6 *Коли говорять про антисиметричність визначника, то мають на увазі формулу (6).*

Теорема 2.1 *Визначник є антисиметричним функціоналом від своїх рядків.*

Доведення. Нехай в матриці $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ поміняли місцями рядки з номерами i, j $(1 \leq i < j \leq n)$ і таким чином одержали матрицю B. Доведемо рівність (6). Доведення проводимо методом індукції.

База індукції: переконуємося в тому, що коли в матриці розміру 2×2 поміняти місцями рядки, то визначник нової матриці буде відрізнятися від визначника старої матриці знаком (лише знаком). Справді, користуючись формулою (3) маємо

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = -\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12}\end{pmatrix}.$$

Індуктивне припущення: якщо $n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3$ і матриця має $n-1$ рядків, то переставляння двох рядків цієї матриці призводить до зміни знаку відповідного визначника на протилежний.

Індуктивний перехід полягає в доведенні (6) у випадку, коли матриця A має n рядків ($n \geq 2$). За умовою, для елемента b_{pq} матриці B, який стоїть на перетині $p-$го рядка і $q-$го стовпчика, ми можемо написати

$$b_{pq} = \begin{cases} a_{pq}, & \text{якщо } p \notin \{i,j\}, \\ a_{jq}, & \text{якщо } p = i, \\ a_{iq}, & \text{якщо } p = j. \end{cases}$$

Доповнювальний мінор, який одержується після викреслювання в матриці A рядків з номерами r, s та стовпчиків з номерами p, q будемо, як і раніше, позначати через $\bar{M}_{rs}^{pq}$, а мінор, який одержується після викреслювання в матриці B рядків з номерами r, s та стовпчиків з номерами p, q будемо позначати через $\bar{N}_{rs}^{pq}$.

За означенням ми можемо написати

$$\det A = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} a_{1p} \bar{M}_{1p}, \quad \det B = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} b_{1p} \bar{N}_{1p}.$$

Розглянемо три випадки: $i > 1$; $i = 1, j = 2$; $i = 1, j > 2$.

В першому випадку $b_{1p} = a_{1p}$, і за індуктивним припущенням $M_{1p} = -N_{1p}$. Тому $\det A = -\det B$.

В другому випадку розкладемо мінори $\bar{M}_{1p}$, $\bar{N}_{1p}$ за елементами першого рядка:

$$\bar{M}_{1p} = \sum_{1 \leq q < p \leq n} (-1)^{q+1} a_{2q} \bar{M}_{pq}^{12} + \sum_{1 \leq p < q \leq n} (-1)^{q} a_{2q} \bar{M}_{pq}^{12},$$

$$\bar{N}_{1p} = \sum_{1 \leq q < p \leq n} (-1)^{q+1} b_{2q} \bar{N}_{pq}^{12} + \sum_{1 \leq p < q \leq n} (-1)^{q} b_{2q} \bar{N}_{pq}^{12},$$

Оскільки всі рядки починаючи з третього в матрицях A, B однакові, то при будь-яких $p \neq q$ можна написати

$$\bar{M}_{pq}^{12} = \bar{N}_{pq}^{12}.$$

А оскільки ми поміняли місцями перший і другий рядки, то

$$b_{1p} = a_{2p}, \quad b_{2q} = a_{1q}.$$

Тепер ми можемо записати

$$\det A = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}a_{1,p}\sum_{1\le q<p\le n}(-1)^{q+1}a_{2q}\bar{M}_{pq}^{12}+\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}a_{1,p}\sum_{1\le p<q\le n}(-1)^{q}a_{2q}\bar{M}_{pq}^{12} \tag{7}$$

$$\det B = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}a_{2,p}\sum_{1\le q<p\le n}(-1)^{q+1}a_{1q}\bar{M}_{pq}^{12}+\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}a_{2,p}\sum_{1\le p<q\le n}(-1)^{q}a_{1q}\bar{M}_{pq}^{12}. \tag{8}$$

Виписуючи доданки в (7), (8), які містять добуток $a_{1r}a_{2s}$, бачимо, що при при $r > s$ в (7) це буде

$$(-1)^{r+s+2}a_{1r}a_{2s}\bar{M}_{rs}^{12},$$

а в (8) це буде

$$(-1)^{r+s+1}a_{1r}a_{2s}\bar{M}_{rs}^{12}.$$

При $r < s$ в (7) це буде

$$(-1)^{r+s+1}a_{1r}a_{2s}\bar{M}_{rs}^{12},$$

а в (8) це буде

$$(-1)^{r+s+2}a_{1r}a_{2s}\bar{M}_{rs}^{12}.$$

Звідси випливає, що $\det A = -\det B$.

В третьому випадку, коли міняються місцями 1-й рядок і рядок з номером $j > 2$, будуємо дві допоміжні матриці B_1, B_2. B_1 одержуємо із матриці A помінявши місцями 2-й та j-й рядки, B_2 одержуємо помінявши в матриці B_1 перший та другий рядки. Таким чином, в матриці B_2 на місці j-го рядка стоїть другий рядок матриці A, на місці другого рядка стоїть перший рядок матриці A, а на місці першого рядка стоїться j-й рядок матриці A. Отже, матрицю B ми одержимо, помінявши місцями 2-й та j-й рядки матриці B_2. За уже доведеним маємо

$$\det A = -\det B_1 = \det B_2 = -\det B.$$

Доведення антисиметричності визначника завершене.

■

Наслідком антисиметричності є

Наслідок 2.1 *Визначник матриці, яка має два однакові рядки, дорівнює нулю.*

Справді, якщо поміняти місцями однакові рядки, то визначник з одного боку не зміниться а з іншого – змінить знак на протилежний. Числом, яке дорівнює своєму протилежному, є лише нуль.

Теорема 2.2 *Визначник матриці A розміру $n\times n$ можна обчислити, розкладаючи за елементам будь-якого рядка. Остання словосполука означає, що коли* *вибраний k-й рядок, $1 \le k \le n$, то визначник матриці A можна обчислювати за формулою*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} A_{ki} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ki} \bar{M}_{ki}. \tag{9}$$

Доведення. Поставимо k-й рядок на перше місце, зберігши порядок на решті рядків. Для цього k-й рядок поміняємо місцями з $(k-1)$-м, $(k-2)$-м, $(k-3)$-м, і т.д. нарешті з першим. Знак визначника при цьому змінився $k-1$ раз. Одержаний визначник обчислюємо за означенням. Викреслюючи перший рядок в новій матриці ми одержуємо той же результат, що і після викреслювання k-го рядка в заданій матриці. Таким чином одержуємо

$$\det A = (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{ki} \bar{M}_{ki} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ki} \bar{M}_{ki}$$

■

Узагальненням цього результату є теорема Лапласа, яку ми наводимо без доведення.

Теорема 2.3 (Теорема Лапласа) *У матриці $A_{n\times n}$ вибрали r рядків з номерами $i_1,\ i_2, \dots, i_r$, тоді*

$$\det A = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_r \le n} M^{i_1, i_2, \dots, i_r}_{j_1, j_2, \dots, j_r} \cdot A^{i_1, i_2, \dots, i_r}_{j_1, j_2, \dots, j_r}.$$

Приклад. Обчислимо за теоремою Лапласа визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Зафіксуємо другій та четвертий рядки.

$$\det A = M^{2,4}_{1,2} \cdot A^{2,4}_{1,2} + M^{2,4}_{1,3} \cdot A^{2,4}_{1,3} + M^{2,4}_{1,4} \cdot A^{2,4}_{1,4} + M^{2,4}_{2,3} \cdot A^{2,4}_{2,3} + M^{2,4}_{2,4} \cdot A^{2,4}_{2,4} + M^{2,4}_{3,4} \cdot A^{2,4}_{3,4}.$$

Ненульовим буде тільки мінор $M^{2,4}_{1,4}$, отже

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) \cdot (-2) = 10.$$

2.4 Визначник матриці-підстановки

Визначення 2.7 *Бієктивні відображення скінченних множин у себе називають підстановками.*

Оскільки елементи скінченної множини можна перенумерувати натуральними числами починаючи з одиниці, то можна вважати із самого початку, що скінченна множина – це $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ для деякого натурального $n \geq 1$.

Підстановки, як бієктивні відображення, можна множити, існує одинична підстановка id, яка переводить кожен елемент в себе, кожна підстановка має обернену підстановку. Отже всі підстановки на заданій множині утворюють групу. Її називають симетричною групою. Більш уважно з підстановками можна ознайомитися за [4], [6].

