Форми від векторних полів (доповнення).

<u>Рч.</u> Відображення, що кожній формі $\alpha \in \mathcal{X}^{l,\infty}(M)$ ставить у відповідність

$$\alpha : \underbrace{\mathcal{X}^{\infty}(M)\times\dots\times\mathcal{X}^{\infty}(M)}_{l} \to C^{\infty}(M) : \alpha(X_1,\dots,X_l)(p) := \alpha_p\big((X_1)_p,\dots,(X_l)_p\big)$$

$\forall X_1,\dots,X_l \in \mathcal{X}^{\infty}(M),\ p\in M$, є лінійним ізоморфізмом вект. просторів над $\mathbb{R}$ і модулів над $C^{\infty}(M)$

$$\mathcal{X}^{l,\infty}(M) \to \left\{\begin{array}{l} l\text{-лінійні форми} \\ \text{на модулі } \mathcal{X}^{\infty}(M) \text{ над } C^{\infty}(M) \end{array}\right\}.$$

(раніше перевіримо, що його область значень - саме множина справа).

▷ Структура модуля (і вект. пр-ру при $f=\lambda\in\mathbb{R}$, $g=\mu\in\mathbb{R}$) на правій множині вводиться очевидним чином:

$$(f\alpha+g\beta)(X_1,\dots,X_l) := f\cdot\alpha(X_1,\dots,X_l)+g\cdot\beta(X_1,\dots,X_l)\ (\in C^{\infty}(M))$$

$\forall X_1, \dots, X_\ell \in \mathcal{X}^r(M)$, де $f, g \in C^r(M)$. Комбінація форм $f\alpha + g\beta$ за побудовою переходить саме у таке відобр., тому побудована відповідність є лінійною. Треба перевірити його бієктивність, тобто побудувати обернене. Отже, нехай дана ℓ-лінійна відн. множення на ф-ції з $C^r(M)$ форма $\alpha : \underbrace{\mathcal{X}^r(M) \times \dots \times \mathcal{X}^r(M)}_{\ell} \to C^r(M)$.

<u>Гл. 1.</u> (існування та властивості полів-продовжень).
$\forall p \in M$ $\forall v \in T_pM$ існує r-гладке продовження цього вектора на M, тобто таке поле $X \in \mathcal{X}^r(M)$, що $X_p = v$. Більш того, ці продовження можна обирати так, що вони задовольняють наступним умовам:

а. $\forall$ двох продовжень X і $\tilde{X}$ вектора $v \in T_pM$ $\exists$ відкр. $W \ni p$: $X|_W = \tilde{X}|_W$;

в. $\forall$ $v, w \in T_pM$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ продовження $\lambda v + \mu w$ має вигляд $fX + gY$, де $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$ і $X_p = v$, $Y_p = w$ (тобто це продовження v і w відп.), $f(p) = \lambda$, $g(p) = \mu$.

$\triangleright$ Нехай $U \ni p$ - коорд. окіл з лок. коорд $(x^1, \dots, x^n)$ і $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Застосуємо до U і p Рч. про існування гл. ф-цій Урисона й отримаємо околи V, W і ф-цію φ.

$\varphi \in C^\infty(M)$. Покладемо для $q \in M$

$$X_q := \begin{cases} \varphi(q) \cdot \left(v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q\right), & q \in U, \\ 0, & q \notin U \end{cases}$$

Отримали поле $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ (ан-но іншим побудова з використанням ф-цій Урисона - Впр.). $\forall$ два такі про-

$\underbrace{}^{X \text{ і } \tilde{X}}$
довження на перетині відп. множин W і $\tilde{W}$ дорівнюють $v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, оск. ф-ції Урисона $\varphi = 1 = \tilde{\varphi}$ на $W \cap \tilde{W}$, звідки маємо а. З лін. комб. $\lambda v + \mu w$ (де $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$) цим способом отримуємо поле

$$q \mapsto \begin{cases} 0, & q \notin U, \\ \varphi(q) \left((\lambda v^i + \mu w^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q\right) = \underbrace{\sqrt{\varphi(q)}\,\lambda}_{f(q)} \cdot \underbrace{\sqrt{\varphi(q)}\left(v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q\right)}_{X_q} + \underbrace{\sqrt{\varphi(q)}\,\mu}_{g(q)} \cdot \\ \underbrace{\cdot \sqrt{\varphi(q)}\left(w^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q\right)}_{Y_q}, & q \in U. \end{cases}$$

Визначаючи f, g, X, Y вказаним тут способом на U і 0 за межами U ($\sqrt{\varphi}$ - теж ф-ція Урисона), маємо, що це продовження має вигляд $fX + gY$ як потрібно у в. $\triangle$ (Рч.1)

Рч. 2. Якщо $X \in \mathcal{X}^\infty(M)$ таке, що $\exists$ відкр. $U \ni p$: $X_i|_U = 0$, то $\forall\ X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_l \in \mathcal{X}^\infty(M)$ $\alpha(X_1, \dots, X_i, \dots, X_l)(p) = 0$ (тут $i = \overline{1,l}$ - довільний).

