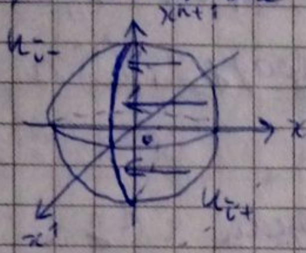
Які ще атласи бувають у S^n?

Ортогональне проектування:



$B = \{(U_{i+}, \varphi_{i+}), (U_{i-}, \varphi_{i-})\}_{i=1}^{n+1}$ – $2n+2$ карти

$U_{i+} = \{x \in S^n \mid x^i > 0\}$ – відкриті

$U_{i-} = \{x \in S^n \mid x^i < 0\}$

$\varphi_{i+}(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)$

$\varphi_{i-}(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)$

$\varphi_{i+}: U_{i+} \to B^n$, $\varphi_{i-}: U_{i-} \to B^n$ – неперервні, біј (де $B^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| < 1\} \cong \mathbb{R}^n$). Обернені:

$\varphi_{i+}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = (y^1, \dots, y^{i-1}, \sqrt{1 - \sum_i (y^i)^2}, y^i, \dots, y^n)$,

$\varphi_{i-}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = (y^1, \dots, y^{i-1}, -\sqrt{1 - \sum_i (y^i)^2}, y^i, \dots, y^n)$ – неперервні

Отже це атлас.

Відобр. переходу $\varphi_{j\pm} \circ \varphi_{i\pm}^{-1}$ – ∞-гладкі, тобто B задає гл. структуру на S^n. Відображення переходу між картами різних структур: при $i = \overline{1,n}$

$$\varphi_N \circ \varphi_{i+}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{y^1}{1-y^n}, \dots, \underset{i}{\frac{\sqrt{1-|y|^2}}{1-y^n}}, \dots, \frac{y^{n-1}}{1-y^n}\right): B^n \to \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^i > 0\}$$

$$\varphi_N \circ \varphi_{i-}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{y^1}{1-y^n}, \dots, \frac{-\sqrt{1-|y|^2}}{1-y^n}, \dots, \frac{y^{n-1}}{1-y^n}\right): B^n \to \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^i < 0\}$$

$$\varphi_S \circ \varphi_{i\pm}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{y^1}{1+y^n}, \dots, \frac{\pm\sqrt{1-|y|^2}}{1+y^n}, \dots, \frac{y^{n-1}}{1+y^n}\right): B^n \to \{y \in \mathbb{R}^n \mid \pm y^i > 0\}$$

$$\varphi_{i\pm} \circ \varphi_N^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{2y^1}{|y|^2+1}, \dots, \frac{2y^{i-1}}{|y|^2+1}, \frac{2y^{i+1}}{|y|^2+1}, \dots, \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}\right): \{y \in \mathbb{R}^n \mid \pm y^i > 0\} \to B^n$$

$$\varphi_{i\pm} \circ \varphi_S^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{2y^1}{|y|^2+1}, \dots, \frac{2y^{i-1}}{|y|^2+1}, \frac{2y^{i+1}}{|y|^2+1}, \dots, \frac{1-|y|^2}{|y|^2+1}\right): \{y \in \mathbb{R}^n \mid \pm y^i > 0\} \to B^n$$

При $i = n+1$:

$$\varphi_N \circ \varphi_{n+1+}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{y^1}{1-\sqrt{1-|y|^2}}, \dots, \frac{y^n}{1-\sqrt{1-|y|^2}}\right): B^n \setminus \{0\} \to \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| > 1\}$$

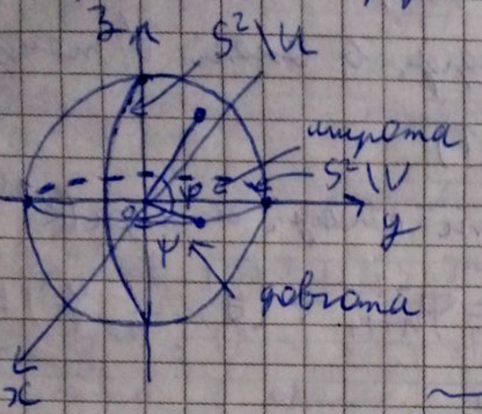
$$\varphi_N \circ \varphi_{n+1-}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{y^1}{1+\sqrt{1-|y|^2}}, \dots, \frac{y^n}{1+\sqrt{1-|y|^2}}\right): B^n \to B^n$$