Підстановки на n-елементній множині (або n-елементної множини) звичайно задають таблично, у два рядки: у верхньому рядку виписують прообрази, а в нижньому образи. Отже ми пишемо

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

замість $\sigma(1) = i_1,\ \sigma(2) = i_2,\ \sigma(3) = i_3, \dots, \sigma(n) = i_n$. Якщо прийняти домовленість про те, що числа у верхньому рядку пишуться у стандартному порядку, то верхній рядок стає зайвим і підстановку задають одним нижнім рядком. Запис елементів множини у певному лінійному порядку (один за другим) називають перестановкою. Отже підстановку можна задати перестановкою чисел $1, 2, \dots, n$.

За кожною підстановкою σ будується матриця A_σ, в якій на перетині k-го рядка і $\sigma(k)$-го стовпчика стоїть одиниця, а решта елементів – нулі. Так, коли маємо підстановки

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

то їм відповідають матриці

$$A_\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці-підстановки дорівнює або $+1$ або -1, формально це можна довести методом повної математичної індукції.

Визначення 2.8 *Визначник матриці підстановки A_σ, що відповідає підстановці σ називається сигнатурою підстановки і позначається $sign(\sigma)$ (від ла-*

тинського слова signum, яке означає "знак"). Якщо визначник матриці-підстановки дорівнює $+1$, то кажемо, що підстановка парна, якщо ж визначник дорівнює -1, то кажемо, що підстановка непарна.

Так для підстановок ρ, σ, τ, що задані (10), буде

$\mathrm{sign}(\rho) = \det A_\rho = 1$, і підстановка ρ парна;

$\mathrm{sign}(\sigma) = \det A_\sigma = 1$, і підстановка σ парна;

$\mathrm{sign}(\tau) = \det A_\tau = -1$, і підстановка τ непарна.

2.5 Інверсії і транспозиції. Умови парності підстановки.

Визначник матриці-підстановки можна підрахувати, переставляючи в ній рядки. Міркування супроводимо прикладом, припустимо, що ми хочемо підрахувати визначник матриці

$$A_\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Поміняємо місцями два рядки так, щоб першим елементом першого стовпчика стояла одиниця. В нашому прикладі потрібно поміняти місцями перший і четвертий рядки. Одержимо нову матрицю-підстановку

$$A_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Нова, друга підстановка одержується із першої підстановки, переставлянням двох елементів — в нашому прикладі тих, що стоять під 1 і під 4 (тобто 3 і 1). Використовуючи добуток відображень ми можемо записати (нагадаємо, що в добутку відображень першим діє те, що стоїть справа)

$$\sigma = \rho \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Далі поміняємо місцями два рядки так, щоб другим елементом другого рядка стала одиниця — в нашому прикладі нічого робити не треба, оскільки там уже стоїть одиниця.

Таким чином далі ми забезпечуємо одиниці по головній діагоналі, переставляючи рядки і, відповідно, домножаючи підстановку справа на підстановку, що міняє місцями два елементи, а решту лишає на місці. Такі підстановки називають транспозиціями. В решті решт одержимо одиничну матриці, визначником якої є одиниця.

В нашому прикладі від A_σ переходимо до

$$A_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Помінявши місцями 5 та 6-ий рядки матриці A_τ одержуємо одиничну матрицю. Одиничну матрицю ми одержали переставляючи 3 рази рядки, отже тричі змінюючи знак. Звідси випливає, що $\det A_\rho = -1$ і, відповідно, $\operatorname{sign}(\rho) = -1$.

В загальному випадку підстановка буде парною, якщо ми міняли місцями рядки парну кількість разів, і непарною в протилежному впадку.

Використовуючи транспозиції можна сказати, що підстановка буде парною, якщо домноживши її на парну кількість транспозицій ми одержимо тотожне відображення, або, як кажуть, одиничну підстановку.

Зауважимо, що кожна транспозиція помножена сама на себе дасть одиничну підстановку – id, тобто підстановку, що переводить кожен елемент в себе. Звідси випливає, що коли для підстановки ρ і транспозицій $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ виконується рівність

$$\rho \cdot (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k) = \mathrm{id}\,,$$

то

$$\rho = \alpha_k \alpha_{k-1} \ldots \alpha_1,$$
$$\rho^{-1} = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k.$$

Сказаним обґрунтовуються дві тези:

- підстановка парна тоді і тільки тоді, коли її можна розкласти в добуток парної кількості транспозицій;
- підстановка парна тоді і тільки тоді, коли обернена до неї підстановка парна.

Ще одним способом обчислення парності підстановки є використання так званих інверсій в перестановці.

Визначення 2.9 *Розташування чисел в певну послідовність називають перестановкою. Два елементи $i > k$ утворюють інверсію в перестановці σ, якщо більший елемент стоїть раніше меншого.*

Приклад. Нехай задана підстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ця підстановка має 10 інверсій $\{3,1\}$, $\{3,2\}$, $\{2,1\}$, $\{5,1\}$, $\{5,4\}$, $\{7,6\}$, $\{7,1\}$, $\{7,4\}$, $\{6,1\}$, $\{6,4\}$.

Теорема 2.4 *Коли в перестановці поміняти місцями два елементи, то парність кількості інверсій зміниться — якщо кількість була парною, то стане непарною, а коли була непарною, то стане парною.*

Доведення. Нехай $(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n)$ певна перестановка. Поміняємо в ній місцями елементи $i_p,\ i_q,\quad p < q$. Всі пари $\{i_x, i_y\},\ x < y$ розіб'ємо на кілька груп.

До першої групи віднесемо ті пари, в яких один із елементів стоїть до i_p, тобто $x < p$, або один із елементів стоїть після i_q, тобто $q < y$, або обидва елементи стоять між i_p і i_q, тобто $p < x < y < q$. Якщо одна пара із цієї групи утворювала інверсію в старій перестановці, то вона знову буде утворювати інверсію в новій перестановці, а якщо не утворювала, то і утворювати не буде. Отже ці пари брати до уваги не будемо.

До другої групи віднесемо пари $\{i_p,\ i_y\},\quad p < y < q$, нехай із них n_1 пара утворює інверсію, а n_2 пари не утворюють, $n_1 + n_2 = q - p - 1$.

До третьої групи віднесемо $\{i_x,\ i_q\},\quad p < x < q$, нехай із них m_1 пара утворює інверсію, а m_2 пари не утворюють, $m_1 + m_2 = q - p - 1$.

Четверта група складається із однієї пари $\{i_p,\ i_q\}$.

Прослідкуємо за зміною кількості інверсій в парах із другої, третьої та четвертої груп.

Всі пари із другої та третьої групи, що утворювали інверсію, перестали її утворювати, а ті пари, що не утворювали, стали утворювати. Отже кількість інверсій була в цих двох групах $a = m_1 + n_1$, а стала $b = m_2 + n_2$. Оскільки

$$a + b = m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 2(q - p - 1),$$

то парність чисел a і b одна і та ж.

Якщо пара $\{i_p,\ i_q\}$ утворювала інверсію, то після переставляння перестала утворювати, а якщо не утворювала, то після переставляння буде утворювати інверсію. От оця інверсія, додана чи відкинута, і змінить парність кількості інверсій.

Теорему доведено.

■

Наслідком доведеної властивості інверсій буде те, що знаючи кількість інверсій можна сказати, парна підстановка чи ні:

Наслідок 2.2 *Підстановка парна тоді і тільки тоді, коли в стандартному записі двома рядками, нижня перестановка має парну кількість інверсій.*

2.6 Полілінійність визначника

Визначник є функціоналом від стількох змінних, скільки рядків в матриці, і він має важливу властивість

Теорема 2.5 *Визначник є лінійним функціоналом по кожному рядку.*

Замість слів *лінійний по кожній змінній* вживають термін *полілінійний.*

Доведення. Спочатку доведемо лінійність за першим аргументом.

Припустимо, що перший рядок $\bar{a}_1$ є лінійною комбінацією певних двох рядків $\bar{a}'_1,\ \bar{a}''_1$

$$\bar{a}_1 = \lambda\bar{a}'_1 + \mu\bar{a}''_1.$$

Тоді

$$\det(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{1i}\bar{M}_{1i} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(\lambda a'_{1i} + \mu a''_{1i})\bar{M}_{1i} =$$

$$= \lambda\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a'_{1i}\bar{M}_{1i} + \mu\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a''_{1i}\bar{M}_{1i} =$$

$$= \lambda\det(\bar{a}'_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n) + \mu\det(\bar{a}''_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n).$$

Лінійність визначника по першому аргументу доведена.

Щоб переконатися в лінійності визначника за будь-яким іншим аргументом, потрібно рядок з відповідним номером поміняти місцями з першим (визначник змінить знак на протилежний), скористатися лінійністю за першим аргументом, а потім поставити рядок на своє місце (знак визначника відновиться).

