28(3). Встановити, чи є a, b, c лін. залежними.
Якщо можливо, виразити c через a і b.

$a = (6, -18, 12)$, $b = (-8, 24, -16)$, $c = (8, 7, 3)$

Шукаємо $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$:

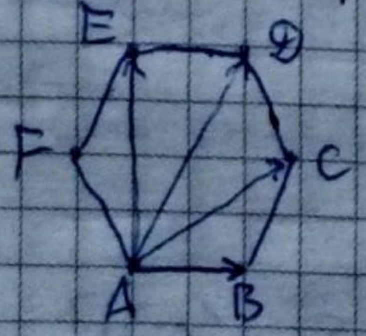
$$\begin{cases} 6\lambda - 8\mu + 8\nu = 0 \\ -18\lambda + 24\mu + 7\nu = 0 \\ 12\lambda - 16\mu + 3\nu = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 3\lambda - 4\mu + 4\nu &= 0 \\ -3\lambda + 4\mu + \tfrac{7}{3}\nu &= 0 \\ 3\lambda - 4\mu + \tfrac{3}{4}\nu &= 0 \end{aligned}$$

Додамо два перших: $\frac{19}{3}\nu = 0 \Rightarrow \nu = 0$, тоді усі рівн. дають $3\lambda - 4\mu = 0$, тобто $\forall$ розв'язок має вигляд $(\lambda, \frac{3}{4}\lambda, 0)$, зокрема, $(4, 3, 0)$: $4a + 3b = 0$. Тобто a і b колінеарні і неколінеарні c, тому c не є їхньою лін. комбінацією.

30. Знайти проекцію $a = (2,5,14)$ на Oxy (тобто на площину, що породжена першими двома базисними векторами) при напрямі проектування $\parallel b = (14,5,2)$.

Проекція - це $a + \lambda b = (2+14\lambda, 5+5\lambda, 14+2\lambda)$. Вона $\in Oxy$, якщо $14+2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -7$. Тобто це $(-96, -30, 0)$.

48. $ABCDEF$ - правильний шестикутник. Знайти координати A, B, C, D, E, F у $(A, \overline{AB}, \overline{AC})$.



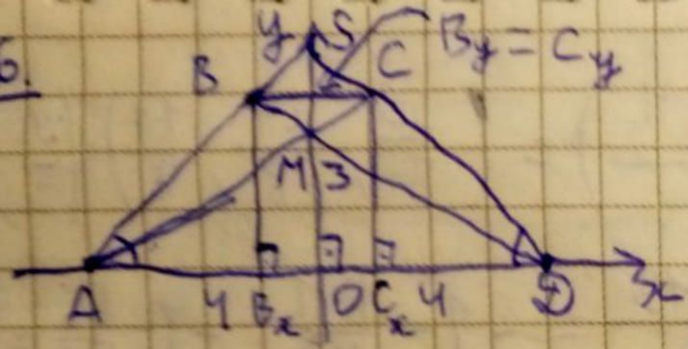
Наприклад:

$\overline{AD} = 2\overline{BC} = 2\overline{AC} - 2\overline{AB}$: $D(-2,2)$.

$\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} = 2\overline{AC} - 2\overline{AB} - \overline{AB} = 2\overline{AC} - 3\overline{AB}$:

$E(-3,2)$ і т.д.

46.



Знайти координати A, B, C, D, M, S

$A(-4,0)$ $D(4,0)$ (бо $A = A_x$, $D = D_x$).

$AB_x = BB_x \operatorname{ctg} \angle A = 3 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 3$, ан-но, $C_x D = 3$.

$BC = B_x C_x = 8 - 3 - 3 = 2 \Rightarrow OB_x = OC_x = 1$, тому

$B(-1,3)$ $C(1,3)$ $(B_y = C_y = 3)$

$ADM \sim CBM$, рівнобедрені $\Rightarrow$ для висот

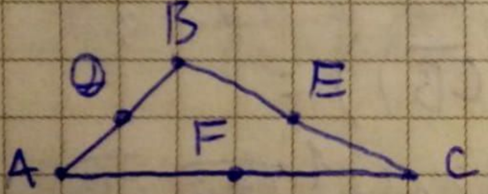
$\frac{MO}{MB_y} = \frac{AD}{CB} = \frac{8}{2} = 4$,

тому y-координата $M = M_y$ - це $\frac{0+4\cdot 3}{1+4} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$, $M\left(0, \frac{12}{5}\right)$,

$ADS \sim BCS$, рівнобедрені $\Rightarrow$ для висот $\frac{SO}{SB_y} = \frac{AD}{BC} = 4$, тобто

S ділить OB_y у відн. $-4 \Rightarrow$ y-коорд. $S = S_y$: $\frac{0-4\cdot 3}{1-4} = \frac{-12}{-3} = 4$, $S(0,4)$.