$\varphi_S \circ \varphi_{n+1+}^{-1} = \varphi_N \circ \varphi_{n+1-}^{-1}$, $\varphi_S \circ \varphi_{n+1-}^{-1} = \varphi_N \circ \varphi_{n+1+}^{-1}$

$$\varphi_{n+1\pm} \circ \underbrace{\varphi_N^{-1}}_{(y^1, \dots, y^n)} = \left(\frac{2y^1}{|y|^2+1}, \dots, \frac{2y^n}{|y|^2+1}\right) = \varphi_{n+1\pm} \circ \varphi_S^{-1}(y^1, \dots, y^n)$$ на

відп. множинах. Всі ці відобр. ∞-гладкі, отже $A \sim B$: гладкі структури збігаються.

Сферичні координати. Обмежимося $n = 2$.



$$\begin{cases} x = \cos\varphi\cos\psi \\ y = \cos\varphi\sin\psi \\ z = \sin\varphi \end{cases}$$

задає $\Phi^{-1}: \overbrace{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi)}^{\approx \mathbb{R}^2} \to U$, де відкрита $U = S^2 \setminus \{(x,y,z) \in S^2 \mid y = 0,\ x \geq 0\}$ – доповнення до напівплощини, біє, неперервна, обернене:

$$\Phi(x,y,z) = \begin{cases} \left(\arcsin z, \arccos \frac{x}{\sqrt{1-z^2}}\right), & y \geq 0 \\ \left(\arcsin z, 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{1-z^2}}\right), & y \leq 0 \end{cases}$$

теж неперервне, тому (U, Φ) – карта. До атласу її доповнює (V, Ψ), де $V = S^2 \setminus \{(x,y,z) \in S^2 \mid z = 0,\ x \leq 0\}$, $\Psi: V \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi)$ задається Ψ^{-1}:

$$\begin{cases} x = -\cos\chi\cos\omega \\ y = \sin\chi \\ z = \cos\chi\sin\omega \end{cases}$$

<u>Д/З</u> 1. Перевірити, що $C := \{(U, \Phi), (V, \Psi)\}$ – атлас S^2, ∞-гладкий.

2. Чи задає C ту ж гладку структуру, що A і B?

3. Визначити, що таке $\mathbb{C}P^n$ (аналогічно до $\mathbb{R}P^n$). Показати, що це $2n$-вимірний ∞-гладкий многовид. Що таке $\mathbb{C}P^1$?

4. Побудувати гл. структуру на $M \times N$ за гл. структурами на M і на N.

5. Побудувати гл. структуру на відкритій $U \subset M$ за гл. структурою на M.

Розглянемо атласи $\mathbb{R}$: $A_k := \{(\mathbb{R}, t \overset{\varphi_k}{\mapsto} t^{2k-1})\}_{k=1}^{\infty}$

Очевидно, це дійсно атласи з 1 карти, що задають на $\mathbb{R}$ ∞-гл. структури. При цьому для $k \neq l$ відобр. переходу

$\varphi_l \circ \varphi_k^{-1} : x \mapsto x^{\frac{2l-1}{2k-1}}$

$\varphi_k \circ \varphi_l^{-1} : x \mapsto x^{\frac{2k-1}{2l-1}}$

Один з цих показників $< 1 \Rightarrow$ відп. ф-ція не гладка, бо її похідна не визначена в 0.

Отже, $A_k \nsim A_l \Rightarrow \{[A_k]\}_{k=1}^{\infty}$ – попарно різні
(станд. при $k=1$)
гл. стр. Ан-но можна зробити на $\mathbb{R}^n$ $\forall n$.