Отже, полілінійність визначника доведено.

■

2.7 Елементарні перетворення рядків матриці. Обчислення визначника методом Гауса

Є три типи елементарних перетворень рядків матриці:

- переставляння двох рядків;
- множення рядка на ненульове число;
- додавання до одного рядка іншого, помноженого на будь-яке число.

Відмітимо, як зміниться визначник матриці, якщо до її рядків застосоване одне із елементарних перетворень.

Теорема 2.6 *Якщо два рядки заданої матриці поміняти місцями, то визначник одержаної матриці буде відрізнятися від визначника заданої матриці лише знаком:*

$$\det(\ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_j, \ldots) = -\det(\ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_j, \ldots). \tag{11}$$

Якщо рядок матриці помножити на число, то визначник помножиться на це число, тобто

$$\det(\ldots, \lambda\bar{a}_i, \ldots) = \lambda \det(\ldots, \bar{a}_i, \ldots). \tag{12}$$

Якщо до одного рядка матриці додати будь-який інший, помножений на будь-яке число, то визначник матриці не зміниться, тобто

$$\det(\ldots, \bar{a}_i + \lambda\bar{a}_j, \ldots, \bar{a}_j, \ldots) = \det(\ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_j, \ldots). \tag{13}$$

Доведення. Властивість (11) означає антисиметричність, яка вже доведена. Властивість (12) означає однорідність, яка є складовою частиною лінійності, і теж вже доведена.

Лишилося перевірити виконання (13). Для цього скористаємося адитивністю і однорідністю визначника за кожним рядком:

$$\det(\ldots, \bar{a}_i + \lambda\bar{a}_j, \ldots, \bar{a}_j, \ldots) = \det(\ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_j, \ldots) + \det(\ldots, \lambda\bar{a}_j, \ldots, \bar{a}_j, \ldots) =$$

$$= \det(\ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_j, \ldots) + \lambda \det(\ldots, \bar{a}_j, \ldots, \bar{a}_j, \ldots).$$

І завершимо доведення посиланням на те, що визначник $\det(\ldots, \bar{a}_j, \ldots, \bar{a}_j, \ldots)$ з двома однаковими рядками дорівнює нулю.

■

Метод Гауса обчислення визначників полягає в тому, що елементарними перетвореннями рядків матриця проводиться до верхньо-трикутного вигляду, чи до вигляду, де матриця має нульовий рядок. В першому випадку визначник одержаної матриці дорівнює добутку діагональних елементів, а в другому — нулю. Прослідкувавши, як змінювався детермінант матриць під час елементарних перетворень, знаходимо визначник матриці.

Приклад. Нехай потрібно обчислити $\det A$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Віднімаючи від другого рядка перший, помножений на 3, віднімаючи від третього рядка перший, помножений на 2 і додаючи до четвертого рядка перший, помножений на (-3) (тобто віднімаючи перший, помножений на 3), одержуємо матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & -16 & -17 & -6 \\ 0 & -4 & -4 & -3 \\ 0 & 15 & 15 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \det A = \det A_1.$$

В матриці A_1 від другого рядка віднімемо третій, помножений на 4, а до четвертого додамо третій помножений на 4. Одержимо матрицю A_2:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \det A_2 = \det A_1.$$

Якщо від третього рядка матриці A_2 відняти четвертий, помножений на 4, то одержимо матрицю A_3:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \det A_2 = \det A_3.$$

Переставимо тепер в матриці A_3 рядки, спочатку поміняємо другий рядок з четвертим, а потім четвертий з третім. Одержимо матрицю

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки ми двічі поміняли рядки місцями і, відповідно, двічі змінили знак визначника, то визначник не змінився. Отже

$$\det A_3 = \det A_2.$$

Матриця A_3 верхньо-трикутна, тому її визначник дорівнює добутку діагональних елементів, тобто 1. Звідси одержуємо

$$\det A = 1.$$

Для числових матриць відомого розміру метод Гауса формалізований, його можна розглядати як чіткий алгоритм, в якому можна обійтися без вгадувань, здогадок та подібного. Однак визначник матриці, елементами якої є певні вирази (многочлени, дроби,...) і розмір матриці є параметром задачі, скажемо n, тоді формалізований метод не працює. Але приведення матриці до верхньо-трикутного чи до нижньо-трикутного виду елементарними перетвореннями рядків можливе.

Приклад. Нехай потрібно обчислити визначник, який має n рядків і n стовпчиків:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Віднімаючи перший рядок від решти рядків ми одержимо верхньо-трикутну матрицю з тим же визначником:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

2.8 Явна формула для обчислення визначника

Нехай задана матриця A розміру $n \times n$, яка складається з рядків

$$\begin{array}{lcl} \bar{a}_1 & = & (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ \bar{a}_2 & = & (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{a}_n & = & (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}). \end{array}$$

Позначимо через S_n множину всіх підстановок n елементів.

Теорема 2.7 *Явною формулою для обчислення визначника матриці A є*

$$\det A = \sum_{\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots n \\ i_1 & i_2 & \dots i_n \end{pmatrix} \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} \dots a_{ni_n} \tag{14}$$

Доведення. Доведемо формулу (14).

Введемо позначення для рядків довжини n, що мають одну одиницю, а решта елементів – нулі:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ \bar{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{e}_n &= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

Використовуючи ці позначення ми можемо записати

$$\bar{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{e}_j.$$

Користуючись полілінійністю визначника ми можемо записати

$$\det A = \det(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) = \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \dots \sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \det(\bar{e}_{j_1}, \bar{e}_{j_2}, \dots, \bar{e}_{j_n}) \tag{15}$$

Якщо серед рядків $\bar{e}_{j_1}, \bar{e}_{j_2}, \dots, \bar{e}_{j_n}$ є однакові, то $\det(\bar{e}_{j_1}, \bar{e}_{j_2}, \dots, \bar{e}_{j_n}) = 0$. Якщо ж вони всі різні, то

$$\det(\bar{e}_{j_1}, \bar{e}_{j_2}, \dots, \bar{e}_{j_n}) = \operatorname{sign} \sigma,$$

де

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

Отже, після відкидання нульових доданків формула (15) перетворюється у формулу (14).

Теорему доведено.

■

Приклад. Нехай є матриця $A_{9\times 9}$. Відомо, що добуток

$$a_{15} a_{27} a_{32} a_{x9} a_{5y} a_{61} a_{73} a_{86} a_{94}$$

входить доданком у визначник цієї матриці. Визначити, чому дорівнюють x, y і з яким знаком цей добуток входить у визначник — із своїм чи з протилежним.

Для розв'язування пишемо підстановку, яка відповідає добутку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 2 & 9 & y & 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Оскільки підстановка є бієктивним відображенням множини $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ в себе, то і у верхньому рядку і в нижньому рядку повинні бути присутніми всі елементи цієї множини і лише по одному разу. У верхньому рядку відсутнє число 4, а в нижньому 8. Отже

$$x = 4, \qquad y = 8,$$

і підстановка має вигляд

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 2 & 9 & 8 & 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Інверсіями в нижньмо рядку будуть $\{5,2\}$, $\{5,1\}$, $\{7,2\}$, $\{7,1\}$, $\{7,3\}$, $\{7,6\}$, $\{7,4\}$, $\{2,1\}$, $\{9,8\}$, $\{9,1\}$, $\{9,3\}$, $\{9,6\}$, $\{8,1\}$, $\{8,3\}$, $\{8,6\}$, $\{6,4\}$. Всього маємо 16 інверсій. Отже, підстановка парна і добуток входить у визначник із своїм знаком, $\operatorname{sign}\sigma = 1$.

2.9 Визначник транспонованої матриці

Теорема 2.8 *При транспонуванні визначник матриці не змінюється, тобто коли A – квадратна матриця, і $A^\top$ транспонована до неї, то*

$$\det A = \det A^\top. \tag{16}$$

Доведення. Позначимо транспоновану до A матрицю чрез B, на перетині i-го рядка та j-го стовпчика матриці B стоїть елемент $b_{ij} = a_{ji}$. Скористаємося явною формулою для обчислення визначників

$$\det B = \sum_{\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right) \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) b_{1i_1} b_{2i_2} b_{3i_3} \dots b_{ni_n} =$$

$$= \sum_{\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right) \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \dots a_{i_n n} =$$

$$= \sum_{\sigma = \left(\begin{smallmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{smallmatrix}\right) \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \dots a_{i_n n} = \det A.$$

Тут ми скористалися тим, що $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma^{-1})$.

