Орієнтовність гладких многовидів

M - k-гл. многовид, $k \geq 1$, $n = \dim M$.

<u>Rem.</u> $\forall$ карт (U, φ) і $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ M з $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ (з атласів даної гл. структури) $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ - дифеоморфізм, тому його якобіан $J(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}) \neq 0$ (в кожній точці) і зберігає знак на зв'язних комп. $\varphi(U \cap \tilde{U})$.

<u>Def.</u> Карти (U, φ) і $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ наз. узгодженими, якщо $J(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}) > 0$ у всіх точках $\varphi(U \cap \tilde{U})$. k-гл. атлас A, будь-які дві карти якого (з тих, що перетинаються) узгоджені, зветься орієнтуючим. Два орієнт. атласа A і B звуться еквівалентними, якщо $A \cup B$ - орієнт. атлас (позн. $A \sim B$).

<u>Rem.</u> Тобто $A \sim B \iff$ усі відобр. переходу від карт A до карт B і навпаки мають додатні якобіани.

<u>Pr.</u> Це відношення еквівалентності атласів (всередині даної гл. структури).

▶ Очевидно, $\mathcal{A}\sim\mathcal{A}$ (бо $\mathcal{A}\cup\mathcal{A}=\mathcal{A}$) і $\mathcal{A}\sim\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B}\sim\mathcal{A}$ (бо <u>def.</u> симетрична).
Нехай $\mathcal{A}\sim\mathcal{B}$, тобто $\forall\ (U,\varphi)\in\mathcal{A}, (V,\psi)\in\mathcal{B}: U\cap V\neq\emptyset$ $J(\psi\circ\varphi^{-1})>0$, і $\mathcal{B}\sim\mathcal{C}$, тобто $\forall\ (V,\psi)\in\mathcal{B}, (W,\chi)\in\mathcal{C}: V\cap W\neq\emptyset$ $J(\chi\circ\psi^{-1})>0$. Тоді $\forall\ (U,\varphi)\in\mathcal{A}, (W,\chi)\in\mathcal{C}: U\cap W\neq\emptyset$ $\forall p\in U\cap W$ $\exists\ (V,\psi)\in\mathcal{B}: p\in V$. В околі цієї точки $\chi\circ\varphi^{-1} = (\chi\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ\varphi^{-1}) \Rightarrow$ [ланцюгове правило і правило множення визначників] $\Rightarrow J(\chi\circ\varphi^{-1}) = J(\chi\circ\psi^{-1})\, J(\psi\circ\varphi^{-1}) > 0$. І так $\forall p\in U\cap W$, тобто $J(\chi\circ\varphi^{-1})>0$ і карти узгоджені. Т.ч., $\mathcal{A}\sim\mathcal{C}$. ▲

<u>def.</u> Клас еквівалентності орієнтуючих атласів M зветься орієнтацією M. Якщо у M $\exists$ орієнт. атлас, M зветься орієнтовним, в іншому випадку – неорієнтовним. Пара $(M,[\mathcal{A}])$, де M – орієнтовний k-гл. многовид, а $[\mathcal{A}]$ – орієнтація на ньому, зветься орієнтованим многовидом.

<u>Rem.</u> Тобто орієнтації – це підкласи гладкої структури.

<u>Pr.</u> Нехай M – орієнтовний зв'язний k-гл. многовид. Тоді

на M $\exists$ рівно 2 орієнтації.

▶ Отже, $\exists$ $\mathcal{A}$ – орієнт. атлас M: $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. $\forall \alpha \in A$ нехай $\varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ (лок. коорд. ф-ції). Покладемо $\hat{\varphi}_\alpha := (-x_\alpha^1, x_\alpha^2, \ldots, x_\alpha^n)$. Тоді $\hat{\mathcal{A}} := \{(U_\alpha, \hat{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ – теж атлас k-гл. з якобіанами відобр. переходу

$$J(\hat{\varphi}_\beta \circ \hat{\varphi}_\alpha^{-1}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^1} & -\frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^2} & \ldots & -\frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^n} \\ -\frac{\partial x_\beta^2}{\partial x_\alpha^1} & \frac{\partial x_\beta^2}{\partial x_\alpha^1} & \ldots & \frac{\partial x_\beta^2}{\partial x_\alpha^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^1} & \frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^1} & \ldots & \frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^n} \end{vmatrix} = (-1)^2 J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) > 0,$$