При цьому $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto t^{2k-1}$ у картах $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ і $(\mathbb{R}, \varphi_k)$ має вигляд $x \underset{\varphi_k^{-1} \circ F \circ \varphi_1}{\mapsto} x$, і

обернене $F^{-1} : t \mapsto t^{\frac{1}{2k-1}}$ так само: $x \underset{\varphi_1^{-1} \circ F \circ \varphi_k}{\mapsto} x$.

Т.ч., F – дифеоморфізм $(\mathbb{R}, [A_1])$ і $(\mathbb{R}, [A_k])$,
тобто ці гл. стр. еквівалентні.
За транзитивністю, тоді й усі $[A_k]$ екв-ні. Більш того, $\forall$ 2 гл. стр. на $\mathbb{R}$ екв-ні, і це вірно для $\mathbb{R}^n$ при $\forall n \neq 4$.

<u>Д/з.</u> Побудувати зліченну кількість різних еквівалентних ∞-гл. структур на S^n.

Чи є включення $\psi: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ регулярним?

Для перевірки треба обрати лок. коорд. в околі $\forall$ точки S^n. Наприклад, для $p = N = (0, \dots, 0, 1)$ $(U_{n+1+}, \varphi_{n+1+})$ — у ній (і єдиній карті станд. атласа $\mathbb{R}^{n+1}$) лок. задання ψ — $id_{\mathbb{R}^{n+1}} \circ \psi \circ \varphi^{-1}_{n+1+} = \varphi^{-1}_{n+1+} : (y^1, \dots, y^n) \mapsto$
$\mapsto (y^1, \dots, y^n, \sqrt{1-|y|^2})$. М-ця Якобі:

$$\left(\frac{\partial x^a}{\partial y^i}\right)_{\substack{a=\overline{1,n+1}\\ i=\overline{1,n}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{-y^1}{\sqrt{1-|y|^2}} & \frac{-y^2}{\sqrt{1-|y|^2}} & \dots & \frac{-y^n}{\sqrt{1-|y|^2}} \end{pmatrix}$$

Щоб перевірити регулярність, треба показати, що стовпці цієї м-ці лін. незалежні, тобто її ранг дорівнює n.

Це так, бо мінор $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Тоді $\left\{ \psi_{y^1} = \frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{y^1}{\sqrt{1-|y|^2}} \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}, \dots, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^n} - \frac{y^n}{\sqrt{1-|y|^2}} \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}}_{\psi_{y^n} =} \right\}$ — базис $T_p(S^n, \psi)$

Усі ці вектори $\perp$ $\psi(p) = (y^1, \dots, y^n, \sqrt{1-|y|^2})$, тому $T_p(S^n, \psi) = \psi(p)^\perp$.

І взагалі, $\forall$ лок. коорд. $\langle \psi, \psi \rangle = 1 \Rightarrow \forall i \;\; 0 = \frac{\partial}{\partial y^i} \langle \psi, \psi \rangle =$
$= 2 \langle \psi_{y^i}, \psi \rangle$, тому всі $\psi_{y^i} \in \psi^\perp$. Оскільки вимірності цих підпросторів $= n$, вони співпадають.

Для стереогр. коорд. (U_S, φ_S) в околі $p \neq N$ лок. задання ψ — це $\varphi_S^{-1} : (y^1, \dots, y^n) \mapsto \left(\frac{2y^1}{|y|^2+1}, \dots, \frac{2y^n}{|y|^2+1}, \frac{1-|y|^2}{|y|^2+1}\right)$. М-ця Якобі:

$$\begin{pmatrix} \frac{2(1-(y^1)^2+(y^2)^2+\dots+(y^n)^2)}{(|y|^2+1)^2} & \frac{-4y^1y^2}{(|y|^2+1)^2} & \dots & \frac{-4y^1y^n}{(|y|^2+1)^2} \\ \frac{-4y^2y^1}{(|y|^2+1)^2} & \frac{2(1+(y^1)^2-(y^2)^2+\dots+(y^n)^2)}{(|y|^2+1)^2} & \dots & \frac{-4y^2y^n}{(|y|^2+1)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-4y^ny^1}{(|y|^2+1)^2} & \frac{-4y^ny^2}{(|y|^2+1)^2} & \dots & \frac{2(1+(y^1)^2+(y^2)^2+\dots-(y^n)^2)}{(|y|^2+1)^2} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{-4y^1}{(1+|y|^2)^2}, \frac{-4y^2}{(1+|y|^2)^2} \dots \dots \frac{-4y^n}{(1+|y|^2)^2} \right)$$

Тепер можна перевірити, що ранг $= n$ (але не потрібно, адже ми це зробили для першої карти).