∎

Наслідок 2.3 *Визначник матриці A можна обчислювати розкладанням за першим стовпчиком, тобто*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \bar{M}_{i1}. \tag{17}$$

і за будь-яким стовпчиком, тобто

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \bar{M}_{ik}. \tag{18}$$

Приклади. 1. Визначник

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

зручно обчислювати розкладенням за третім рядком:

$$d = (-1)^{1+3} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot c \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 28a - 21b + 23c.$$

2. А визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 7 \\ -3 & b & 0 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix}$$

зручно обчислювати розкладенням за другим стовпчиком:

$$d = (-1)^{1+2} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot c \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3a + 2b + 21c.$$

Інколи буває зручно спростити визначник, розклавши його за стовпчиком, який має багато нульових елементів, а потім уже обчислювати.

Приклад. Обчислити визначник

$$d = \begin{vmatrix} -7 & 11 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 29 & 7 & 5 & 1 & 7 & 9 \\ 31 & 7 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 11 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ -9 & 22 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

В цьому визначнику в 4-му стовпчику стоїть лише один ненульовий елемент – одиниця в другому рядку. Отже перед обчисленням доречно розкласти цей визначник за елементами 5-го стовпчика. Одержуємо

$$d = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -7 & 11 & 3 & 5 & 0 \\ 31 & 7 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & 11 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ -9 & 22 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

В одержаному визначнику 5-й стовпчик має лише один ненульовий елемент, отже доцільно знову розкласти визначник за елементами 5-го стовпчика.

$$d = (-1)^{2+5} \begin{vmatrix} -7 & 11 & 3 & 5 \\ -2 & 11 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \\ -9 & 22 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу на те, що в одержаному визначнику в другому стовпчику стоять 11, 11 і 22, а це дозволяє дещо спростити другий стовпчик. Віднімаємо від другого рядка перший і від четвертого віднімаємо подвоєний перший. Одержимо

$$d = - \begin{vmatrix} -7 & 11 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & -7 & -12 \end{vmatrix}.$$

Тепер другий стовпчик визначника має два ненульові елементи і можна розкласти визначник за другим стовпчиком

$$\begin{vmatrix} -7 & 11 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & -7 & -12 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 11 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & -7 & -12 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \\ 5 & -7 & -12 \end{vmatrix}.$$

Визначники третого порядку можна підрахувати за правилом Саррюса

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & -7 & -12 \end{vmatrix} = 250, \qquad \begin{vmatrix} -7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \\ 5 & -7 & -12 \end{vmatrix} = 250.$$

Тепер ми можемо обчислити значення d:

$$d = -(-2750 - 250) = 3000.$$

Також за допомогою зменшення порядку визначника (зменшення розміру матриці, від якої підраховується визначник) можна обчислити визначник n-го порядку.

Приклад. Обчислимо визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

При розкладанні визначника за елементами першого рядка ми одержуємо два ненульові доповнювальні мінори $\bar{M}_{11}$ та $\bar{M}_{12}$. Перший $\bar{M}_{11}$ є визначником верхньотрикутної матриці, він дорівнює добутку діагональних елементів, тобто

$$\bar{M}_{11} = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = x^{n-1},$$

а другий $\bar{M}_{12}$ має в першому стовпчику єдиний ненульовий елемент — y в останньому рядку. Розкладаючи цей мінор за елементами першого стовпчика, одержуємо визначник нижньо-трикутної матриці (по діагоналі стоїть y), що має $n-2$ рядки. Отже,

$$\bar{M}_{12} = \begin{vmatrix} 0 & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} =$$

$$= (-1)^n y \begin{vmatrix} y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & y & 0 \\ 0 & 0 & \dots & x & y \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)} = (-1)^n y^{n-1}.$$

Таким чином, отримуємо

$$\det A = x\bar{M}_{11} - y\bar{M}_{12} = x^n - y(-1)^n y^{n-1} = x^n + (-1)^{n+1} y^n.$$

Наслідок 2.4 *Наслідком того, що визначник матриці дорівнює визначнику транспонованої матриці, є можливість робити елементарні перетворення стовпчиків матриці, і при цьому визначник змінюється так же, як і при елементарних перетвореннях рядків (див. теор. 2.6)*

Наслідок 2.5 *Нехай матриця A має розмір $n \times n$ і $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ її стовпчики. Якщо два стовпчики заданої матриці поміняти місцями, то визначник одержаної матриці буде відрізнятися від визначника заданої матриці лише знаком:*

$$\det A = \det(\ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_j, \ldots) = -\det(\ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_j, \ldots). \tag{19}$$

Якщо стовпчик матриці помножити на число, то визначник помножиться на це число, тобто

$$\det(\ldots, \lambda\bar{a}_i, \ldots) = \lambda \det(\ldots, \bar{a}_i, \ldots). \tag{20}$$

Якщо до одного стовпчика матриці додати будь-який інший, помножений на будь-яке число, то визначник матриці не зміниться, тобто

$$\det(\ldots, \bar{a}_i + \lambda\bar{a}_j, \ldots, \bar{a}_j, \ldots) = \det(\ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_j, \ldots). \tag{21}$$

Вказаний наслідок дозволяє в методі приведення матриці до нижньо-трикутного чи верхньо-трикутного вигляду виконувати як елементарні перетворення рядків, так і елементарні перетворення стовпчиків, слідкуючи, звичайно, за зміною визначника.

Приклад. Обчислити визначник

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \ldots & x \\ x & a_2 & x & \ldots & x \\ x & x & a_3 & \ldots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

Віднімемо перший рядок із решти рядків, при цьому визначник не зміниться:

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \ldots & x \\ x - a_1 & a_2 - x & 0 & \ldots & 0 \\ x - a_1 & 0 & a_3 - x & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x - a_1 & 0 & 0 & \ldots & a_n - x \end{vmatrix}$$

Наступним кроком ми винесемо із першого стовпчика множник a_1-x, із другого a_2-x, із третього a_3-x, і т.д. В підсумку одержимо

$$d=(a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)\dots(a_n-x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

В одержаному визначнику до першого стовпчика додаємо решту, одержуємо верхньо-трикутну матрицю, що дозволяє обчислити визначник:

$$d=\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\left(\frac{a_1}{a_1-x}+\sum_{i=2}^{n}\frac{x}{a_i-x}\right).$$

2.10 Рекурентні співвідношення

Розглянемо випадок, коли потрібно обчислити визначник матриці певного зовнішнього виду розміру $n\times n$ не при одному значенні n, а при всіх натуральних значеннях, чи при всіх досить великих. В такому випадку можна відповідь (шуканий визначник) позначити через d_n, створити послідовність

$$d_1,\ d_2,\ d_3,\dots,d_n,\dots \tag{22}$$

потім знайти залежність

$$d_n=f(d_{n-1},d_{n-2},\dots), \tag{23}$$

далі, обчисливши $d_1,d_2,\dots$ при малих значеннях n, і використовуючи (23), знаходять d_n.

Приклад. Обчислити визначник $(n+1)-$порядку

$$d_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{vmatrix}.$$

Спочатку обчислимо визначники d_{n+1} при малих значеннях n, тобто $n=0,\ 1,\ 2.$

$$d_1=a_0,\qquad d_2=x_1a_0+a_1y_1,\qquad d_3=x_1x_2a_0+a_1y_1x_2+a_2y_1y_2.$$

Далі будемо шукати рекурентне співвідношення — як знайти визначник $(n+1)-$го порядку, якщо визначник $n-$го ми уже вміємо обчислювати. Для цього розкладемо визначник за елементами останнього рядка. В цьому рядку два ненульові елементи передостанній $a_{n+1,n} = -y_n$ і останній $a_{n+1,n+1} = x_n$. Отже

$$d_{n+1} = (-1)^{n+n+1}(-y_n)\bar{M}_{n+1,n} + x_n(-1)^{n+1+n+1}\bar{M}_{n+1,n+1} = y_n\bar{M}_{n,n+1} + x_n d_n.$$

Мінор $\bar{M}_{n+1,n}$ обчислюється, оскільки в останньому стовпчику стоїть єдиний ненульовий елемент a_n, а після викреслювання першого рядка і останнього стовпчика одержується верхньо-трикутна матриця, де на головній діагоналі стоять $-y_1,\ -y_2, \ldots, -y_{n-1}$. Тому

$$\bar{M}_{n+1,n} = (-1)^{1+n} a_n \bar{M}^{1,n+1}_{n,n+1} = (-1)^{n+1} a_n (-y_1)(-y_2)\ldots(-y_{n-1}) = a_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1}.$$

Тепер ми можемо виписати рекурентне співвідношення для визначника d_{n+1}:

$$d_{n+1} = a_n y_1 y_2 \ldots y_n + x_n d_n. \tag{24}$$

Коли відоме рекурентне співвідношення, тоді можна вгадати відповідь

$$d_{n+1} = a_n y_1 y_2 \ldots y_n + a_{n-1} y_1 y_2 \ldots y_{n-1} x_n + \ldots + a_0 x_1 x_2 \ldots x_n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k y_1 y_2 \ldots y_k x_n x_{n-1} \ldots x_{n-k}.$$

і довести її методом повної математичної індукції. А можна виписати послідовність рекурентних співвідношень:

$$\begin{array}{rcl}
d_{n+1} & = & a_n y_1 y_2 \ldots y_n + x_n d_n \\
d_n & = & a_{n-1} y_1 y_2 \ldots y_{n-1} + x_{n-1} d_{n-1} \\
d_{n-1} & = & a_{n-1} y_1 y_2 \ldots y_{n-2} + x_{n-2} d_{n-2} \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
d_3 & = & a_3 y_1 y_2 + x_2 d_2
\end{array}$$

помножити другу рівність на x_n, третю рівність на $x_n x_{n-1}$ і т.д., і всі одержані рівності додати. При цьому скоротяться d_i зліва і справа при $i = 3, 4, 5, \ldots n$. Одержимо ту ж відповідь.