тобто він орієнтуючий. При цьому $\hat{\varphi}_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ k-гладкі, і

$$J(\hat{\varphi}_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) = \begin{vmatrix} -\frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^1} & \ldots & -\frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^n} \\ \frac{\partial x_\beta^2}{\partial x_\alpha^1} & \ldots & \frac{\partial x_\beta^2}{\partial x_\alpha^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^1} & \ldots & \frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^n} \end{vmatrix} = -J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) < 0$$ і ан-но $J(\varphi_\beta \circ \hat{\varphi}_\alpha^{-1}) < 0$

$\forall \alpha, \beta \in A: U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Тобто, зокрема, $\hat{\mathcal{A}}$ – з тієї ж гл. структури, що й $\mathcal{A}$, але $\mathcal{A} \nsim \hat{\mathcal{A}}$ як орієнтуючі. Отже, $\exists \geq 2$ орієнтацій. Щоб показати, що їх рівно 2, достатньо показати, що $\forall$ орієнт. $\mathcal{B}$ якщо $\mathcal{B} \nsim \mathcal{A}$, то $\mathcal{B} \sim \hat{\mathcal{A}}$.

Дійсно, нехай $\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ і $\mathcal{B} \nsim \mathcal{A}$, тобто $\exists\, \alpha_0 \in A$, $\beta_0 \in B$, $p_0 \in U_{\alpha_0}\cap V_{\beta_0}$: $J(\psi_{\beta_0}\circ\varphi_{\alpha_0}^{-1})(\varphi_{\alpha_0}(p_0)) < 0$. Визначимо ф-цію $f: M\to\mathbb{R}$:

$$f(p) := \operatorname{sign} J(\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(p)),$$

де $\alpha\in A$, $\beta\in B$: $p\in U_\alpha\cap V_\beta$. Ця ф-ція коректно визначена, бо $\forall$ іншої пари індексів $\tilde\alpha\in A$, $\tilde\beta\in B$: $p\in U_{\tilde\alpha}\cap V_{\tilde\beta}$ на деякому околі $\varphi_{\tilde\alpha}(p)$ буде

$$\operatorname{sign} J(\psi_{\tilde\beta}\circ\varphi_{\tilde\alpha}^{-1}) = \operatorname{sign} J(\psi_{\tilde\beta}\circ\psi_\beta^{-1}\circ\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\alpha\circ\varphi_{\tilde\alpha}^{-1}) = \left[\begin{array}{l}\text{ланц. правило}\\ \text{і правило множ.}\\ \text{визначників}\end{array}\right] =$$

$$= \underbrace{\operatorname{sign} J(\psi_{\tilde\beta}\circ\psi_\beta^{-1})}_{1}\operatorname{sign} J(\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})\underbrace{\operatorname{sign} J(\varphi_\alpha\circ\varphi_{\tilde\alpha}^{-1})}_{1} = \operatorname{sign} J(\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}),$$

бо атласи орієнтуючі. Крім того, $f\in C(M,\{-1,1\})$, бо локально на $U_\alpha\cap V_\beta$ $f = \dfrac{J(\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})}{|J(\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})|}\circ\varphi_\alpha$ задається непер. ф-ціями (вимноження поліномів від частинних похідних коорд. ф-цій відобр. переходу + модуль), і, звичайно $f\neq 0$. Оскільки M зв'язний і $f(p_0)=-1$, $f(p)=-1$ $\forall\, p\in M$. Тобто $\forall\,\alpha\in A$,

$\beta \in B$ $J(\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) < 0$ у всіх точках області визначення.
Тому $J(\psi_\beta \circ \hat{\varphi}_\alpha^{-1}) = -J(\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) > 0$, тобто $B \sim \hat{A}$. $\blacktriangle$

<u>Сл.</u> Орієнтовний многовид з m компонентами зв'язності має рівно 2^m орієнтацій.

<u>Ex. 1.</u> $\mathbb{R}^n$: очевидно, $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$ - орієнтуючий. Якщо глоб. коорд. $(x^1, .., x^n)$ задають орієнтацію $\mathbb{R}^n$ (тобто відп. атлас з 1 карти її задає), то базис $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, .., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ задає відп. орієнтацію у лінійно-алгебраїчному сенсі на $T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ і навпаки.