91. $D(2,4)$, $E(-3,0)$, $F(2,1)$ - середини сторін AB, BC, CA $\triangle ABC$, знайти A, B, C.



Нехай $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$. Тоді:

$$\frac{x_A + x_B}{2} = 2, \quad \frac{y_A + y_B}{2} = 4, \quad \frac{x_B + x_C}{2} = -3, \quad \frac{y_B + y_C}{2} = 0, \quad \frac{x_C + x_A}{2} = 2, \quad \frac{y_C + y_A}{2} = 1.$$

$$\begin{cases} x_A + x_B = 4 \\ x_B + x_C = -6 \\ x_C + x_A = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_A + y_B = 8 \\ y_B + y_C = 0 \\ y_C + y_A = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A - x_C = 10 \\ x_A + x_C = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_A - y_C = 8 \\ y_A + y_C = 2 \end{cases}$$

$x_A = 7$, $x_C = -3$, $x_B = -3$, $y_A = 5$, $y_C = -3$, $y_B = 3$

$A(7,5)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-3)$.

96. $A(2,4)$, $B(x,y)$

$C(0, y_C)$ ділить $\overline{AB}$ у відн. $\frac{2}{3}$: $0 = \dfrac{2 + \frac{2}{3}\cdot x}{1+\frac{2}{3}} \Rightarrow x = -3$

$D(x_D, 0)$ ділить $\overline{AB}$ у відн. $-\frac{3}{4}$: $0 = \dfrac{4 - \frac{3}{4}y}{1-\frac{3}{4}} \Rightarrow y = \frac{16}{3}$.

$B(-3, \frac{16}{3})$.

Якщо C ділить $\overline{AB}$ у відн. λ $\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \lambda\right)$:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}, \quad z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

(точка перетину прямої AB з)

110. У якому відношенні Oyz ділить $\overline{AB}$, $A(2,-1,7)$, $B(4,5,-2)$? (аф. с.к.)

Для точки перетину C $x_C = 0$, тобто

$$\frac{2+4\lambda}{1+\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

111. $A(8,-6,7)$, $B(-20,15,10)$. Чи перетинає пряма AB Ox, Oy або Oz (аф. с.к.)

(Розв'яжемо, не використовуючи рівняння прямої).

Якщо б AB перетинала Ox у $C(x_C,0,0)$, що ділила б $\overline{AB}$ у відн. λ, ми б мали:

$$\frac{-6+15\lambda}{1+\lambda} = \frac{7+10\lambda}{1+\lambda} = 0, \text{ тобто } \lambda = \frac{6}{15} = -\frac{7}{10} \ ↯. \text{ Не перетинає.}$$

Ан-но, якщо AB перетинає Oy в $D(0,y_D,0)$, що ділить у відн. μ:

~~[illegible]~~ $$\frac{8-20\mu}{1+\mu} = \frac{7+10\mu}{1+\mu} = 0: \ \mu = \frac{8}{20} = -\frac{7}{10} \ ↯ \text{ Не перетинає.}$$

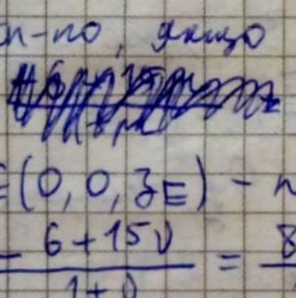
$E(0,0,z_E)$ - перетин з Oz, ділить у відн. ν:

$$\frac{-6+15\nu}{1+\nu} = \frac{8-20\nu}{1+\nu} = 0: \ \nu = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}. \text{ Перетинає.}$$

$$z_E = \frac{7+\frac{2}{5}\cdot 10}{1+\frac{2}{5}} = \frac{11}{\frac{7}{5}} = \frac{55}{7}, \quad E\left(0,0,\frac{55}{7}\right).$$

113. $ABCD$ - трапеція, AD - основа, $AD = 15$, $A(-3,-2,-1)$, $B(1,2,3)$, $C(9,6,4)$. Знайти D, M, S. (декартова с.к.),

де M - т. перетину AC і BD, S - AB і CD.



$$BC = \sqrt{(9-1)^2+(6-2)^2+(4-3)^2} = 9 \qquad \frac{BC}{AD} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

M ділить $\overline{AC}$ у відн. $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{AD}{BC} = \frac{5}{3}$:

$$M = \left(\frac{-3 + \frac{5}{3}\cdot 9}{1+\frac{5}{3}}, \frac{-2 + \frac{5}{3}\cdot 6}{1+\frac{5}{3}}, \frac{-1 + \frac{5}{3}\cdot 4}{1+\frac{5}{3}} \right) = \left(\frac{36}{8}, \frac{24}{8}, \frac{17}{8} \right) = \left(\frac{9}{2}, 3, \frac{17}{8} \right)$$