Визначення 2.10 *Послідовність, для якої існує рекурентне співвідношення, називається рекурентною або рекурсивною.*

Із шкільного курсу математики відомі дві рекурентні послідовності $a_0, a_1, a_2, \ldots$:

- арифметична послідовність задовольняє рекурентне співвідношення $a_{n+1} = a_n + d$, число d називається різницею арифметичної прогресії;

- геометрична прогресія задовольняє рекурентне співвідношення $a_{n+1} = q \cdot a_n$, число q називається знаменником геометричної послідовності.

При обчислені визначників часто виникають дещо складніші рекурентні послідовності – так звані *лінійні рекурентні співвідношення глибини* k, вони задовольняють рекурентне співвідношення

$$a_{n+k} = \alpha_1 a_{n+k-1} + \alpha_2 a_{n+k-2} + \ldots + \alpha_k a_k,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — числа і $\alpha_k \neq 0$. Для таких рекурентних послідовностей існує формула для загального члена a_n (див. [2]). Найважливіший для визначників випадок $k = 2$ розглянемо більш ретельно. Отже, маємо послідовність $a_0, a_1, a_2, \ldots$, яка задовольняє співвідношення

$$a_{n+2} = \alpha_1 a_{n+1} + \alpha_2 a_n, \qquad \alpha_2 \neq 0. \tag{25}$$

Випадок $\alpha_2 = 0$ не розглядається тому, що тоді послідовність є просто геометричною прогресією.

З'ясуємо, які ненульові геометричні прогресії Cq^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ задовольняють рекурентне співвідношення (25). Для цього підставляємо в (25) елементи прогресії:

$$Cq^{n+2} = \alpha_1 Cq^{n+1} + \alpha_2 Cq^n. \tag{26}$$

Оскільки ми розглядаємо ненульові прогресії, то $C \neq 0, \quad q \neq 0$ і (27) можна скоротити на cq^n і перенести всі доданки вліво:

$$q^2 - \alpha_1 q - \alpha_2 = 0. \tag{27}$$

Ми довели наступну теорему

Теорема 2.9 *Геометрична прогресія задовольняє рекурентне співвідношення (25) тоді і тільки тоді, коли знаменник цієї прогресії є коренем так званого характеристичного рівняння*

$$x^2 - \alpha_1 x - \alpha_2 = 0. \tag{28}$$

Далі з'являються дві можливості — корені характеристичного рівняння або однакові або різні. Випадок, коли рівняння не має розв'язків, не розглядаємо, оскільки обчислення можна проводити в більш широкому числовому полі (скажемо, в полі комплексних чисел), при цьому результат буде належати початковому числовому полю (скажемо, полю дійсних чисел).

Розглядаємо перший випадок — корені $q_1,\ q_2$ рівняння (28) різні, $q_1 \neq q_2$. В цьому випадку рекурентне співвідношення (25) задовольняють дві геометричні прогресії $a_n = C_1 q_1^n$ і $a_n = C_2 q_2^n$. Загальний член рекурентної послідовності шукаємо у вигляді суми загальний членів цих послідовностей. Цей факт сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 2.10 *Послідовність*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \tag{29}$$

задовольняє рекурентне співвідношення (25) з різними коренями q_1, q_2 *характеристичного рівняння (28) тоді і тільки тоді, коли для деяких чисел* C_1, C_2 *і для всіх* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$a_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n. \tag{30}$$

Доведення. Те, що послідовність із загальним членом (30) задовольняє рекурентне співвідношення (25), видно із попередніх міркувань. Лишилося довести, що інших послідовностей немає, тобто для будь-якої послідовності, що задовольняє (25), можна підібрати C_1, C_2 так, щоб виконувалась рівність (30).

Підбираємо числа C_1, C_2 так, що дві послідовності — задана (29) і

$$b_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$$

мали однакові два перших члени, тобто $a_0 = b_0, a_1 = b_1$. Для цього складаємо рівняння

$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = a_0, \\ C_1 q_1 + C_2 q_2 & = a_1, \end{cases}$$

в яких невідомі є C_1, C_2. Завдяки тому, що $q_1 \neq q_2$, ця система має і до того ж єдиний розв'язок.

Маємо дві рекурентні послідовності a_n і b_n $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$. Оскільки вони задовольняють одне і те ж рекурентне співвідношення (тобто кожен наступний елемент будується із попередніх за однією і тією ж формулою), і в них збігаються два перших члени, ми можемо стверджувати, що $a_n = b_n$ при віх $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Теорема доведена.

■

Перейдемо до другого випадку, тобто до випадку, коли корені $q_1,\ q_2$ збігаються – позначимо цей єдиний корінь q. В цьому випадку за теоремою Вієта

$$\alpha_1 = 2q, \qquad \alpha_2 = -q^2.$$

Перевіримо, що крім геометричної послідовності $C_1 q^n$, $(n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$ рекурентне співвідношення (25) задовольняє також послідовність із загальним членом $C_2 n q^n$.

Справді, підставляємо елементи цієї послідовності в (25)

$$C_2(n+2)q^{n+2} = \alpha_1 C_2(n+1)q^{n+1} + \alpha_2 C_2 n q^n.$$

Підставляємо $\alpha_1 = 2q,\ \alpha_2 = -q^2$, одержуємо

$$C_2(n+2)q^{n+2} = (2q)C_2(n+1)q^{n+1} + (-q^2)C_2 n q^n = C_2(2n+2)q^{n+2} - C_2 n q^{n+2}.$$

Що і потрібно було довести.

Теорема 2.11 *Послідовність (29) задовольняє рекурентне співвідношення (25) з рівними коренями $q_1 = q_2 = q$ характеристичного рівняння (28) тоді і тільки тоді, коли для деяких чисел C_1, C_2 і для всіх $n = 0, 1, 2, 3, \dots$*

$$a_n = (C_1 + C_2 n)q^n. \tag{31}$$

Доведення. Доведення цієї теореми практично не відрізняється від доведення попередньої теореми для випадку різних коренів характеристичного рівняння, однак проведемо його.

Те, що послідовність із загальним членом (31) задовольняє рекурентне співвідношення (25), видно із попередніх міркувань. Лишилося довести, що інших послідовностей немає, тобто для будь-якої послідовності, що задовольняє (25), можна підібрати C_1, C_2 так, щоб виконувалась рівність (31).

Підбираємо числа C_1, C_2 так, що дві послідовності — задана (29) і

$$b_n = (C_1 + C_2 n)q^n$$

мали однакові два перших члени, тобто $a_0 = b_0, a_1 = b_1$. Для цього складаємо рівняння

$$\begin{cases} C_1 &= a_0, \\ C_1 + C_2 &= a_1, \end{cases}$$

в яких невідоми є C_1, C_2. Ця система має і до того ж єдиний розв'язок.

Маємо дві рекурентні послідовності a_n і b_n $(n = 0, 1, 2, 3, \dots)$. Оскільки вони задовольняють одне і те ж рекурентне співвідношення (тобто кожен наступний елемент будується із попередніх за однією і тією ж формулою), і в них збігаються два перших члени, ми можемо стверджувати, що $a_n = b_n$ при віх $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Теорема доведена.

■

Наведемо приклади використання двох останніх теорем.