<u>2.</u> Нехай у M $\exists$ атлас $A = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$: $U \cap V$ зв'язний. Тоді аналогічно попер. доведенню або $J(\psi \circ \varphi^{-1}) > 0$ всюди і тому A - орієнт., або $J(\psi \circ \varphi^{-1}) < 0$ всюди і тоді $\{(U, \varphi), (V, \hat{\psi})\}$ (у позначеннях попер. доведення) - орієнт. Отже, M - орієнт. Зокрема, сфера S^n при $n \geq 2$ орієнтовна.

S^n

<u>Впр.</u> S^1 орієнтовне.

__Rem.__ Зв'язність $U\cap V$ тут суттєва, див. приклад листа Мебіуса нижче.

__3.__ Прямий добуток орієнтовних многовидів орієнтовний (__Впр.__). Наприклад, тор $T^n = \underbrace{S^1\times\ldots\times S^1}_{n}$ орієнт.

__4.__ M орієнт., $U\subset M$ відкр. $\Rightarrow$ U орієнт. (__Впр.__).

__5.__ $\mathbb{R}P^n$ орієнт. при непарних n (__Впр.__).

Як доводити __не__орієнтовність?

__Rem.__ Нехай орієнтація M задається атласом A, $p\in M$. Нехай $(U,\varphi)\in A$: $p\in U$, $(x^1,\ldots,x^n)$ - відп. лок. коорд. Задамо орієнтацію T_pM базисом $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ (як у прикладі $\mathbb{R}^n$ вище). Ця орієнтація коректно однозначно визначена орієнтацією M: якщо $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$ - інша карта з A або $\forall$ іншого атласа цієї орієнтації з лок. коорд. $(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)$, $p\in U\cap\tilde{U}$, то $\forall i=\overline{1,n}$

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i}=\frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^i}(p)\,\frac{\partial}{\partial x^j},$$

тобто м-ця переходу між відповідними базисами - це м-ця Якобі $\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1}$ у $\tilde{\varphi}(p)$ з визначником

>0, тому базиси однаково орієнтовані.

<u>def.</u> Векторним полем уздовж кривої $\gamma : I \to M$ (де $I \subset \mathbb{R}$ - деякий проміжок) будемо називати $X : I \to TM : \forall t \in I$ $X(t) \in T_{\gamma(t)} M$. Будемо говорити, що вект. поля $X_1, \dots, X_n$ уздовж $\gamma : I \to M$ задають базис уздовж γ, якщо $\forall t \in I$ $\{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$ - базис $T_{\gamma(t)} M$.

<u>Pr.</u> Нехай $\gamma \in C([a,b], M)$ - шлях у M і $\{X_i \in C([a,b], TM)\}_{i=1}^{n}$ задають базис уздовж γ. Нехай M орієнтований і $\forall p \in M$ на $T_p M$ введена орієнтація як у <u>Rem.</u> вище. Тоді $\{X_1(a), \dots, X_n(a)\}$ додатно (відп., від'ємно) орієнтований у $T_{\gamma(a)} M \Leftrightarrow \{X_1(b), \dots, X_n(b)\}$ додатно (відп., від'ємно) орієнтований у $T_{\gamma(b)} M$.

▷ Розглянемо $f : [a,b] \to \{-1, 1\} : f(t)$ - знак орієнтації $\{X_i(t)\}_{i=1}^{n}$ у $T_{\gamma(t)} M$. Вона неперервна, бо

$\forall t \in [a,b]$ $\forall$ карти (U,φ) $\forall$ атласа орієнтації M: $U \ni \gamma(t)$ з лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ якщо $X_i \big|_{\gamma^{-1}(U)} = X_i^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$, $i = \overline{1,n}$, то $X_i^j \in C(\gamma^{-1}(U), \mathbb{R})$ в силу неперервності X_i, і

$$f\big|_{\gamma^{-1}(U)} = \frac{\det (X_i^j)_{i,j=1}^n}{|\det (X_i^j)_{i,j=1}^n|},$$ тому f неперервна на відкр. околі $\gamma^{-1}(U)$ точки t. Отже, $f \in C(\underset{\text{зв'язна}}{[a,b]}, \{-1,1\})$, тому $f(a) = f(b)$. $\triangle$