D ділить BM у відн. $\frac{\overline{BD}}{\overline{DM}} = -\frac{BM+MD}{MD} = -1-\frac{BM}{MD} = -1-\frac{BC}{AD} = -\frac{8}{5}$.

$$D = \left(\frac{1-\frac{8}{5}\cdot\frac{9}{2}}{1-\frac{8}{5}}, \frac{2-\frac{8}{5}\cdot 3}{1-\frac{8}{5}}, \frac{3-\frac{8}{5}\cdot\frac{17}{8}}{1-\frac{8}{5}} \right) = \left(\frac{-31}{-3}, \frac{-14}{-3}, \frac{-2}{-3} \right) = \left(\frac{31}{3}, \frac{14}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

Або: $D = A + \overline{AD} = A + \frac{AD}{BC}\overline{BC} = (-3,-2,-1) + \frac{5}{3}(8,4,1) = \left(\frac{31}{3}, \frac{14}{3}, \frac{2}{3} \right)$.

S ділить AB у відн. $\frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = -\frac{AS}{BS} = -\frac{AD}{BC} = -\frac{5}{3}$:

$$S = \left(\frac{-3-\frac{5}{3}\cdot 1}{1-\frac{5}{3}}, \frac{-2-\frac{5}{3}\cdot 2}{1-\frac{5}{3}}, \frac{-1-\frac{5}{3}\cdot 3}{1-\frac{5}{3}} \right) = \left(\frac{-14}{-2}, \frac{-16}{-2}, \frac{-18}{-2} \right) = (7,8,9).$$

60. ω - коло з центром у $(6,7)$ радіуса 5. Знайти довжини відрізків дотичних, що проведені з $(7,14)$ до ω (с.к. декартова).

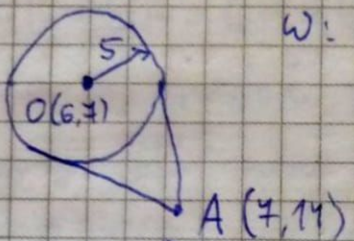
$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$. Відстань $AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(y_B-y_A)^2+(x_B-x_A)^2}$.

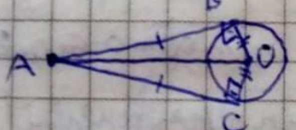
(і взагалі для $a=(x_a, y_a)$ $|a| = \sqrt{x_a^2+y_a^2}$).

Коло з центром (a,b) радіуса R: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

Аналогічно для простору і сфери.

$$\omega: (x-6)^2+(y-7)^2=25$$



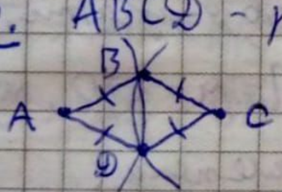


$$AC^2 = AB^2 = AO^2 - OB^2 =$$

$$= (7-6)^2+(14-7)^2 - 5^2 = 1+49-25 = 25.$$

Тобто $AB = AC = 5$.

63. $ABCD$ - ромб, $A(8,-3)$, $C(10,11)$, $AB=10$. Знайти B, D (дек. с.к.)



B, D - точки перетину кіл з центрами в A і C радіуса 10:

$$\begin{cases}(x-8)^2+(y+3)^2=100\\(x-10)^2+(y-11)^2=100\end{cases} \quad \begin{cases}x^2-16x+64+y^2+6y+9=100\\x^2-20x+100+y^2-22y+121=100\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-16x+y^2+6y=27\\x^2-20x+y^2-22y=-121\end{cases}$$

$$4x+28y=148$$

$$x=37-7y$$

$$(29-7y)^2+(y+3)^2=100$$

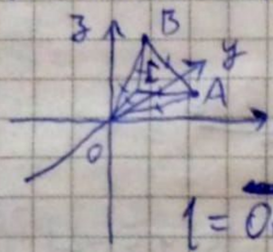
$$841-406y+49y^2+y^2+6y+9=100$$

$$50y^2-400y+750=0$$

$$y^2-8y+15=0$$

$$y=4\pm\sqrt{16-15}: \quad \begin{matrix}y_1=5 & x_1=37-35=2\\ y_2=3 & x_2=37-21=16\end{matrix} \quad \{B,D\}=\{(2,5),(16,3)\}$$

69. Oxyz – декартова с.к., $A \in Oxy$, $B \in Oyz$, $C \in Oxz$, $OABC$ – правильний тетраедр з ребром 1, що лежить у I октанті.
Знайти A, B, C.