Приклад 1. Обчислити визначник матриці, яка має n рядків і n стовпчиків

$$d_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}_{n \times n}$$

За означенням, $d_n = 3\bar{M}_{11} - 2\bar{M}_{12}$. Бачимо, що $\bar{M}_{11} = d_{n-1}$ та

$$\bar{M}_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)} = d_{n-2}$$

Отже для d_n маємо рекурентне співвідношення

$$d_n = 3d_{n-1} - 2d_{n-2}$$

з характеристичним рівнянням

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

коренями якого є 2 і 1. Отже за формулою (30) для деяких сталих C_1, C_2

$$d_n = C_1 + C_2 2^n.$$

Сталі C_1, C_2 знаходимо, обчислюючи визначники d_1, d_2 і складаючи відповідні рівняння:

$$d_1 = 3 = C_1 + 2C_2, \qquad d_2 = 7 = C_1 + 4C_2.$$

Розв'язуючи систему рівнянь знаходимо $C_1 = -1,\ C_2 = 2$. Звідси одержуємо відповідь

$$d_n = -1 + 2^{n+1}.$$

Приклад 2. Обчислити визначник матриці, яка має n рядків і n стовпчиків

$$d_n = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{vmatrix}.$$

За визначенням, $d_n = -2\bar{M}_{11} - 2\bar{M}_{12}$. Бачимо, що $\bar{M}_{11} = d_{n-1}$, а в першому стовпчику $\bar{M}_{12}$ є єдиний ненульовий елемент. Розкладаємо мінор за елементами першого стовпчика і одержуємо $\bar{M}_{12} = d_{n-2}$. Отже для d_n маємо рекурентне співвідношення

$$d_n = -2d_{n-1} - 2d_{n-2}$$

з характеристичним рівнянням

$$x^2 + 2x + 2 = 0,$$

яке, на відміну від попереднього випадку, не має дійсних коренів. Його коренями в полі комплексних чисел є $q_1 = -1+i$ і $q_2 = -1-i$ (нагадаємо, $i^2 = -1$). Отже за формулою (30) для деяких сталих C_1, C_2

$$d_n = C_1(-1+i)^n + C_2(-1-i)^n.$$

Сталі C_1, C_2 знаходимо, обчислюючи визначники d_1, d_2 і складаючи відповідні рівняння:

$$d_1 = -2 = C_1(-1+i) + C_2(-1-i), \qquad d_2 = 2 = C_1(-1+i)^2 + C_2(-1-i)^2.$$

Розв'язуючи систему рівнянь знаходимо

$$C_1 = \frac{1+i}{2}, \qquad C_2 = \frac{i-i}{2}.$$

Звідси одержуємо відповідь

$$d_n = \frac{1+i}{2}(-1+i)^n + \frac{i-i}{2}(-1-i)^n.$$

Оскільки

$$(1+i)(-1+i) = -2, \qquad (1-i)(-1-i) = -2,$$

то відповідь можна переписати в кращому вигляді

$$d_n = -(-1+i)^{n-1} - (-1-i)^{n-1}.$$

Звернемо увагу, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ d_n є дійсним цілим числом, але його записали з використанням комплексних чисел.

Приклад 3. Обчислити визначник матриці, яка має n рядків і n стовпчиків

$$d_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

За означенням, $d_n = 2\bar{M}_{11} - \bar{M}_{12}$. Бачимо, що $\bar{M}_{11} = d_{n-1}$, а в першому стовпчику $\bar{M}_{12}$ є єдиний ненульовий елемент. Розкладаємо мінор за елементами першого стовпчика і одержуємо $\bar{M}_{12} = d_{n-2}$. Отже для d_n маємо рекурентне співвідношення

$$d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2}$$

з характеристичним рівнянням

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

яке має єдиний корінь 1. Отже за формулою (31) для деяких сталих C_1, C_2

$$d_n = (C_1 + C_2 n)1^n.$$

Сталі C_1, C_2 знаходимо, обчислюючи визначники d_1, d_2 і складаючи відповідні рівняння:

$$d_1 = 2 = C_1 + C_2, \qquad d_2 = 3 = C_1 + 2C_2.$$

Розв'язуючи систему рівнянь знаходимо $C_1 = 1$, $C_2 = 1$. Звідси одержуємо відповідь

$$d_n = 1 + n.$$

3 Окремі визначники

3.1 Визначник Вандермонда

Визначення 3.1 *Визначником Вандермонда називають визначник*

$$W = W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Теорема 3.1 *Визначник Вандермонда обчислюється за формулою*

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i). \tag{32}$$

Якщо $n \ge 2$, то він дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли серед елементів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є однакові.

Доведення. Формула доводиться методом індукції. Індуктивний перехід забезпечується відніманням (починаючи з останнього рядка) із наступного рядка попереднього, помноженого на x_1. При цьому одержується рівність:

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \ldots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

Далі потрібно розкласти за елементами першого стовпчика і з кожного стовпчика винести спільний множник

$\blacksquare$

Приклад. Наступний визначник

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix}$$

є траспонованим до визначника Вандермонда порядку $n+1$, де $x_i = i,\ i = \overline{1,(n+1)}$. Тому

$$d = W(1,2,\dots,n+1) = \prod_{1\le i<j\le n+1} (j-i) = \prod_{i=1}^{n} (i!).$$

Грунтовна добірка задач і вправ з теми "визначник Ванермонда" наведена в [3].

3.2 Визначник блочної матриці

Нехай є матриця M розміру $(n+m)\times(n+m) \quad n,m \ge 1$. Виділивши перші n рядків і останні m рядків, перші n стовпчиків і останні m стовпчиків ми одержимо на перетині цих рядків і стовпчиків чотири матриці $A_{n\times n}$, $B_{m\times m}$, $C_{m\times n}$, $D_{n\times m}$ так що

$$M = \begin{pmatrix} A & D \\ C & B \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Матриці $A,\ B$ квадратні порядку n і m відповідно. Матриці C, D можуть бути прямокутними, не квадратними.

Визначення 3.2 *Якщо матриця M представлена у вигляді (33), то її називають блочною. Якщо в представленні (33) матриці D, C є нульовими, то матрицю M називають блочно діагональною.*

Теорема 3.2 (Про визначник блочної матриці) *Якщо в представленні (33) матриці M одна з матриць D, C дорівнює нулю, то*

$$\det M = \det A \cdot \det B,$$

зокрема

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

Доведення. Доводиться теорема методом індукції за розміром матриці A. Індуктивний перехід забезпечується розкладанням детермінанта матриці A за елементами першого рядка. В розкладенні за першим рядком за індуктивним припущенням всі доданки будуть мати спільний множник — визначник матриці B. Він виноситься за дужки, а в дужках лишається визначник матриці A.

∎

Приклад.

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 0 & 0 \\ -\cos x & \sin x & 0 & 0 \\ a & b & \cos y & \sin y \\ c & d & -\sin y & \cos y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin yx & \cos y \end{vmatrix} = 1$$

3.3 Визначник добутку двох матриць

Теорема 3.3 (Про визначник добутку двох матриць) *Визначник добутку двох*
матриць дорівнює добутку визначників цих матриць.

Доведення. При доведенні використовується визначник, який, як визначник блочної матриці, дорівнює потрібному добутку визначників.

Нехай A і B дві матриці розміру $n \times n$. Розглянемо матрицю

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

За теоремою 3.2 $\det M = \det A \cdot \det B$.

Цей визначник можна обчислити іншим способом. Зробимо елементарні перетворення рядків матриці M.

До i-го рядка $i = 1, 2, \dots, n$ додамо $(n+1)$-й, помножений на a_{i1}. В першому стовпчику лишиться один ненульовий елемент: (-1) в $(n+1)$-у рядку.

До i-го рядка $i = 1, 2, \dots, n$ додамо $(n+2)$-й, помножений на $a_{i,2}$. В другому стовпчику лишиться один ненульовий елемент: (-1) в $(n+2)$-у рядку.

До i-го рядка $i = 1, 2, \dots, n$ додамо $(n+3)$-й, помножений на a_{i3}. В третьому стовпчику лишиться один ненульовий елемент: (-1) в $(n+3)$-у рядку.

І т. д. Після n таких кроків ми одержимо матрицю

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

де

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ \end{pmatrix} = A \cdot B$$

і

$$\det M_1 = \det M = \det A \cdot \det B.$$

Переставимо в матриці M_1 стовпчики: $i-$й стовпчик поміняємо місцями з $(n+i)$-м $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$. Одержимо матрицю

$$M_2 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

і

$$\det M_2 = (-1)^n \det M_1.$$

Матриця M_2 має блочний вигляд, і до неї можна застосувати теорему (3.2), згідно з якою

$$\det M_2 = \det C \cdot (-1)^n.$$

Тепер ми можемо записати рівності

$$\det A \cdot \det B = \det M = \det M_1 = (-1)^n \det M_2 = (-1)^n (-1)^n \det(AB),$$

тобто

$$\det A \cdot \det B = \det(AB).$$

Теорема доведена.