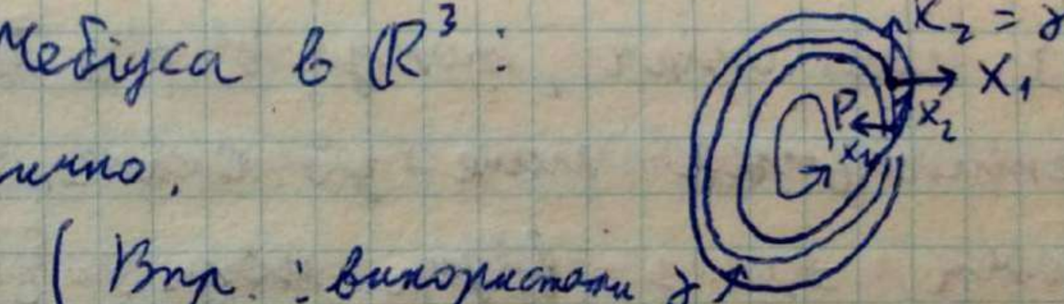
def. Дезорієнтуючим шляхом (петлею) у M наз. шлях $\gamma \in C([a,b], M)$: $\gamma(a) = \gamma(b) = p$ разом з неперервними полями $\{X_i \in C([a,b], TM)\}_{i=1}^n$, що задають базис уздовж γ, такими, що базиси $\{X_i(a)\}_{i=1}^n$ і $\{X_i(b)\}_{i=1}^n$ протилежно орієнтовані у T_pM.

Rem. У цьому **def.** орієнтація M ніде не згадується.

Cor. Якщо у M існує дезорієнтуючий шлях, то M неорієнтовний.

$\triangleright$ $\nearrow$ у M $\exists$ орієнтація. З попер. **Pr.**, тоді $\{X_i(a)\}_{i=1}^n$ і $\{X_i(b)\}_{i=1}^n$ повинні бути одночасно >0 або <0 орієнт. в T_pM, тобто однаково $\downarrow$ $\triangle$

Ex.1. (Відкритий) лист Мебіуса в $\mathbb{R}^3$:



Впр. Записати це аналітично.

Ex.2. $\mathbb{R}P^n$ при парних n (Впр.: використати γ – факторизований напівмеридіан, що з'єднує діаметрально протилежні точки S^n:

)

Rem. Вірно й обернене: M неорієнт. $\Rightarrow \exists$ дезорієнтуючий шлях. При цьому властивість петлі бути дезорієнт. шлях зберігається при гомотопіях (петлі $\gamma, \mu \in C([a,b], M)$, з $\gamma(a) = \gamma(b) = \mu(a) = \mu(b) = p$, гомотопні, якщо $\exists\, F \in C([a,b] \times [0,1], M)$: $F(t,0) = \gamma(t)$, $F(t,1) = \mu(t)$ $\forall t$ і $F(a,s) = F(b,s) = p$ $\forall s$), тому всі однозв'язні многовиди (для яких усі петлі гомотопні постійній $\gamma(t) = p$) орієнтовні. Наприклад, S^n при $n \geq 2$.

Rem. Існують різні означення орієнтовності для різних класів многовидів, але вони всі узгоджені (якщо застосовні два, то орієнтовність відносно них збігається). Наприклад, для поверхонь – через тріангуляцію.

Інтегрування форм

Детальніше - див. Постников (зокрема, там є доведення усіх теорем).

Def. Нехай M - многовид. Говорять, що $A \subset M$ - міри 0 за Жорданом, якщо $\exists$ карти $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{m}$: $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i$, $\forall\, i$ $\varphi_i(A \cap U_i)$ - міри 0 за Жорданом у $\mathbb{R}^n$ (де $n = \dim M$), тобто $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \{x_{ij}\}_{j=1}^{l_i}$ і $\{r_{ij} > 0\}_{j=1}^{l_i}$: $\varphi_i(A \cap U_i) \subset \bigcup_{j=1}^{l_i} B_{r_{ij}}(x_{ij})$ (евкл. кулі), і $\sum_{j=1}^{l_i} \operatorname{Vol} B_{r_{ij}}(x_{ij}) < \varepsilon$ (евкл. об'єми, можна замінити на $\sum_{j=1}^{l_i} r_{ij}^n < \varepsilon$). $D \subset M$ зветься кубовним (вимірним за Жорданом), якщо $\overline{D}$ - компакт і ∂D - міри 0 за Жорданом.