Отже, $A(x_A, y_A, 0)$, $B(0, y_B, z_B)$, $C(x_C, 0, z_C)$,
де $x_A, y_A, y_B, z_B, x_C, z_C \geq 0$ (I октант)

$$1 = OA^2 = x_A^2 + y_A^2$$
$$1 = OB^2 = y_B^2 + z_B^2$$
$$1 = OC^2 = x_C^2 + z_C^2$$
$$1 = AB^2 = x_A^2 + (y_B - y_A)^2 + z_B^2$$
$$1 = AC^2 = (x_C - x_A)^2 + y_A^2 + z_C^2$$
$$1 = BC^2 = x_C^2 + y_B^2 + (z_C - z_B)^2$$

Додаємо 3 останніх, віднімаємо 3 перших: $(x_C - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_C - z_B)^2 = 0$,
тобто $x_C = x_A$, $y_B = y_A$, $z_C = z_B$.

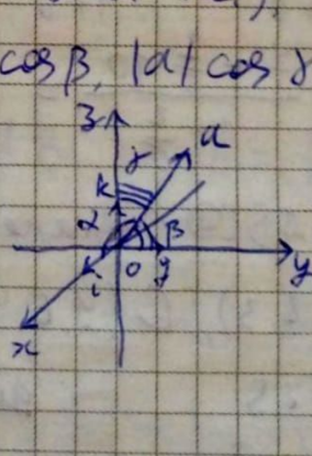
Віднімаємо друге від першого: $0 = x_A^2 - z_B^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_A \geq 0 \\ z_B \geq 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_A = z_B$

Ан-но дві інших пари: $x_A = y_A = y_B = z_B = x_C = z_C$. З першого:
$2x_A^2 = 1$, тобто $x_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отже, $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

73. Вектор a утворює кут $\frac{\pi}{4}$ з Ox, $\frac{\pi}{3}$ – з Oz, гострий кут – з Oy, $|a| = 8$. Знайти a (Oxyz – дек. с.к.)

Напрямні косинуси: $a = (|a|\cos\alpha, |a|\cos\beta, |a|\cos\gamma)$, де α, β, γ – кути між a і (додатними напрямками) Ox, Oy, Oz відповідно, тобто з базисними e_1, e_2, e_3 (i, j, k). При цьому

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$



Отже, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$, β гострий, тобто $\cos\beta > 0$:

$$\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\gamma = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

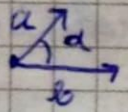
$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$a = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (4\sqrt{2}, 4, 4).$$

131. ΔABC – рівносторонній: $AB = BC = CA = 1$. Знайти

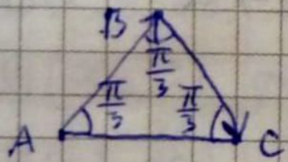
$$(\overline{AB},\overline{BC}) + (\overline{BC},\overline{CA}) + (\overline{CA},\overline{AB})$$

—

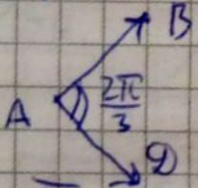


$(a,b) = |a||b|\cos\alpha$. Вектори мають спільний початок!

—



Кут між $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$ – це $\frac{2\pi}{3}$: можна перенести $\overline{BC}$ у A:



$\overline{AD} = \overline{BC}$

Тому $(\overline{AB},\overline{BC}) = |\overline{AB}|\cdot|\overline{BC}|\cos\frac{2\pi}{3} = AB\cdot BC\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$,

Або $(\overline{AB},\overline{BC}) = (-\overline{BA},\overline{BC}) = -(\overline{BA},\overline{BC}) = -BA\cdot BC\cdot\cos\angle B = -\frac{1}{2}$, бо $\angle B = \frac{\pi}{3}$.

Ан-но, $(\overline{BC},\overline{CA}) = -(\overline{CB},\overline{CA}) = -CB\cdot CA\cdot\cos\angle C = -\frac{1}{2}$,

$(\overline{CA},\overline{AB}) = -(\overline{AC},\overline{AB}) = -AC\cdot AB\cdot\cos\angle A = -\frac{1}{2}$. Тому сума $-\frac{3}{2}$.

—

$(a+b,c) = (a,c) + (b,c)$, $(a,b+c) = (a,b) + (a,c)$.

$(\lambda a,b) = \lambda(a,b) = (a,\lambda b)$

$(a,b) = (b,a)$

$(a,a) \geq 0$ і $(a,a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

$|a| = \sqrt{(a,a)}$.

$(a,b) = \langle a,b\rangle = a\cdot b$