■

Наслідок 3.1 *Визначник матриці і визначник оберненої матриці – два взаємно обернені числа.*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Справді, добуток матриці на свою обернену дорівнює одиничній матриці, виначник якої дорівнює 1. Отже, добуток визначника матриці на визначник оберненої матриці дорівнює 1. А це і означає, що для визначника матриці є число, що обернене до нього.

Наслідок 3.2 *Якщо визначник матриці дорівнює нулю, то ця матриця не має оберненої.*

Справді, для визначника оборотної матриці є обернене, а для нуля немає оберненого числа. Отже матриця з нульовим визначником (так звана вироджена матриця) не оборотна, для неї не існує обернена.

Наслідок 3.3 *Якщо матриця розглядається не над полем, а над кільцем, то необхідною умовою оборотності матриці є існування оберненого числа для її визначника. Зокрема, необхідною умовою оборотності матриці M над кільцем цілих чисел є*

$$\det M \in \{-1, 1\}.$$

А необхідною умовою оборотності матриці над кільцем многочленів з дійсними коефіцієнтами є

$$\det M \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

тобто визначник повинен бути ненульовим дійсним числом.

Це випливає з того, що оборотними числами в кільці цілих чисел є лише 1 та -1. А в кільці многочленів з дійсними коефіцієнтами оборотними є лише ненульові дійсні числа.

Приклад. Нехай

$$M = \begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{pmatrix}.$$

Обчислимо $\det M$.

Відмітимо, що при $n > 1$ матриця M розкладається в добуток двох матриць A та B, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Коли $n > 2$, $\det M = \det A \cdot B = 0 \cdot 0 = 0$. Якщо $n = 2$, то

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1).$$

Якщо $n = 1$, то $\det M = 1 + x_1y_1$.

4 Застосування визначників

4.1 Обернена матриця

В цьому розділі за допомогою визначників знайдемо формулу для елементів оберненої матриці.

Нехай задана квадратна матриця M розміру $n \times n$. З кожним елементом a_{ij} пов'язаний доповнювальний мінор $\bar{M}_{ij}$, — визначник матриці, яка одержується після викреслювання рядка і стовпчика, в яких стоїть цей елемент.

Визначення 4.1 *Алгебричним доповненням елемента a_{ij} називають $(-1)^{i+j}\bar{M}_{ij}$, і позначають його A_{ij}. Матриця, що складена із алгебричних доповнень елементів матриці M називається приєднаною і позначається M^*.*

Приклад. Нехай

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Тоді

$$\bar{M}_{11} = 5,\ \bar{M}_{12} = 4,\ \bar{M}_{21} = 3,\ \bar{M}_{22} = 5,\ A_{11} = 5,\ A_{12} = -4,\ A_{21} = -3,\ A_{22} = 2.$$

Отже,

$$M^* = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Теорема 4.1 (Співвідношення ортогональності) *Сума добутків елементів рядка на їх алгебричні доповнення дорівнює визначнику матриці. А сума добутків елементів рядка на відповідні алгебричні доповнення елементів іншого рядка дорівнює нулю. Тобто*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{pi}A_{qi} = \begin{cases} \det A, & \textit{якщо } p = q, \\ 0, & \textit{якщо } p \neq q. \end{cases}$$

Доведення. Доведення грунтується на тому, що потрібна сума при $p = q$ збігається з формулою розкладення визначника за p-м рядком, а при $p \neq q$ ця формула знову буде формулою розкладення визначника матриці з двома однаковими рядками p-м та q-м.

■

Теорема 4.2 (Про формулу для оберненої матриці) *Якщо визначник матриці M є оборотним числом, то обернена матриця M^{-1} до M існує і може бути обчислена за формулою*

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}(M^*)^{\top},$$

тобто щоб найти обернену матрицю, потрібно знайти приєднану до неї, потім приєднану транспонувати, а потім всі елементи одержаної матриці розділити на визначник заданої матриці.

Доведення. Твердження теореми прямо випливає із співвідношення ортогональності.

■

Приклад. Для матриці (34)

$$(M^*)^\top = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det M = -2.$$

Отже,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{2} & \dfrac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.2 Ранг матриці

Нагадаємо, що *мінором* матриці називають визначник матриці, яка складається з елементів, що стоять на перетині вибраних рядків і вибраних стовпчиків. На перетині k рядків і k стовпчиків знаходиться мінор k-го порядку.

В такому контексті $M^{3,9}_{5,7}$ означає визначник матриці 2 на 2, елементи якої стоять на перетині 5 та 7 стовпчиків з 3 та 9 рядками.

Визначення 4.2 *Ранг нульової матриці дорівнює нулю. Якщо в матриці є мінор k-го порядку, який не дорівнює нулю, а всі мінори $(k+1)$-го порядку дорівнюють нулю, то ранг такої матриці дорівнює k.*

Теорема 4.3 (Про ранг матриці) *Елементарні перетворення рядків чи стовпчиків матриці не змінють рангу матриці.*

Доведення. Якщо в матриці всі мінори $(k+1)$-го порядку дорівнюють нулю, то після елементарних перетворень рядків знову всі мінори $(k+1)$-го порядку дорівнюють нулю. Оскільки всі елементарні перетворення рядків оборотні, то елементарні перетворення рядків не змінюють ранг матриці.

Оскільки визначник транспонованої матриці дорівнює визначнику заданої матриці, то при елементарних перетвореннях стовпчиків ранг матриці не змінюється також.

■

5 Системи рівнянь

Визначення 5.1 *Рівняння*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

де $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$ *— невідомі, а* $a_1,\ a_2,\ldots,a_n,\ b$ *— параметри (фіксовані в даній задачі числа — елементи поля чи кільця), називається лінійним алгебричним рівнянням,* $a_1,\ a_2,\ldots,a_n$ *— коефіцієнти рівняння,* b *— права частина рівняння.*

Оскільки в даному викладі зустрічаються лише лінійні і лише алгебричні рівняння, то слова "лінійний" та "алгебричний" будемо пропускати і замість довгого словосполучення "лінійне алгебричне рівняння" будемо говорити "рівняння", або "лінійне рівняння".

Якщо система m лінійних рівнянь з n невідомими записана у вигляді

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}, \tag{35}$$

то

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} -$$

основна матриця системи,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} -$$

розширена матриця системи,

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} -$$

стовпчик (або вектор) правих частин, а

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} -$$

стовпчик (вектор) невідомих.

В цих позначеннях система лінійних рівнянь записується в наступному матричному вигляді:

$$A\bar{x} = \bar{b}.$$

Визначення 5.2 *Якщо стовпчик правих частин нульовий, то систему називають однорідною. Якщо він ненульовий, то система неоднорідна.*

Якщо $\bar{b} \neq \bar{0}$, то кажуть, що однорідна система $A\bar{x} = \bar{0}$ відповідає неоднорідній системі $A\bar{x} = \bar{b}$.

5.1 Умова сумісності

Визначення 5.3 *Набір із n чисел є розв'язком системи, коли після підстановки цих чисел замість невідомих рівняння стають тотожностями.*

Визначення 5.4 *Система рівнянь називається сумісною, коли вона має бодай один розв'язок. Дві системи називаються рівносильними, якщо набори змінних у них збігаються і множина розв'язків однієї системи збігається з множиною розв'язків другої системи.*

Теорема 5.1 *Якщо виконати елементарні перетворення рядків розширеної матриці системи лінійних рівнянь, то одержимо розширену матрицю рівносильної системи.*

Доведення. Із шкільного курсу математики відомо, що коли в системі поміняти місцями два рівняння, то одержимо рівносильну систему. Якщо в системі до одного рівняння додати інше рівняння, помножене на будь-яке число, то одержимо рівносильну систему. Якщо одне рівняння в системі помножити на будь-яке ненульове число, то одержимо рівносильну систему. Ці зауваження і слугують доведенням теореми.

■

Приклад. Числа $x = 2, y = 3$ утворюють розв'язок (один!) системи

$$\begin{cases} -5x + 7y &= 11 \\ 2x - y &= 1 \end{cases},$$

тому що два рівняння

$$\begin{cases} -5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 &= 11 \\ 2 \cdot 2 - 3 &= 1 \end{cases},$$

насправді є тотожностями.

Визначення 5.5 *Матриця A має спрощений вигляд, якщо на перетині всіх ненульових рядків і відмічених стовпчиків стоїть одинична матриця.*

Приклад. Матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 11 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

мають спрощений вигляд, оскільки в стовпчиках 1,2 матриці A стоїть одинична матриця, а ненульовими рядками матриці B є перший та другий і в них, на перетині 2-го та 5-го стовпчиків стоїть одинична матриця.