Rem. Кубовні множини мають звичні з аналізу властивості. Зокрема, для кубовних D_1 і D_2 $D_1 \cup D_2$ і $D_1 \cap D_2$ кубовні.

Def. Нехай M - k-гладкий ($k \geq 1$) n-вимірний орієнтований многовид, $D \subset M$ кубовна і $\omega \in \Omega^n(M)$ - $(k-1)$-гл. зовнішня

n-форма. Нехай $D \cap \operatorname{supp}\omega \subset U$, де $\operatorname{supp}\omega := \{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}$ - носій ω, а U - носій деякої карти (U, φ) з якось атласа, що $\in$ орієнтації M (або, як це говорять, задає орієнтацію). Нехай $(x^1, \dots, x^n)$ - лок. коорд., що відповідають (U, φ), і $\omega|_U = f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Інтегралом (від) ω по D зветься тоді інтеграл Рімана

$$\int_D \omega := \int_{\varphi(D \cap U)} f \circ \varphi^{-1} dx^1 \dots dx^n. \qquad (*)$$

<u>Rem.</u> $\varphi(D \cap U)$ кубовна в $\mathbb{R}^n$ (<u>Впр.</u>), $f \circ \varphi^{-1}$ - $(k-1)$-гладка, зокрема, неперервна, тому інтеграл $\exists$. Перевіримо коректність: нехай $D \cap \operatorname{supp}\omega \subset U \cap \tilde{U}$, де $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ - карта з атласа (можливо, іншого), що задає орієнт., з лок. коорд. $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$, і $\omega|_{\tilde{U}} = \tilde{f}\, d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^n$. Тоді

$$\int_{\varphi(D \cap U)} f \circ \varphi^{-1} dx^1 \dots dx^n = \left[\begin{array}{l} \varphi(D \cap U) \text{ можна замінити на} \\ \varphi(D \cap U \cap \tilde{U}), \text{ бо за межами в} \\ \varphi(D \cap U)\ f \circ \varphi^{-1} = 0;\ \text{ф-ла заміни} \\ \text{у інтегралі Рімана для диф-зма } \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \end{array}\right] =$$

$$= \int f \circ \varphi^{-1} \circ (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^{-1} \cdot |J((\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1})^{-1})| \, d\tilde{x}^1 \dots d\tilde{x}^n =$$
$(\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1})(\varphi(\mathcal{D}\cap U\cap\tilde{U}))$

$\left[(\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1})^{-1} = \varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1}; \ |J(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})| = J(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1}), \right.$ бо карти узгоджені (однієї орієнт.) $\left.\right] =$

$$= \int\limits_{\tilde{\varphi}(\mathcal{D}\cap U\cap\tilde{U})} f\circ\tilde{\varphi}^{-1} \cdot J(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1}) \, d\tilde{x}^1 \dots d\tilde{x}^n =$$

[ан-но, можна замінити $\tilde{\varphi}(\mathcal{D}\cap U\cap\tilde{U})$ на $\tilde{\varphi}(\mathcal{D}\cap\tilde{U})$, ф-ла заміни коеф. у n-формі (див. вище)]

$$= \int\limits_{\tilde{\varphi}(\mathcal{D}\cap\tilde{U})} \tilde{f}\circ\tilde{\varphi}^{-1} \, d\tilde{x}^1 \dots d\tilde{x}^n$$

що і доводить коректність. У загальному випадку існування інтеграла гарантується теоремою:

<u>Th.</u> Нехай M - k-гл. ($k \geq 1$) n-вим. орієнтований мн., $\mathcal{D} \subset M$ кубовна. Тоді $\exists!$ лінійний функціонал $\int\limits_{\mathcal{D}} : \Omega^n(M) \to \mathbb{R}$ такий, що $\forall \omega \in \Omega^n(M)$ з $\mathcal{D} \cap \operatorname{supp}\omega \subset U$, де (U, φ) - карта з атласу, що задає орієнт., з лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$, і $\omega|_U = f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ виконується

$$\int\limits_{\mathcal{D}} \omega = \int\limits_{\varphi(\mathcal{D}\cap U)} f\circ\varphi^{-1} \, dx^1 \dots dx^n. \qquad (*)$$

При цьому $\forall$ кубовних $\mathcal{D}_1$ і $\mathcal{D}_2$ в M з $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \varnothing$ і $\forall \omega$

Означає просто що $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \varnothing$

$$\int\limits_{\mathcal{D}_1 \sqcup \mathcal{D}_2} \omega = \int\limits_{\mathcal{D}_1} \omega + \int\limits_{\mathcal{D}_2} \omega$$

def. $\int\limits_D \omega$ тоді зветься інтегралом (від) ω по D.