▷ Побудуємо для U і p ф-цію Урисона $\varphi \in C^\infty(M)$. Тоді $\varphi X_i = 0$ з умови та власт. φ, тому за лінійністю α

$$0 = \alpha(X_1, \dots, \varphi X_i, \dots, X_l)(p) = \underbrace{\varphi(p)}_{=1} \cdot \alpha(X_1, \dots, X_i, \dots, X_l)(p).$$ ◁ (Рч.2)

Отже, нехай $p \in M$ $\forall\ v_1, \dots, v_l \in T_pM$ н[redacted]ехай $X_1, \dots, X_l \in \mathcal{X}^\infty(M)$ - їхні відп. продовження, що задов. умовам Рч.1. Покладемо

$$\alpha_p : T_pM \times \dots \times T_pM \to \mathbb{R} : v_1, \dots, v_l \mapsto \alpha(X_1, \dots, X_l)(p)$$

і перевіримо, що $p \mapsto \alpha_p$ — ч-гл. l-форма, що переходить в α при відображенні з умови. Перевіримо коректність.

(це так за побудовою цього $p \mapsto \alpha_p$)

Нехай $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_l$ – якісь (інші) продовження $v_1, \dots, v_l$ відп., що задов. Рч.1. В силу власт. а., $\forall\, i = \overline{1,l}$ X_i та $\tilde{X}_i$ збіг. на деякій відкр. $W_i \ni p$, тобто $(X_i - \tilde{X}_i)|_{W_i} = 0$. Тоді за Рч.2. та l-лінійністю α

$$\alpha(X_1, X_2, \dots, X_l)(p) - \alpha(\tilde{X}_1, X_2, \dots, X_l)(p) = \alpha(X_1 - \tilde{X}_1, X_2, \dots, X_l)(p) = 0,$$ тобто

$$\alpha(X_1, X_2, \dots, X_l)(p) = \alpha(\tilde{X}_1, X_2, \dots, X_l)(p) = [\text{ан-но}] = \alpha(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, X_3, \dots, X_l)(p) = \dots$$

$$\dots = \alpha(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_l)(p),$$ що й демонструє коректність.

Перевіримо l-лінійність α_p: $\forall\, i = \overline{1,l}$, $v_i, w_i \in T_pM$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ будемо продовжувати $\lambda v_i + \mu w_i$ полем $fX_i + gY_i$, де $f(p) = \lambda$, $g(p) = \mu$, $(X_i)_p = v_i$, $(Y_i)_p = w_i$ у відп. до власт. в. з Рч.1. Тоді за побудовою

$$\alpha_p(v_1, \dots, \lambda v_i + \mu w_i, \dots, v_l) = \alpha(X_1, \dots, fX_i + gY_i, \dots, X_l)(p) =$$

$= [\text{лінійність } \alpha] = \left(f \cdot \alpha(X_1, \dots, X_i, \dots, X_l) + g \cdot \alpha(X_1, \dots, Y_i, \dots, X_l)\right)$
$(p) = \lambda \alpha_p(v_1, \dots, v_i, \dots, v_l) + \mu \alpha_p(v_1, \dots, w_i, \dots, v_l)$.

Т.ч., $\alpha_p \in T_p M^l_0$ $\forall p$, тобто $p \mapsto \alpha_p$ – l-форма на M (що переходить у α за побудовою). Залишилося перевірити її гладкість. У лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U тепер можна записати розкладення $\alpha|_U = \alpha_{i_1 \dots i_l} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_l}$, де $\alpha_{i_1 \dots i_l}(p) = \alpha_p\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_l}}\right)$ $\forall p \in U$. Як у дов. Рч.1, продовжимо $\forall i = \overline{1, n}$ вектор $\frac{\partial}{\partial x^i}$ полем $e_i \in \mathcal{X}^\infty(M)$: $e_i|_W = \frac{\partial}{\partial x^i}$ (як лок. задане поле), де W – відкр., $p \in W \subset U$ (можна вважати W однаковим для усіх i, перетинаючи їх). Тоді $\forall i_1, \dots, i_l = \overline{1, n}$
$\alpha_{i_1 \dots i_l}|_W = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_l})|_W \in C^\infty(W)$. Зробивши так $\forall p \in U$, отримаємо $\alpha_{i_1 \dots i_l} \in C^\infty(U)$. Отже, дійсно $(p \mapsto \alpha_p) \in \mathcal{X}^{l,\infty}(M)$ ◭

<u>Впр.</u> Переконатися, що це доведення працює і для $\forall$ (l, m)-тенз. поля, тобто його <u>def. 2.</u> екв-не основному у цьому сенсі.