Зокрема, $v = (\lambda^1, \dots, \lambda^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ належить до $T_N(S^n, \psi) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda^{n+1} = 0$ і $v = \lambda^1 \psi_{y^1} + \dots + \lambda^n \psi_{y^n}$.

Ан-но в околах інших точок.

Для сферичних коорд. м-ця Якобі:

$$\begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi \\ -\sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi \\ \cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Верхній мінор $= -\sin\varphi\cos\varphi$. Оскільки $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, він $=0$ лише при $\varphi = 0$. Тоді ця м-ця:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sin\psi \\ 0 & \cos\psi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки $\sin\psi$ і $\cos\psi$ не можуть $=0$ одночасно, завжди $\exists$ 2×2 — мінор, що $\neq 0$. Тому ранг 2, вкладення регулярне.

Д/З Показати, що $\psi: \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4 : (x:y:z) \mapsto$
$$\mapsto \left(\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}, \frac{xz}{x^2+y^2+z^2}, \frac{yz}{x^2+y^2+z^2}, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2+z^2} \right)$$
ін'єктивне, ∞-гладке і регулярне.

Розглянемо перехід від сферичних коорд. до стереогр. (u, v) на S^2:

$$\varphi_N \circ \Phi^{-1}(\varphi, \psi) = \varphi_N(\cos\varphi\cos\psi, \cos\varphi\sin\psi, \sin\varphi) = \left(\frac{\cos\varphi\cos\psi}{1-\sin\varphi}, \frac{\cos\varphi\sin\psi}{1-\sin\varphi} \right).$$

М-ця Якобі:

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \varphi} & \frac{\partial u}{\partial \psi} \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} & \frac{\partial v}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sin\varphi\cos\psi(1-\sin\varphi) - \cos\varphi\cos\psi(-\cos\varphi)}{(1-\sin\varphi)^2} & -\frac{\cos\varphi\sin\psi}{1-\sin\varphi} \\ \frac{-\sin\varphi\sin\psi(1-\sin\varphi) - \cos\varphi\sin\psi(-\cos\varphi)}{(1-\sin\varphi)^2} & \frac{\cos\varphi\cos\psi}{1-\sin\varphi} \end{pmatrix} =
$$

$$
= \frac{1}{1-\sin\varphi} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\varphi\cos\psi \end{pmatrix}
$$

Тому $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{1-\sin\varphi}\left(\cos\psi\frac{\partial}{\partial u} + \sin\psi\frac{\partial}{\partial v}\right)$

$$
\frac{\partial}{\partial \psi} = \frac{\partial u}{\partial \psi}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial \psi}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}\left(-\sin\psi\frac{\partial}{\partial u} + \cos\psi\frac{\partial}{\partial v}\right).
$$

Якщо $a = \lambda\frac{\partial}{\partial \varphi} + \mu\frac{\partial}{\partial \psi} = \tilde{\lambda}\frac{\partial}{\partial u} + \tilde{\mu}\frac{\partial}{\partial v} \in T_pS^2$, то

$$
\tilde{\lambda} = \lambda\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \mu\frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{1}{1-\sin\varphi}(\lambda\cos\psi - \mu\cos\varphi\sin\psi)
$$

$$
\tilde{\mu} = \lambda\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \mu\frac{\partial v}{\partial \psi} = \frac{1}{1-\sin\varphi}(\lambda\sin\psi + \mu\cos\varphi\cos\psi)
$$

Нарешті,

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \varphi} & \frac{\partial u}{\partial \psi} \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} & \frac{\partial v}{\partial \psi} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}
$$

<u>Д/З</u> Записати у термінах (u, v).