Ця теорема доводиться за допомогою розбиттів одиниці:

def. Розбиттям одиниці на топ. пр-рі X наз. набір неперервних ф-цій $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset C(X, \mathbb{R})$ таких, що:

- $\forall x \in X$ $\exists$ відкр. $U \ni x$: $|\{\alpha \in A \mid U \cap \operatorname{supp} h_\alpha \neq \emptyset\}| < \infty$.
- $\forall x \in X$ $\sum\limits_{\alpha \in A} h_\alpha(x) = 1$ (коротко: $\sum\limits_\alpha h_\alpha = 1$).

Rem. Тут сума $\sum\limits_\alpha h_\alpha(x)$ має сенс, бо згідно з попер. умовою лише скінч. кількість $h_\alpha(x) \neq 0$, їх і додаємо.

def. Говорять, що покриття $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ множини X вписане в її покриття $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, якщо $\forall \beta \in B$ $\exists \alpha \in A : V_\beta \subset U_\alpha$.

def. Покриття $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ топ. пр-ру X зветься локально скінченним, якщо $\forall x \in X$ $\exists$ відкр. $U \ni x : |\{\alpha \in A \mid U \cap U_\alpha \neq \emptyset\}| < \infty$.

X зветься паракомпактним, якщо у $\forall$ його відкрите покриття можна вписати локально скінченне покриття.

Ex. 1. Компактні простори паракомпактні.

2. $\mathbb{R}^n$ паракомп. (Впр.)

Def. Розбиття одиниці $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}$ на пр-рі X підпорядковане його покриттю $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, якщо $\forall \alpha\in A$ $\operatorname{supp} h_\alpha \subset U_\alpha$.

Th. Нехай M - k-гл. многовид ($k\geq 0$). Тоді M паракомпактний. Більш того, в $\forall$ його відкрите покриття можна вписати локально скінч. покриття $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, для якого $\exists$ підпорядковане йому k-гладке фінітне невід'ємне розбиття одиниці $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (тобто $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset C^k(M)$, $\forall \alpha\in A$ $\operatorname{supp} h_\alpha$ компактне, і $h_\alpha\geq 0$).

Rem. Тепер застосуємо цю Th. до деякого атласа M (знову k-гл. з $k\geq 1$, $\dim M=n$), що задає орієнт. Отримаємо покриття $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ і розб. од. $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Для кубовної $D\subset M$ і $\omega\in\Omega^n(M)$ покладемо

$$\int_D \omega = \int_D \sum_{\alpha\in A} h_\alpha\omega := \sum_{\alpha\in A}\int_D h_\alpha\omega .$$

$\{U_\alpha\}$ лок. скінч., тому $\forall\, p \in \overline{D}$ $\exists$ відкр. $U_p \ni p$: U_p перетинається лише зі скінч. кількістю U_α. D кубовна $\Rightarrow$ $\overline{D}$ комп. $\Rightarrow$ у відкр. покр. $\{U_p\}_{p\in\overline{D}}$ $\exists$ скінч. підпокриття: $D \subset \overline{D} \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{p_i}$. Тому D перетинається лише зі скінч. кількістю U_α. Для інших α $h_\alpha \omega|_D = 0$, тому ті інтеграли в сумі справа покладемо рівними 0, залишиться скінч. сума. Кожен з її доданків $\int_D h_\alpha \omega$ знаходиться як інтеграл Рімана за ф-лою (*), бо $\operatorname{supp} h_\alpha \omega \subset U_\alpha$ - входить до носія деякої карти з атласу орієнтації.

<u>Рем.</u> $\int_D \omega$ можна також визначити для випадку, коли ∂D - міри 0 за Ж., але $\overline{D}$ не обов'язково компакт (наприклад, $D = M$), а $\omega \in \Omega^n(M)$ - фінітна, тобто $\overline{\operatorname{supp}\omega}$ - компакт. Для цього просто інтегруємо по $\overset{\text{Ж}}{}$ $\overline{D \cap E}$

E - якась кубовна, $E \supset \overline{\operatorname{supp}\omega}$.