Теорема 5.2 *Якщо матриця має спрощений вигляд, то її ранг дорівнює кількості ненульових рядків.*

Доведення. Твердження теореми випливає з того, що існує мінор, розмір якого дорівнює кількості ненульових рядків, існування якого вимагається означенням, що дорівнює 1. А будь-який мінор більшого розміру буде мати нульовий рядок і, таким чином, буде нульовим.

■

Теорема 5.3 *Система лінійних алгебричних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи збігається з рангом розширеної.*

Доведення. Зауважимо, що кожен мінор основної матриці системи є мінором розширеної матриці. Отже, ранг розширеної матриці не може бути меншим від рангу основної — він або дорівнює рангу основної матриці, або більший від цього рангу.

Виконуючи елементарні перетворення рядків розширеної матриці приведемо її так, щоб основна матриця мала спрощений вигляд. Тоді є два випадки, або ранг розширеної матриці дорівнює рангу основної, тобто коли ненульових рядків в розширеній матриці стільки ж, скільки і в основній, або в розширеній матриці ненульових рядків більше, тобто є рядок, який нульовий в основній і ненульовий в розширеній.

В другому випадку ранг розширеної матриці більший за ранг основної, маємо рівняння $0x_1+0x_2+\ldots+0x_n = b \neq 0$, яке не має розв'язку, і система несумісна.

В першому випадку, коли нульових рядків в основній матриці і в розширеній однакова кількість, ділимо невідомі на вільні та основні. Основні відповідають тим стовпчикам, в яких стоїть одинична матриця, а решта — вільні. Вільним змінним надаємо значення 0, а основним відповідні праві частини рівнянь. Одержуємо розв'язок. Отже система сумісна.

Теорема доведена.

■

Приклад. Нехай матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 12 & 9 \end{pmatrix},$$

є розширеною матрицею системи рівнянь. Отже система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 - 3x_4 & = 1, \\ x_2 - 3x_3 + 12x_4 & = 9. \end{cases}$$

Основними невідомими є $x_1,\ x_2$, тому що саме в першому та другому стовпчиках стоїть одинична матриця. Вільними невідомими є решта: $x_3,\ x_4$. Надаємо вільним невідомим значення 0: $x_3 = x_4 = 0$. Система рівнянь приймає вигляд

$$\begin{cases} x_1 & = 1, \\ x_2 & = 9. \end{cases}$$

Отже $x_1 = 1,\ x_2 = 9,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$ є розв'язком і система сумісна.

5.2 Правило Крамера

Правило Крамера застосовується лише у випадку, коли кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих і визначник основної матриці системи (вона обов'язково квадратна) не дорівнює нулю.

В цьому випадку систему можна записати у вигляді

$$A\bar{x} = \bar{b},$$

де матриця A має обернену. Отже розв'язок такої системи існує і єдиний, він обчислюється за формулою

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b}. \tag{36}$$

Ми знаємо, як обчислюються елементи оберненої матриці, і можемо переписати (36) наступним чином

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

або

$$x_i = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k A_{ki}}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Чисельник дробу для обчислення x_i збігається з визначником матриці, що одержується із матриці A заміною i-го стовпчика на стовпчик правих частин. Позначимо цей визначник через Δ_i, а визначник основної матриці системи через Δ. Тоді розв'язок можна записати у стислому вигляді

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (n = 1, 2, \dots, n),$$

Останні формули називають формулами Крамера, а їх застосування називають правилом Крамера.

Ще раз підкреслимо: формули Крамера застосовують виключно у випадку, коли визначник основної матриці не дорівнює нулю. У випадку, коли визначник основної матриці дорівнює нулю, формули Крамера нічого не кажуть про розв'язки системи. В цьому випадку система вимагає додаткового дослідження.

Приклад. Розв'язати систему

$$\begin{cases} (a^2-1)x+by=c(a+1), \\ (b^2-1)x+cy=(b+1)(c+1). \end{cases}$$

Обчислюємо визначник основної матриці системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a^2-1) & b \\ (b^2-1) & c \end{vmatrix} = (a^2-1)c-b(b^2-1),$$

і визначники

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c(a+1) & b \\ (b+1)(c+1) & c \end{vmatrix} = c^2(a+1)-b(b+1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} (a^2-1) & c(a+1) \\ (b^2-1) & (b+1)(c+1) \end{vmatrix} = (a^2-1)(b+1)(c+1)-c(a+1)(b^2-1).$$

Якщо

$$\Delta = (a^2-1)c-b(b^2-1) \neq 0,$$

то згідно з формулами Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{c^2(a+1)-b(b+1)}{(a^2-1)c-b(b^2-1)},$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{(a^2-1)(b+1)(c+1)-c(a+1)(b^2-1)}{(a^2-1)c-b(b^2-1)}$$

У випадку, коли

$$\Delta = (a^2-1)c-b(b^2-1) = 0,$$

формули Крамера застосувати неможливо і система вимагає додаткового дослідження.

6 Визначники і пакети комп'ютерних програм

6.1 Оформлення матриць і визачників в настільних видавничих системах

Чи не найпоширенішою комп'ютерною видавничою системою є Microsoft-Word. Для створення матриці використовується елемент палітри інструментів

"Таблиця". Створена таблиця облямовується чи то круглими чи то квадратними дужками для задання матриці і вертикальними прямими чи подвійними вертикальними прямими щоб задати визначник.

Для створення документів, які містять велику кількість математичних формул, видатний сучасний математик Доналд Кнут розробив систему TEX. Серед діалектів TEX'а особливе місця посідає надбудова Леслі Лемпорта під назвою Latex. Так матриця

$$A = \left[\begin{array}{ccccc} x^2+2 & 3 & 1 & 2 & x-3 \\ \noalign{\medskip} -3 & -2 & 5 & 2\,x+1 & -1 \\ \noalign{\medskip} 0 & 2 & 11 & 7 & 0 \\ \noalign{\medskip} 0 & 8 & -9 & 6 & 0 \\ \noalign{\medskip} -1 & 4 & 4 & -9 & -x+7 \end{array} \right] \tag{37}$$

створена в Latex за допомогою команд

```
A:=\left[ \begin {array}{ccccc} {x}^{2}+2&3&1&2&x-3\\\noalign{\medskip}-
3&-2&5&2\,x+1&-1\\\noalign{\medskip}0&2&11&7&0\\\noalign{\medskip}0&8&
-9&6&0\\\noalign{\medskip}-1&4&4&-9&-x+7\end {array} \right]
```

Додамо, що система Latex є вільно поширюваною, хоч, звичайно, є й комерційні продукти.

6.2 Обчислення визначників в пакетах символьних обчислень

Виконувати дії з матрицями і обчислювати визначники можна в будь-якому пакеті символьних обчислень — MatCad, Mathematica, Maple чи іншому.

Для прикладу, матриця (37) створена в пакеті Maple за допомогою команди

```
 matrix(5, 5, [x^2+2, 3, 1, 2, x-3, -3,
 -2, 5, 2*x+1, -1, 0, 2, 11, 7, 0, 0, 8, -9,
  6, 0, -1, 4, 4, -9, -x+7]);
```

Щоб створену в Maple матрицю можна було використати в Latex, була використана команда

```
latex( matrix(5, 5, [x^2+2, 3, 1, 2, x-3, -3,
 -2, 5, 2*x+1, -1, 0, 2, 11, 7, 0, 0, 8,
 -9, 6, 0, -1, 4, 4, -9, -x+7]));
```

Щоб обчислити визначник матриці A в Maple була задана команда

```
det(A);
```

Результатом виконання команди став вираз

$$-1340\,x^3 + 850\,x^2 + 212\,x^4 - 7783\,x + 21340$$

Література

[1] Курінний Г. Ч. Міркування узагальненням та за подібністю, індукція та аналогія. Біном Ньютона.

http://library.univer.kharkov.ua/book/html/mat2/L3_Kurinnoj.pdf

[2] Курінний Г. Ч. Комбінаторика.

http://library.univer.kharkov.ua/book/html/mat2/

kurinnoj_kombinatorika.pdf

[3] Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. – М:Наука. – 1967.

[4] Калужнин Л. А., Сущанский В. И. Преобразования и перестановки.

www.padabum.com/d.php?id=10351

[5] Овсієнко С. А., Мазорчук В. С., Головащук Н. С. Лінійна алгебра. Матриці і детермінанти. – Всеукраїнська електронна бібліотека. – Київ. – 2001.

[6] Лекция № 9 (26.03.10)

kirill-andreyev.narod2.ru/miem_lektsii/Lection_9_26.03.10-2.doc